

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 5: Granice funkcji, pochodne

1. Obliczyć granice funkcji

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7-1}{x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x-1}, n \in \mathbb{N}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+5}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (wynik do zapamiętania!)

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ (też ważny wynik!)

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2x$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^{20}}\right)^{x^{20}}$

2. Zbadać ciągłość funkcji określonych na zbiorze \mathbb{R} :

a) $f(x) = x - [x]$ ($[.]$ oznacza część całkowitą, czyli największą liczbę całkowitą k spełniającą warunek $k \leq x$)

b) $\arcsin(\sin x)$

c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

d) $f(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

3. Asymptoty funkcji w \pm nieskończoności to linie o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, a $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$. Jeśli $b = 0$ to asymptotę nazywamy *poziomą*, w przeciwnym razie jest ona *ukośna*. Znajdź asymptoty w $\pm\infty$ funkcji
- $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + x^2 - 2}$
 - $f(x) = \operatorname{arctg} x$
 - $f(x) = x^3 / (x^2 + 1)$
 - $f(x) = x^{29} / (x^{28} + 1)$
4. Jaki wzór ma asymptota funkcji odwrotnej do danej funkcji $f(x)$ o dziedzinie i przeciwdziedzinie będącymi zbiorem R ?
5. Dookreślić funkcję w punkcie nieokreśloności tak, aby powstała funkcja była ciągła:
- $g(x) = \frac{\sin x}{x}$
 - $g(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
6. * Czy istnieje granica
- $$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
- (Wskazówka: rozważ ciągi zmiernające z różnych kierunków do punktu $(0, 0)$.)
7. Obliczyć pochodne funkcji
- $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 7$
 - $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$
 - $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
 - $y = \frac{x \sin x}{\cos x}$
 - $y = \sin^2 x + \cos^2 x$
 - $y = \operatorname{tg}(\cos^2 x)$
 - $y = x^{x^x}$
 - $y = 2^{x \sin x}$
 - $y = \ln(\operatorname{arctg}(2x^2))$
 - $y = (\ln x)^x$
 - $y = x^{2^x}$
 - $y = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}}$
 - $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$
 - $y = \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$
 - $y = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$
 - $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

$$\text{q)} y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$$

$$\text{r)} y = \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$\text{s)} y = (1-x)^{1/x}$$

8. Obliczyć dy/dx , jeśli

$$\text{a)} x = ye^{-y}$$

$$\text{b)} \sqrt{x} + y + \sqrt{y} = 1$$

$$\text{c)} x = t^3, y = t^2$$

$$\text{d)} x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$$

9. Obliczyć lewostronną i prawostronną pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$ w $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$.

10. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{dla } x < 0 \\ x + a \cos x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna?

11. Znajdź równania stycznych do funkcji f w punkcie x_0 :

$$\text{a)} f(x) = x^2 + 2x + 7, x_0 = 2$$

$$\text{b)} f(x) = x \cos x, x_0 = 0$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}$$

12. W jakich punktach i pod jakim kątem przecinają się krzywe

$$\text{a)} x^2 - y^2 = 4, 3x^2 + 2y^2 = 14$$

$$\text{b)} y - x^2 = 2, y = 2x + 7$$

13. Obliczyć n -te pochodne funkcji

$$\text{a)} y = e^x \cos x$$

$$\text{b)} y = x^3 \sin x$$

$$\text{c)} y = \frac{1}{x}$$

$$\text{d)} y = \ln x$$

$$\text{e)} y = \sqrt{x}$$