

* - zadania ciekawsze lub trudniejsze

Zestaw 1: Elementy logiki i teorii mnogości

1. Niech

- p = koty miauczą
- q = psy gryzą trawę
- r = niebo jest czerwone

Zapisz symbolicznie następujące zdania:

- (a) Koty miauczą i psy gryzą trawę.
- (b) Jeśli niebo jest czerwone, to psy gryzą trawę a koty miauczą.
- (c) Fakt, że psy gryzą trawę wynika z tego, że koty miauczą.
- (d) Niebo nie jest czerwone, a więc koty nie miauczą lub psy gryzą trawę.
- (e) Stwierdzenie, że koty miauczą, jest równoważne stwierdzeniu, że niebo jest czerwone.

2. Zapisz w języku polskim zdania

- (a) $(p \vee q) \Rightarrow r$
- (b) $\sim (\sim r)$
- (c) $(r \vee (\sim r)) \wedge p \wedge q$

gdzie p, q, r zdefiniowane są w punkcie 1.

3. Skonstruuj matryce logiczne dla zdań

- (a) $\sim p \Rightarrow q$
- (b) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- (c) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (d) $p \iff (p \wedge \sim q)$
- (e) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \iff (p \Rightarrow r)$

4. Alternatywa wykluczająca \oplus zdefiniowana jest jako

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Zbuduj matryce logiczne dla zdań $p \oplus p$, $(p \oplus p) \oplus p$, oraz $(p \oplus q) \oplus r$.

5. Zbuduj zdanie, które jest prawdziwe wtedy, gdy

- (a) dokładnie jedno z dwóch zdań p, q jest prawdziwe.
- (b) dokładnie jedno z trzech zdań p, q, r jest prawdziwe.
- (c) dokładnie dwa ze zdań p, q, r są prawdziwe.

6. Sprawdź, czy następujące zdania są tautologiami:

- (a) $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

- (b) $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
- (c) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- (d) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$
- (e) $(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$
- (f) $(p \iff q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- (g) $(p \Rightarrow q) \iff (\sim p \vee q)$
- (h) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$
- (i) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r))$

7. Określ koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy.

8. Rozważ zdanie “Kot nie przeżyje, jeśli nie będziesz go karmić”.

- (a) Napisz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję).
- (b) Napisz zdanie odwrotne.
- (c) Napisz zdanie odwrotne do zdania przeciwstawnego.
- (d) Które z powyższych zdań są prawdziwe?

9. Wiadomo, że jeśli Marek ma grypę, to Kasia też ma grypę, oraz nieprawdą jest, że jeśli Piotrek ma grypę, to Kasia ma grypę. Kto jest chory a kto zdrowy?

10. Pokaż, że $A = A \cup (A \cap B)$.

11. Pokaż, że dla liczb kardynalnych zachodzi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Uogólnij wynik dla trzech zbiorów.

12. Wypisz po kilka elementów poniższych zbiorów

- (a) $\{2^n : n \in N\}$ (N - zbiór liczb naturalnych)
- (b) $\{n^3 : n \in N\}$ (Z - zbiór liczb całkowitych)
- (c) $\{1/n : n \in P\}$ (P - zbiór liczb pierwszych)
- (d) $\{q^2 : q \in Q\}$ (Q - zbiór liczb wymiernych)
- (e) $\{\{a, b\} : a \in N, b \in R\}$

13. Odgadnij niewypisane elementy i opisz słowami poniższe zbiory:

- (a) $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
- (b) $\{2, 3, 5, 7, 11 \dots\}$
- (c) $\{1, 2, 4, 8, 16 \dots\}$
- (d) $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$
- (e) $\{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7 \dots\}$

Czy podane odpowiedzi są jednoznaczne, tzn. czy na podstawie skończonej liczby elementów można podać pozostałe?

14. Wyznacz poniższe zbiory, tzn. wypisz wszystkie elementy lub \emptyset

- (a) $\{n \in N : n^2 = 9\}$
- (b) $\{n \in Z : n^2 = 16\}$
- (c) $\{r \in Q : r^2 = 5\}$
- (d) Zbiór potęgowy zbioru $\{1, 2, 3\}$
- (e) Zbiór potęgowy zbioru potęgowego zbioru $\{a\}$

15. * Wyznacz wszystkie pary nieuporządkowane liczb naturalnych, $\{\{n, m\} : n \in N, m \in N, 2(m+n) = mn\}$. Interpretacja geometryczna zadania: znajdź wszystkie prostokąty o długościach boków będących liczbami naturalnymi, dla których obwód równa się powierzchni.
16. Które stwierdzenia są prawdziwe
- $a \in \{a, b, c\}$
 - $\{a\} \in \{a, b, c\}$
 - $a \subset \{a, b, c\}$
 - $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
17. Sprawdź, czy
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- Zilustruj wynik z pomocą diagramów Eulera.
18. Wyznacz zbiory spełniające poniższe formy zdaniowe:
- $p(x) : x + 2 = 0$
 - $p(x) : x^2 - 2 = 0$
 - $q(x) : x^2 + 2 > 0$
 - $s(x) : \frac{16-x^2}{x+4} = 0$
19. Zapisać z pomocą kwantyfikatorów:
- Dla każdej naturalnej liczby istnieje większa od niej liczba rzeczywista.
 - (Każdy) kot ma cztery nogi.
 - Każde dziecko ma matkę.
 - Nieprawda, że istnieje największa liczba w zbiorze liczb rzeczywistych.
 - * *Everybody loves somebody sometimes (każdy czasem kogoś kocha)*
20. Oceń wartość logiczną zdań
- $\forall x \in R : x^2 > 0$
 - $\forall x \in R \exists y \in R : y > x + 10$
21. Napisz negacje zdań
- $\forall n \in N \forall m \in N \exists r \in R : r > m - n$
 - $\forall x \in X \exists y \in Y \forall z \in A : xy > z$

Powtórzyć wiadomości z liceum o funkcjach elementarnych: wielomiany, funkcje wymierne, niewymierne, trygonometryczne, wykładnicze, logarytmy!