Analiza Matematyczna - FIZYKA

Akademia Świętokrzyska, 2005-2006

Wojciech Broniowski

Mini-kompendium rachunku tensorowego

Luźno mówiąc, **tensorem** jest obiekt ze **wskaźnikami** $i, j, k, \ldots \alpha, \beta, \ldots = 1, 2 \ldots n$, gdzie n jest wymiarem przestrzeni. W przestrzeniach nie kartezjańskich rozróżniamy wskaźniki górne i dolne, ale o tym kiedy indziej. Dla przestrzeni *kartezjańskich* nie musimy robić tego rozróżnienia i możemy pisać wskaźniki na tym samym poziomie. W szczególności wektor położenia zapisujemy jako x_i, dowolny wektor jako a_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$ oznacza poszczególne składowe przestrzenne. W zapisie macierzowym wektor piszemy w postaci kolumny, mamy więc następującą odpowiedniość do znanej Państwu notacji z wykładu algebry:

$$a_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Macierz $m \times n$ jest tensorem dwuwskaźnikowym, gdzie pierwszy wskaźnik numeruje wiersze a drugi kolumny,

$$M_{jk} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \ldots & M_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mnożenie tensorów (inaczej *zwężenie*) polega na sumowaniu po powtarzającym się wskaźniku, np. iloczyn macierzy i wektora to

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ji} a_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \ldots & M_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ponieważ suma zawsze odnosi się do powtarzającego się wskaźnika, możemy opuścić znak sumy. Nazywa się to **konwencją Einsteina o sumowaniu: każdy powtarzajacy się wskaźnik sumujemy**. Tak więc powyższe wyrażenie piszemy po prostu jako $M_{ji} a_i$. Wskaźnik, po którym sumujemy nazywa się **ślepym wskaźnikiem sumowania** i możemy go dowolnie oznaczać, np. $M_{jk} a_k$, $M_{jt} a_t$, itd. Wskaźnik j nie jest ślepy, tylko **zewnętrzny** i oznacza składową wektora, który powstaje w wyniku mnożenia wektora a przez macierz m. Iloczyn skalarny w tej notacji to

$$a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{4}$$

W ogólności będziemy mieć do czynienia z wyrażeniami typu

$$A_{ijk}B_{ism}C_{jm}. \tag{5}$$

W tym przykładzie wystepują sumowania po i, j i m, a k i s są wskaźnikami *zewnętrznymi*. Tensor jest **symetryczny** w parze wskaźników, jeśli

$$A_{\dots ij \dots} = A_{\dots ji \dots}, \tag{6}$$

a antysymetryczny, jeśli

$$A_{\dots ij \dots} = -A_{\dots ji \dots}. \tag{7}$$

Delta Kroneckera[1] to tensor dwuwskaźnikowy zdefiniowany jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

W notacji macierzowej δ_{ij} odpowiada po prostu *macierzy jednostkowej*

$$\delta_{ij} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Z definicji wynika natychmiast, że delta Kroneckera jest tensorem *symetrycznym*, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Zwężenie z dowolnym tensorem daje

$$\delta_{ij} A_{\dots j \dots} = A_{\dots i \dots}, \tag{10}$$

czyli następuje **"podmiana"** wskaźnika j na i. Dowód jest oczywisty:

$$\delta_{ij} A_{\dots j \dots} = \sum_j \delta_{ij} A_{\dots j \dots} = \sum_{j \neq i} \delta_{ij} A_{\dots j \dots} + \sum_{j=i} \delta_{ij} A_{\dots j \dots} = \sum_{j \neq i} 0 \cdot A_{\dots j \dots} + \sum_{j=i} 1 \cdot A_{\dots j \dots} = A_{\dots i \dots}. \tag{11}$$

Wreszcie

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n, \tag{12}$$

gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

Tensorem Levi-Civity[2] nazywamy tensor o trzech wskaźnikach (dla liczby wymiarów $n = 3$) zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\ \epsilon_{213} &= \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1, \\ \epsilon_{ijk} &= 0 \ \text{dla innych } i, j, k. \end{aligned} \tag{13}$$

[1] Leopold Kronecker (1823-1891), matematyk niemiecki.

[2] Tullio Levi-Civita (1873-1941), matematyk włoski, znany z prac dot. rachunku tensorowego i równań różniczkowych.

Tensor Levi-Civity jest całkowicie antysymetryczny, czyli jest antysymetryczny w każdej parze wskaźników:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}. \tag{14}$$

Ponadto, możemy cyklicznie permutować wskaźniki:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}. \tag{15}$$

Tensor Levi-Civity służy do przede wszystkim do eleganckiej, niezwykle wygodnej, definicji iloczynu wektorowego wektorów:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k. \tag{16}$$

Istotnie, inspekcja ukazuje znane wszystkim (mam nadzieję!) wzory

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \epsilon_{123} a_2 b_3 - \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Najważniejszym wzorem **do zapamiętania** jest wzór na kontrakcję dwóch tensorów Levi-Civity:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \tag{18}$$

Dowód można uzyskać przez podstawianie poszczególnych wartości wskaźników. Z powyższego wzoru wynika natychmiast, że kontrakcja po dwóch i trzech wskaźnikach daje

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} &= \delta_{jj} \delta_{km} - \delta_{jk} \delta_{jm} = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} &= 2\delta_{kk} = 6. \end{aligned} \tag{19}$$

Jeśli wskaźniki ułożone są w innej kolejności, to najpierw przestawiamy je z pomocą wzorów (15).

A teraz kilka zastosowań praktycznych, ukazujących siłę i prostototę notacji tensorowej w rachunkach algebraicznych. Policzmy podwójny iloczyn wektorowy $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Rozważamy jego składową i oraz korzystamy z podanych wyżej wzorów.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \epsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_i, \end{aligned} \tag{20}$$

czyli w zapisie wektorowym

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \tag{21}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned} \tag{22}$$

Na koniec coś z pochodnymi. Niech $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Mamy w oczywisty sposób

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}. \tag{23}$$

Gradient, dywergencja i rotacja zdefiniowane są jako

$$\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{a}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{a}. \tag{24}$$

Mamy więc

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j a_k = 0, \tag{25}$$

ponieważ symbol $\partial_i\partial_j$ jest symetryczny (pochodne mieszane są równe jeśli pierwsze pochodne są ciągłe), a zwężamy go z antysymetrycznym tensorem Levi-Civity. Oznacza to, że **dywergencja rotacji wynosi 0**. Podobnie

$$(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = 0, \tag{26}$$

czyli **rotacja gradientu wynosi zero**.