Zestaw 5: Granice funkcji, pochodne

1. Obliczyć granice funkcji

   a)$\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x^2+1}$

   b)$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-2}$

   c)$\lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1}$

   d)$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$, $n\in N$

   e)$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+5}$

   f)$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

   g)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (wynik do zapamiętania!)

   h)$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}$ (też ważny wynik!)

   i)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   j)$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}\,5x}$

   k)$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

   l)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   m)$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}\,5x}$

   n)$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

   o)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   p)$\lim_{x\to\infty}\mathrm{arctg}2x$

   q)$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}2x}{x}$

   r)$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

   s)$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$

   t)$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

   u)$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^20})^{x^20}$

2. Zbadać ciągłość funkcji określonych na zbiorze R:

   a) $f(x)=x-[x]$ ([.] oznacza część całkowitą, czyli największą liczbę całkowitą k spełniającą warunek $k\leq x$)

   b) $\arcsin(\sin x)$

   c) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$

   d) $f(x)=\begin{cases}|x|/x \text{ dla } x\neq 0\\ 1 \text{ dla } x=0\end{cases}$

3. Asymtoty funkcji w $\pm$ nieskończoności to linie o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, a $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax$. Jeśli $b = 0$ to asymptotę nazywamy *poziomą*, w przeciwnym razie jest ona *ukośna*. Znajdź asymptoty w $\pm\infty$ funkcji

   a) $f(x) = \frac{x^4}{x^3+x^2-2}$

   b) $f(x) = \mathrm{arctg} x$

   c) $f(x) = x^3/(x^2+1)$

   d) $f(x) = x^{29}/(x^{28}+1)$

4. Jaki wzór ma asymptota funkcji odwrotnej do danej funkcji $f(x)$ o dziedzinie i przeciwdziedzinie będącymi zbiorem R?

5. Dookreślić funkcję w punkcie nieokreśloności tak, aby powstała funkcja była ciągła:

   a) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

   b) $g(x) = \frac{\mathrm{tg}\, 2x}{\sin x}$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

6. * Czy istnieje granica

   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (Wskazówka: rozważ ciągi zmierzające z różnych kierunków do punktu $(0,0)$.)

7. Obliczyć pochodne funkcji

   a)$y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 7$

   b)$y = \frac{x^2+2}{x-1}$

   c)$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

   d)$y = \frac{x \sin x}{\cos x}$

   e)$y = \sin^2 x + \cos^2 x$

   f)$y = \mathrm{tg}(\cos^2 x)$

   g)$y = x^{x^x}$

   h)$y = 2^{x \sin x}$

   i)$y = \ln(\mathrm{arcctg}(2x^2))$

   j)$y = (\ln x)^x$

   k)x^{2^x}

   l)$\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

   m)$y = \frac{\mathrm{tg} 2x}{\mathrm{tg}\, 5x}$

   n)$y = \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

   o)$y = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   p)$y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

q)$y = \frac{\mathrm{arctg} 2x}{x}$

r)$y = \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

s)$y = (1-x)^{1/x}$

8. Obliczyć dy/dx, jeśli

   a) $x = ye^{-y}$

   b) $\sqrt{x} + y + \sqrt{y} = 1$

   c) $x = t^3$, $y = t^2$

   d) $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$

9. Obliczyć lewostronną i prawostronną pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$ w $x \to 0^+$, $x \to 0^-$.

10. Dla jakich wartości prametrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 \text{ dla } x < 0 \\ x + a\cos x \text{ dla } x \geq 0 \end{cases}$$

   jest różniczkowalna?

11. Znajdź równania stycznych do funcji f w punkcie x_0:

    a) $f(x) = x^2 + 2x + 7$, $x_0 = 2$

    b) $f(x) = x \cos x$, $x_0 = 0$

    c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

12. W jakich punktach i pod jakim kątem przecinają się krzywe

    a) $x^2 - y^2 = 4$, $3x^2 + 2y^2 = 14$

    b) $y - x^2 = 2$,$y = 2x + 7$

13. Obliczyć n-te pochodne funkcji

    a) $y = e^x \cos x$

    b) $y = x^3 \sin x$

    c) $y = \frac{1}{x}$

    d) $y = \ln x$

    e) $y = \sqrt{x}$