Analiza Matematyczna, fizyka/informatyka, 2008/9
Prof. dr hab. W. Broniowski

Zestaw 1: Elementy logiki i teorii mnogości

(dwa konwersatoria + kolokwium ok. 20 min.

1. Naucz się na pamieć (nie musi być po kolei) i napisz alfabet grecki.

2. Niech

p	=	jestem Polakiem
q	=	lubię Góry Świętokrzyskie
r	=	mam 19 lat

   Zapisz symbolicznie następujące zdania:

   (a) Jestem Polakiem i mam 19 lat.

   (b) Jeśli jestem Polakiem i mam 19 lat, to nie lubię Gór Świętokrzyskich.

   (c) Fakt, że lubię Góry Świętokrzyskie wynika z tego, że jestem Polakiem.

   (d) Lubię Góry Świętokrzyskie, a więc jestem Polakiem lub mam 19 lat.

   (e) Stwierdzenie, że mam 19 lat, jest równoważne stwierdzeniu, że lubię Góry Świętokrzyskie.

3. Napisz słownie negacje powyższych zdań, np. "Nie jestem Polakiem lub nie mam 19 lat", itd.

4. Zapisz w języku polskim zdania

   (a) $(p \vee q) \Rightarrow r$

   (b) $\sim (\sim r)$

   (c) $(r \vee (\sim r)) \wedge p \wedge q$

   gdzie p, q, r zdefiniowane są w punkcie 2.

5. Rozważ zdanie “liczba n podzielna przez 6 $\Rightarrow$ liczba n podzielna przez 3”. Co jest poprzednikiem, co nastepnikiem implikacji, co jest warunkiem koniecznym, co dostatecznym dla czego?

6. Skonstruuj matryce (tabelki) logiczne dla zdań

   (a) $\sim p \Rightarrow q$

   (b) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

   (c) $p \Rightarrow (p \vee q)$

   (d) $p \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$

   (e) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r)$

7. Alternatywa wykluczająca $\oplus$ zdefiniowana jest poprzez tabelkę

p	q	p$\oplus$q
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Zbuduj matryce logiczne dla zdań $p \oplus p$, $(p \oplus p) \oplus p$, oraz $(p \oplus q) \oplus r$.

Czy działanie $\oplus$ jest łączne? Odpowiedź udowodnij.

8. Używając negacji, alternatywy i koniunkcji, zbuduj wyrażenie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

   (a) dokładnie jedno z dwoch zdań p, q jest prawdziwe.

   (b) dokładnie jedno z trzech zdań p, q, r jest prawdziwe.

   (c) dokładnie dwa ze zdań p, q, r są prawdziwe.

   Odpowiedzi sprawdź tabelką.

9. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

   (a) $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

   (b) $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

   (c) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

   (d) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$

   (e) $(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$

   (f) $(p \iff q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

   (g) $(p \Rightarrow q) \iff (\sim p \vee q)$

   (h) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$

   (i) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r))$

10. Określ koniunkcję z pomocą negacji i alternatywy.

11. Rozważ zdanie "Papużka nie przeżyje, jeśli nie będziesz jej karmić".

   (a) Napisz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję).

   (b) Napisz zdanie odwrotne.

   (c) Napisz zdanie odwrotne do zdania przeciwstawnego.

   (d) Które z powyższych zdań są prawdziwe?

12. Wiadomo, że jeśli Marek ma grypę, to Kasia też ma grypę, oraz nieprawdą jest, że jeśli Piotrek ma grypę, to Kasia ma grypę. Wydedukuj, kto jest chory, a kto zdrowy.

