Analiza Matematyczna - fizyka+informatyka, 2007/8

Przykładowy egzamin pisemny dla I roku po II semestrze

Użyteczne wzory:

Całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{1}$$

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad n \geq 2 \\
J_n &= \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}, \quad n \geq 2 \\
K_n &= \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}K_{n-2}, \quad n \geq 2
\end{aligned} \tag{2}$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną w zmiemmych u i v:

- $R(u,v) = -R(-u,v)$, $t = \cos x$
- $R(u,v) = -R(u,-v)$, $t = \sin x$
- $R(u,v) = R(-u,-v)$, $t = \mathrm{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \mathrm{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2+1)$.

Objętość i pole pobocznicy bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox, $x \in [x_1, x_2]$:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx$$

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Krzywizna krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + [f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

Współrzędne biegunowe: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dxdy = rdrd\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$
Współrzędne sferyczne: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $dxdydz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Uwaga: egzamin będzie gruntowny i dość długi, wymagający sprawności rachunkowej. Bardzo proszę kontynuować intensywne ćwiczenie zadań z wszystkich danych przeze mnie zestawów!

Przykładowe zadania:

1. Zadanie z badania funkcji jak w I semestrze.
2. Pod jakim kątem przecinają się elipsa $y^2+x^2/2=1$ i półprosta $y=x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)
3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\mathrm{tg}(x)/x$
4. Naszkicować (bez badania) wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1+x^2)$
5. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t \, \sin t$ (przez podstawienie)
6. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)
7. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$
8. Obliczyć całkę $\int_1^\infty dx \, e^{-2x}$
9. Obliczyć całkę $\int_0^\pi dx \, \frac{1}{\cos x - 1}$
10. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y=e^{-x}$, $x \in [0,1]$.
11. Znajdź pole całkowite (pobocznica plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y=1-x$, gdzie $x \in [0,1]$.
12. Znajdź długość paraboli $y=x^2/5+3$, $x \in [1,2]$
13. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $2x^2 dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1)=4$. Narysuj wykres rozwiązania.
14. Oblicz całkę podwójną
$$\int\int_A (xy^2+y+1) dxdy$$
po obszarze A będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$,$(0,1)$ i $(1,0)$.
15. Oblicz pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$
16. Wyraź pierwszą i druga pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ danej wzorem $3x+x^2+2y-\log y=0$ poprzez x i y. Czy funkcja $y(x)$ ma ekstremum?
17. Znajdź, jesli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2-2(y-1)^2+3$, $x,y \in R$. Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)
18. Znajdź minima funkcji $f(x,y,z)=(x-2)^2(1+y^2)+\sin^2 z$
19. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu

20. Z pomocą metody mnożników Lagrange'a znajdź minimum warunkowe funkcji $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2z^2$ pod warunkiem $x + y + 2z = 0$.

21. Wyznacz krzywiznę krzywej $y = ax^2 + bx^4$ w punkcie (0,0). Liczby a i b są parametrami