

Zestaw 12 - fizyka (termin - 13 IV)  
Analiza wielowymiarowa

(zadania na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz F. Leja, "Rachunek różniczkowy i całkowy".)

1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

(a)  $f(x, y) = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(b)  $g(x, y) = \arctg(y/x)$

(c)  $h(x, y) = x^2y^2 + x^2z^2$

2. Pokaż, że jeżeli  $pv = RT$ , gdzie  $R$  jest stałą, to

$$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

(Jest to tzw. wzór Clapeyrona z termodynamiki)

3. Znajdź pochodną Fréchetą przekształcenia

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz & \sin x & z^2 \\ x^2 + y^2 & \cos yz & 1 \end{pmatrix}$$

w punkcie  $(0, 0, 0)$ .

4. Napisz macierz drugich pochodnych funkcji  $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + 2xyz - z^3$ .

5. Napisz rozwinięcie Taylora do rzędu 3 funkcji  $g(x, y) = x^3 - xy$  w punkcie  $(1, 1)$ .

6. Wyznacz ekstrema funkcji

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2$

(b)  $g(x, y) = x^4 + 2x^3 + x^2 + y^4/2 + y^3 - y^2$

7. Znajdź ekstrema funkcji  $h(x, y) = x^2y(4 - x - y)$  w trójkącie ograniczonym liniami  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ .

8. Spośród prostopadłościanów o danej objętości wyznacz ten o najmniejszym polu powierzchni.

9. Spośród basenów prostopadłościennych o danej objętości wybrać ten, którego pole podstawy i ścian bocznych jest najmniejsze.

10. Znajdź ekstrema funkcji uwikłanej  $y(x)$  danej przez równanie

$$2x^2 + y^2 + 2xy + y - 4 = 0.$$

11. Wyznacz z pomocą metody mnożników Lagrange'a ekstrema warunkowe funkcji

(a)  $f(x) = x/1 + y/b$  przy warunku  $x^2 + y^2 = 1$

(b)  $g(x) = x^2 + y^2 + z^2$  przy warunku  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

12. Wyznacz współrzędne środka krzywizny oraz krzywiznę krzywych

(a)  $x^2 + y^2 = r^2$  (okrąg)

(b)  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  (elipsa)

(c)  $y - ax^2 = 0$  (parabola)

(d)  $xy = 1$  (hiperbola)