

Analiza Matematyczna 2010/2011 – Fizyka

Użyteczne wzory:

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \geq 2$$
$$J_n = \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2$$
$$K_n = \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u, v)$ jest funkcją wymierną w zmiennych u i v :

- $R(u, v) = -R(-u, v)$, $t = \cos x$
- $R(u, v) = -R(u, -v)$, $t = \sin x$
- $R(u, v) = R(-u, -v)$, $t = \operatorname{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2+1)$.

Objętość i pole pobocznic bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox , $x \in [x_1, x_2]$:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx$$
$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Współrzędne biegunowe: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $dxdy = r dr d\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Współrzędne sferyczne: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, $dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Uwaga: egzamin będzie gruntowny i długi (ale z rozsądnie mniejszą ilością zadań niż poniżej). Będzie wymagał dużej sprawności rachunkowej. Bardzo proszę kontynuować intensywne ćwiczenie zadań z wszystkich danych przeze mnie zestawów!

Przykładowe zadania:

1. Zadanie z badania funkcji - pełna procedura.
2. Pod jakim kątem przecinają się elipsa $y^2 + x^2/2 = 1$ i półprosta $y = x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)
3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\operatorname{tg}^2(x)/x^2$
4. Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 0} x^{6/(1+\log x)}$

5. Naszkicować (bez badania, tj. “z głowy”) wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1 + x^2)$
6. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t \sin t$ (przez podstawienie)
7. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)
8. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$
9. Obliczyć całkę $\int_1^\infty dx x^3 e^{-2x^2}$
10. Obliczyć całkę $\int_0^\pi dx \frac{1}{\cos x - 1}$
11. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y = e^{-2x}$, $x \in [0, 1]$.
12. Znajdź pole całkowite (pobocznica plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y = 1 - x^2$, gdzie $x \in [0, 1]$.
13. Znajdź długość paraboli $y = x^2/5 + 3$, $x \in [1, 2]$
14. Znajdź pole elipsy danej równaniem $y^2 + x^2/3 \leq 1$
15. Oblicz pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$
16. Wyraż pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ danej wzorem $3x + x^2 + 2y - \log y = 0$ poprzez x i y . Czy funkcja $y(x)$ ma ekstremum?
17. Znajdź, jeśli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2 - 2(y - 1)^2 + 3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)
18. Znajdź minima funkcji $f(x, y, z) = (x - 2)^2(1 + y^2) + \sin^2 z$
19. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu
20. Spośród prostopadłościanów o zadanej objętości V wyznacz ten o najmniejszej sumie długości krawędzi
21. Spośród stożków o zadanej objętości V wyznacz ten o najmniejszym polu powierzchni
22. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $2x^2 dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1) = 4$. Narysuj wykres otrzymanej krzywej całkowej