

Zestaw 10 - informatyka (termin - 13 IV)
Analiza wielowymiarowa

(zadania na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz F. Leja, "Rachunek różniczkowy i całkowy".)

1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(x, y) = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(b) $g(x, y) = \arctg(y/x)$

(c) $h(x, y) = x^2y^2 + x^2z^2$

2. Pokaż, że jeżeli $pv = RT$, gdzie R jest stałą, to

$$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

(Jest to tzw. wzór Clapeyrona z termodynamiki)

3. Znajdź pochodną Fréchetą przekształcenia

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz & \sin x & z^2 \\ x^2 + y^2 & \cos yz & 1 \end{pmatrix}$$

w punkcie $(0, 0, 0)$.

4. Napisz macierz drugich pochodnych funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + 2xyz - z^3$.

5. Napisz rozwinięcie Taylora do rzędu 3 funkcji $g(x, y) = x^3 - xy$ w punkcie $(1, 1)$.

6. Wyznacz ekstrema funkcji

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2$

(b) $g(x, y) = x^4 + 2x^3 + x^2 + y^4/2 + y^3 - y^2$

7. Znajdź ekstrema funkcji $h(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ w trójkącie ograniczonym liniami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

8. Spośród prostopadłościanów o danej objętości wyznacz ten o najmniejszym polu powierzchni.

9. Spośród basenów prostopadłościennych o danej objętości wybrać ten, którego pole podstawy i ścian bocznych jest najmniejsze.

10. Wyznacz współrzędne środka krzywizny oraz krzywiznę krzywych

(a) $x^2 + y^2 = r^2$ (okrąg)

(b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (elipsa)

(c) $y - ax^2 = 0$ (parabola)

(d) $xy = 1$ (hiperbola)