

* oznacza zadania ciekawsze.

Zestaw 2: Funkcje

1. Przypomnij sobie wiadomości o wielomianach i funkcjach trygonometrycznych ze szkoły.
2. Przeciwbrazy. Udowodnij, że $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. [UWAGA: Zapis $f(Z)$ i $f^{-1}(Z')$, gdzie $Z \subset Df$ i $Z' \subset Df^{-1}$ są zbiorami, oznacza obraz i przeciwbraz tych zbiorów. Nie należy tego mylić z zapisem wartości funkcji, $f(x)$, gdzie x jest elementem dziedziny.]
3. * Wiemy, że obrazy spełniają własność $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Znajdź kontrprzykład dla stwierdzenia $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Wskazówka: próbuj funkcje niemonotoniczne.
4. Wyznacz $f([0, \frac{1}{2}])$ oraz $f^{-1}((0, \frac{\pi}{2}))$ dla $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \arcsin(x)$.
5. Podziel wielomiany $(x^4 + 3x^2 - 7) : (x^3 - 1)$.
6. Znajdź pierwiastki zespolone równania $x^2 + x + 1 = 0$.
7. Niech $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{x}$. Podaj wzory na złożenia $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$, $h \circ f \circ g$, $g \circ f \circ h$, $h \circ g \circ f$, oraz $f \circ h \circ g$.
8. Narysuj (tj. naszkicuj) wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $f(x + a) + b$ dla kilku wartości liczb a i b . Zapamiętaj regułę!
9. Narysuj wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $af(bx)$ dla kilku wartości liczb a i b . Opisz znaną regułę.
10. Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji $R \rightarrow R$
 - (a) $\sin(x + \frac{1}{x})$
 - (b) $\sqrt{\sin(\frac{1}{x})}$
 - (c) $\sin(\arcsin(x))$
 - (d) $\arcsin(\sin(x))$
 - (e) $\log \log(x + 1)$
 - (f) x^x

[UWAGA: $\log x = \ln x$ oznacza najczęściej w notacji fizyki logarytm naturalny. Tak też należy rozumieć ten zapis w zadaniach i wykładach. Logarytm dziesiętny będziemy pisać jako $\log_{10} x$.]

11. Pokaż, że funkcja $\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $x \in R$, oraz $ad \neq bc$, jest injekcją.
12. Znajdź przeciwbraz przedziału $[1/2, 2)$ względem funkcji sinus.

13. Znajdź funkcje odwrotne do

(a) $y = 1 - 2 \arccos \frac{x-1}{x+1}$ dla $x > 0$

(b) $y = 3^{x+2}$

(c) $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ dla $x \geq 1$

[UWAGA: Praktyka mówi, że trudności sprawia określenie dziedziny funkcji odwrotnej. Dziedzina ta jest po prostu obrazem dziedziny funkcji wyjściowej, tj. $Df^{-1} = f(Df)$. Pomocny jest tu szkic wykresu.]

14. Znajdź obraz zbioru liczb rzeczywistych w złożeniu funkcji arcsin o sin

15. Rozważ funkcję f zadaną wzorem $f(x + af^{-1}(x)) = x$ dla $x \in R$. Wyraż $f(x)$ w postaci “zwykłego” wzoru, podającego $f(x)$ jako wyrażenie zawierające jedynie x i a . Dla jakich a zadanie ma sens?

16. Pokaż, że $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Sprawdź na przykładzie.

17. Pokaż, że wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne względem osi $y = x$.

18. Narysuj wykres funkcji $3\cos(3x)$ dla $x \in [0, \pi/3]$, a następnie wykres funkcji odwrotnej.

19. Funkcje cyklotometryczne. Narysuj wykres funkcji

(a) $\arccos(\cos x)$

(b) $\arctg(\tg x)$

(c) $\cos(\arccos x)$

(d) $\tg(\arctg x)$

dla x należącego do dziedziny funkcji wewnętrznej.

20. Wyznacz dziedziny funkcji $R \times R \rightarrow R$:

(a) $f(x, y) = \log xy$

(b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(c) $z = \arccos \frac{y-1}{x+2}$

21. Naskicuj wykres funkcji (możesz sprawdzić kalkulatorem, ale chodzi o umiejętność narysowania “z głowy”)

(a) $y = x - 3$

(b) $y = |x - 3|$

(c) $y = ||x - 3| - 1|$

(d) $y = x^2 - 1$

(e) $y = |x^2 - 1|$

(f) $y = \log x$ (tj. $\ln x$)

(g) $y = |\log x|$

(h) $y = 2^{x-1}$

(i) $y = 2^{|x-1|}$

(j) $y = \sin |x|$

(k) $y = \sin(x^2)$

(l) $\sqrt{1-x^2}$

[UWAGA: to zadanie należy powtarzać w różnych wariantach tak długo, aż nie sprawia kłopotu.]