

Zestaw 10: Analiza wielowymiarowa

(zadania na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz F. Leja, "Rachunek różniczkowy i całkowy".)

1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(x, y) = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(b) $g(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$

(c) $h(x, y) = x^2y^2 + xz^3$

2. Pokaż, że jeżeli $pv = RT$, gdzie R jest stałą, to

$$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

(Jest to tzw. wzór Clapeyrona z termodynamiki)

3. Napisz macierz drugich pochodnych funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + 2xyz - z^3$.

4. Napisz rozwinięcie Taylora do rzędu 3 funkcji $g(x, y) = x^3 - xy$ w punkcie $(1, 1)$.

5. Wyznacz ekstrema funkcji

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2$

(b) $g(x, y) = x^4 + 2x^3 + x^2 + y^4/2 + y^3 - y^2$

6. Napisz wzór funkcji $f : R^2 \rightarrow R$, która ma punkt siodłowy.

7. Znajdź ekstrema funkcji $h(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ w trójkącie ograniczonym liniami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

8. Spośród prostopadłościanów o danej objętości wyznacz ten o najmniejszym polu powierzchni.

9. Spośród basenów prostopadłościennych o danej objętości wybrać ten, którego pole podstawy i ścian bocznych jest najmniejsze.

10. Znajdź ekstrema funkcji uwikłanej $y(x)$ danej przez równanie

$$2x^2 + y^2 + 2xy + y - 4 = 0.$$

11. Wyznacz z pomocą metody mnożników Lagrange'a ekstrema warunkowe funkcji

(a) $f(x) = x/2 + y/b$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$

(b) $g(x) = x^2 + y^2 + z^2$ przy warunku $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

12. Wyznacz współrzędne środka krzywizny oraz krzywiznę krzywych

(a) $x^2 + y^2 = R^2$ (okrąg)

(b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (elipsa)

(c) $y - ax^2 = 0$ (parabola)

(d) $xy = 1$ (hiperbola)

w dowolnym punkcie (x, y) .