13. Pokaż pomocą definicji i praw logicznych, że $A \supset (A \cap B)$ oraz że $A \subset (A \cup B)$.

14. Wypisz po kilka elementów poniższych zbiorów

    (a) $\{2^n : n \in N\}$ (N - zbiór liczb naturalnych)

    (b) $\{n^5 : n \in Z\}$ (Z - zbiór liczb całkowitych)

    (c) $\{1/p : p \in P$ (P - zbiór liczb pierwszych)

    (d) $\{q^2 : q \in Q$ (Q - zbiór liczb wymiernych)

    (e) $\{\{a, b\} : a \in N, b \in R\}$

15. Odgadnij intuicyjnie niewypisane elementy i opisz słowami poniższe zbiory:

    (a) {1, 2, 3, 4, 5 ...}

    (b) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ...}

    (c) {1, 2, 4, 8, 16 ...}

    (d) {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ...}

    (e) {1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7 ...}

    (f) {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35 ...}

    Czy podane odpowiedzi są jednoznaczne, tzn. czy na podstawie skończonej liczby elementów można podać pozostałe?

16. Wyznacz poniższe zbiory, tzn. wypisz wszystkie elementy lub $\emptyset$

    (a) $\{n \in N : n^2 = 9\}$

    (b) $\{n \in Z : n^2 = 16\}$

    (c) $\{r \in Q : r^2 = 5\}$

    (d) Zbiór potęgowy zbioru $\{1, 2, 3\}$

    (e) Zbiór potęgowy zbioru potęgowego zbioru $\{a\}$

17. Wyznacz wszystkie pary nieuporządkowane liczb naturalnych, $\{\{n, m\} : n \in N, m \in N, 2(m + n) = mn\}$. Interpretacja geometryczna zadania: znajdź wszystkie prostokąty o długościach boków będących liczbami naturalnymi, dla których obwód równa się powierzchni.

18. Niech a, b i c oznaczają litery alfabetu. Które stwierdzenia są prawdziwe

    (a) $a \in \{a, b, c\}$

    (b) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

    (c) $a \subset \{a, b, c\}$

    (d) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

    (e) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

(f) $\emptyset \subset \{a, b, c\}$

(g) $\{\emptyset\} \subset \{a, b, c\}$

(h) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

19. Sprawdź, czy

    (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

    (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

    (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

    Zilustruj wynik z pomocą diagramów Eulera.

20. Wyznacz zbiory spełniające poniższe formy zdaniowe:

    (a) $p(x) : x + 2 = 0$

    (b) $p(x) : x^2 - 2 = 0$

    (c) $q(x) : x^2 + 2 > 0$

    (d) $s(x) : \frac{16-x^2}{x+4} = 0$

21. Zapisz z pomocą kwantyfikatorów (ew. wprowadź niezbędne oznaczenia, zbiory, itd.):

    (a) Dla każdej liczby naturalnej istnieje większa od niej liczba rzeczywista.

    (b) Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje większa od niej liczba naturalna.

    (c) Istnieje liczba naturalna większa od każdej liczby rzeczywistej.

    (d) Dla każdej liczby rzeczywistej różnej od 0 istnieje liczba odwrotna.

    (e) (Każdy) kot ma cztery nogi.

    (f) Każde dziecko ma matkę.

    (g) Nie każda kobieta jest matką.

    (h) Nieprawda, że istnieje największa liczba w zbiorze liczb rzeczywistych.

22. Oceń wartość logiczną zdań

    (a) $\forall x \in R : x^2 > 0$

    (b) $\forall x \in R\ \exists y \in R : y > x + 10$

    (c) $\forall x \in R\ \exists y \in R : y^2 = x$

23. Napisz negacje zdań

    (a) $\forall n \in N\ \forall m \in N\ \exists r \in R : r > m - n$

    (b) $\forall x \in X\ \exists y \in Y\ \forall z \in A : xy > z$

    (c) $\forall x \in A\ \exists y > 0\ \exists b > 1\ \forall z \in A : x/y > bz$

    (d) $\forall x \in \emptyset : f(x)$

24. Na podstawie pkt. (23d) pokaż, że każdy element zbioru pustego jest zielony, każdy element zbioru pustego jest czerwony, itd. Innymi słowy, “elementy zbioru pustego mają każdą cechę”. Przedyskutuj odpowiedź.