Przykładowy egzamin po II semestrze

Użyteczne wzory:

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad n \geq 2$$
$$J_n = \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}, \quad n \geq 2$$
$$K_n = \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}K_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną w zmiennych u i v:

- $R(u,v) = -R(-u,v)$, $t = \cos x$
- $R(u,v) = -R(u,-v)$, $t = \sin x$
- $R(u,v) = R(-u,-v)$, $t = \mathrm{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \mathrm{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2+1)$.

Objętość i pole pobocznicy bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox, $x \in [x_1, x_2]$:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx$$
$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

Krzywizna $1/\rho$ krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x_0)|}{(1+[f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

Współrzędne biegunowe: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dxdy = rdrd\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$
Współrzędne sferyczne: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $dxdydz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Uwaga: egzamin będzie gruntowny i długi, wymagający sprawności rachunkowej. Bardzo proszę kontynuować intensywne ćwiczenie zadań z wszystkich danych przeze mnie zestawów!

Przykładowe zadania:

1. Zadanie z badania funkcji jak w I semestrze.
2. Pod jakim kątem przecinają się elipsa $y^2+x^2/2=1$ i półprosta $y=x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)
3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\mathrm{tg}^2(x)/x^2$
4. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} x^{6/(1+\log x)}$
5. Naszkicować (bez badania) wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1+x^2)$
6. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t\, \sin t$ (przez podstawienie)
7. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)
8. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$
9. Obliczyć całkę $\int_1^\infty dx\, x^3 e^{-2x^2}$
10. Obliczyć całkę $\int_0^\pi dx\, \frac{1}{\cos x - 1}$
11. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y=e^{-x}$, $x\in[0,1]$.
12. Znajdź pole całkowite (pobocznica plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y=1-x^2$, gdzie $x\in[0,1]$.
13. Znajdź długość paraboli $y=x^2/5+3$, $x\in[1,2]$
14. Znajdź pole elipsy danej równaniem $y^2-xy+x^2\le 1$
15. Oblicz całkę podwójną
$$\int\int_A (xy^2+y+1)dxdy$$
po obszarze A będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$,0,2) i $(2,0)$.
16. Znajdź środek ciężkości i tensor bezwładności ćwiartki kuli $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$, $y\ge 0$. Zadanie najłatwiej rozwiązać z pomocą współrzędnych sferycznych.
17. Znajdź środek ciężkości i tensor bezwładności paraboloidy obrotowej $x^2+y^2\le z, 0\le z\le 1$.
18. Oblicz pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$
19. Wyraź pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ danej wzorem $3x+x^2+2y-\log y=0$ poprzez x i y. Czy funkcja $y(x)$ ma ekstremum?

20. Znajdź, jeśli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2 - 2(y-1)^2 + 3$, $x, y \in R$. Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)

21. Znajdź minima funkcji $f(x, y, z) = (x-2)^2(1+y^2) + \sin^2 z$

22. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu

23. Spośród prostopadłościanów o zadanej objętości V wyznacz ten o najmniejszej sumie długości krawędzi

24. Spośród stożków o zadanej objętości V wyznacz ten o najmniejszym polu powierzchni

25. Z pomocą metody mnożników Lagrange'a znajdź minimum warunkowe funkcji $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2z^2$ pod warunkiem $x + y + 2z = 0$.

26. Wyznacz krzywiznę krzywej $y = ax^2 + bx^4$ w punkcie (0,0). Liczby a i b są parametrami

27. Jaka jest najmniejsza odległość między prostymi danymi równaniami parametrycznymi $\vec{x} = (2t+1, 3t+2, -t)$ i $\vec{x} = (0, -u+1, 2u)$, gdzie $t, u \in R$?

28. Znajdź równanie parametryczne prostej będacej punktem przecięcia płaszczyzn $x + y - z = 1$ i $2x - y + 3z = 0$

29. Znajdź odległość punktu $(1, 1, 1)$ od płaszczyzny $x + 2y + 3z = 0$.

30. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $2x^2 dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1) = 4$. Narysuj wykres otrzymanej krzywej całkowej

31. Rozwiąż równanie liniowe niejednorodne, stosując np. metodę uzmienniania stałej: $y'(x) = y + x^2$

32. Rozwiąż równanie różniczkowe dla drgań wymuszonych w obwodzie RLC: $\frac{d^2}{dt^2}q(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{LC}q(t) = A\sin\omega t$ (funkcja $q(t)$ oznacza ładunek zgromadzony na kondensatorze w chwili t, a R, L, C, A, ω - stałe).

33. Rozwiąż równanie $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$