Analiza Matematyczna - FIZYKA
Akademia Świętokrzyska, 2005-2006
dr hab. prof. Wojciech Broniowski

* - zadania ciekawsze lub trudniejsze

Zestaw 5: Przestrzenie metryczne, ciagi liczbowe

1. Zbadać, która z poniższych funkcji jest metryką w R:
   (a) $(x-y)^2$
   (b) $|x^2-y^2|$
   (c) $\sqrt{|x-y|}$
   (d) $|2x-y|$
2. * Udowodnij, że przedstawione na wykładzie metryki "miejska", "wiejska" (lub "leśna") i "węzła kolejowego" rzeczywiście są metrykami w R^2. Wyraź te metryki wzorami zawierającymi współrzędne punktów. Narysuj w tych metrykach a) odcinki b) okręgi dla różnych przypadków położenia środka i wartości promienia.
3. Czy trzy liczby mogą jednocześnie tworzyć (skończony) ciąg arytmetyczny i geometryczny?
4. W kwadrat o boku a, wpisano koło, w koło wpisano kwadrat, w który wpisano koło, itd. Obliczyć sumę pól wszystkich wpisanych kół.
5. Wykazać, że jeżeli liczby a, b i c (dodatnie i różne od 1) tworzą skończony ciąg geometryczny, to liczby
$$\frac{1}{\log_a A}, \frac{1}{\log_b A}, \frac{1}{\log_c A}, (A>0, A\neq 1)$$
   tworzą skończony ciąg arytmetyczny.
6. Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, którego suma n pierwszych wyrazów jest równa n^2 dla wszystkich $n\in N$.
7. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne począwszy od pewnego miejsca
   (a) $a_n=\frac{n}{n+1}$
   (b) $a_n=\cos(\frac{1}{n})$
   (c) $a_n=\frac{1}{n}log(n)$
   (d) $a_n=\frac{2^n}{n!}$
   (e) * $a_n=(4^n+6^n)^{\frac{1}{n}}$
8. Zbadać ograniczoność ciągów
   (a) $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$
   (b) $a_n=\frac{n}{n+1}\sin(\frac{n\pi}{4})^2$
   (c) $a_n=(3^n+\sin(n))^{\frac{1}{n}}$
   (d) $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n}}$
9. Udowodnić na podstawie odpowiedniej definicji granicy ciągu, że
   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}$
   (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=3$

(d) $\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$
(e) $\lim_{n\to\infty}(1-n^2) = -\infty$
(f) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1-n^2}{\sqrt{n}+1}) = -\infty$
(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$
(h) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} = 1$
(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{sin(n)}{n} = 0$
(j) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n} = 0$
(k) $\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}} = 1$

10. Wykazać rozbieżność podanych ciągów

(a) $a_n = (-2)^n$
(b) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$
(c) * $a_n = \cos(\pi log_2 n)$

11. Korzystystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów (uwaga: sum w dwóch ostatnich puntach nie należy sumować)

(a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$
(b) $a_n = \frac{n^2}{5^n}$
(c) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$
(d) * $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$
(e) $a_n = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{3^n})$

12. Obliczyć granice podanych ciągów

(a) $a_n = \frac{2n^2-n}{5-n^2}$
(b) $a_n = \frac{n^2-2n+3}{2n^2-n+1}$
(c) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
(d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$
(e) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$
(f) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$
(g) $a_n = (1-\frac{4}{n})^{-n+3}$
(h) $a_n = (\frac{n^2+6}{n^2})^{n^2}$
(i) $a_n = (\frac{n^2+2}{2n^2+1})^{n^2}$
(j) $a_n = \frac{5*3^{2n}-1}{4*9^n+4}$
(k) $a_n = (3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$
(l) $a_n = (5^n+7^n+9^n)^{\frac{1}{n}}$
(m) $a_n = \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$
(n) $a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$
(o) $a_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_4(n+1)}$
(p) $a_n = \frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n+1)!+1}$
(q) $a_n = \frac{2^n 3^{2n}}{n!}$

13. Dany jest w sposób rekurencyjny ciąg $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$ dla $n \geq 1$. Pokazać zbieżność i obliczyć granicę.