

Zestaw 7 (fizyka) / 6 (informatyka) : Granice funkcji

1. Obliczyć granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7-1}{x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x-1}, n \in \mathbb{N}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+5}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sin(\pi x/5)}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2x$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}$

2. Zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x) = x - [x]$ ([.] oznacza część całkowitą)

b) $f(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

3. Znajdź asymptoty funkcji

a) $f(x) = \frac{x^4}{x^3+x^2-2}$

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

c) $f(x) = x^3/(x^2+1)$

d) $f(x) = x^{29}/(x^{28}+1)$

4. Dookreślić funkcję w punkcie nieokreśloności tak, aby powstała funkcja była ciągła:

a) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

b) $g(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}, x \in [-\pi/2, \pi/2]$

5. * Czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(Wskazówka: rozważ ciągi zbieżające z różnych kierunków do punktu (0,0).)