Przykładowy egzamin pisemny

Użyteczne wzory:

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad n \geq 2 \\
J_n &= \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}, \quad n \geq 2 \\
K_n &= \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}K_{n-2}, \quad n \geq 2
\end{aligned} \tag{1}
$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną w zmiemmych u i v:

- $R(u,v) = -R(-u,v)$, $t = \cos x$
- $R(u,v) = -R(u,-v)$, $t = \sin x$
- $R(u,v) = R(-u,-v)$, $t = \mathrm{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \mathrm{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2+1)$.

Objętość i pole pobocznicy bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox, $x \in [x_1, x_2]$:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx$$

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Krzywizna krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x_0)|}{(1+[f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

Współrzędne biegunowe: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dxdy = rdrd\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$
Współrzędne sferyczne: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $dxdydz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Zadania:

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią:

$$(\sim (p \Rightarrow q)) \Longleftrightarrow (p \wedge (\sim q))$$

2. Podaj wzór i dziedzinę funkcji *odwrotnej* do funkcji $g(x) = \sqrt{1-x}$, gdzie $x \in [-\infty, 1)$

3. Znajdź, jeśli istnieje, granicę ciągu przy $n \to \infty$, lub stwierdź, że ciąg jest roznbieżny:

   (a) $a_n = \frac{n^{30}+2n+2}{2n^{30}+1}$

   (b) $b_n = \sqrt{n^2+4n} - n$

   (c) $c_n = \frac{n!}{n!+1000n}$

   (d) $d_n = (-n)^n$

   (e) $e_n = \frac{n^n}{n^n+2n+\sqrt{n}}$

4. Korzystając z kryterium d'Alamberta zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n)!}$

5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4}{2^n}$

6. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = e^{\mathrm{tg}(1+x^2)}$

7. Korzystając ze wzoru Leibniza obliczyć n-tą pochodną funkcji $g(x) = x^3 e^x$

8. Pod jakim kątem przecinają sie elipsa $y^2 + x^2/2 = 1$ i półprosta $y = x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)

9. Zbadać i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2-1}$

10. Zbadać i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \exp(x)/x$

11. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\mathrm{tg}(x)/x$

12. Naszkicować (bez badania) wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1+x^2)$

13. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t \, \sin t$ (przez podstawienie)

14. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)

15. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$

16. Obliczyć całkę $\int_1^{\infty} dx \, x^3 e^{-2x}$

17. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$.

18. Znajdź pole całkowite (pobocznica plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y = 1 - x^2$, gdzie $x \in [0, 1]$.

19. Znajdź długość paraboli $y = x^2/3 + 1$, $x \in [0, 2]$

20. Znajdź pole elipsy danej równaniem $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$

21. Oblicz całkę podwójną

$$\int\int_A (xy^2 + y + 1) dxdy$$

po obszarze A będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$,$0, 1)$ i $(2, 0)$.

22. Oblicz pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = x^2y + sin(xy)$

23. Znajdź, jesli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2 - 2(y - 1)^2 + 3$, $x, y \in R$. Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)

24. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu

25. Wyznacz krzywiznę krzywej $y = ax^2 + bx^4$ w punkcie (0,0). Liczby a i b są parametrami

26. Rozwiąż równanie różniczkowe $2x^2dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1) = 4$. Narysuj wykres otrzymanej krzywej całkowej.

27. Rozwiąż równanie różniczkowe $y'' + 3y' + y = \sin(x)$, zakładając dowolny warunek początkowy.

28. Rozwiąż równanie różniczkowe dla drgań wymuszonych w obwodzie RLC: $\frac{d^2}{dt^2}q(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{LC}q(t) = A \sin \omega t$ (funkcja $q(t)$ oznacza ładunek zgromadzony na kondensatorze w chwili t, a R, L, C, A, ω - stałe).