

FIZYKA – Przykładowy egzamin końcowy

Użyteczne wzory:

Całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \quad (1)$$

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \geq 2 \\ J_n &= \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ K_n &= \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u, v)$ jest funkcją wymierną w zmiennych u i v :

- $R(u, v) = -R(-u, v)$, $t = \cos x$
- $R(u, v) = -R(u, -v)$, $t = \sin x$
- $R(u, v) = R(-u, -v)$, $t = \operatorname{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2 + 1)$.

Objętość i pole pobocznicy bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox , $x \in [x_1, x_2]$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \\ S &= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

Krzywizna krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + [f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

Współrzędne biegunowe: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $dx dy = r dr d\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Współrzędne sferyczne: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, $dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Uwaga: egzamin będzie gruntowny i dość długi, wymagający sprawności rachunkowej. Bardzo proszę kontynuować intensywnie ćwiczenie zadań!

Przykładowe zadania:

1. Pod jakim kątem przecinają się elipsa $y^2 + x^2/2 = 1$ i półprosta $y = x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)
2. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\operatorname{tg}(x)/x$
3. Naszkicować wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1 + x^2)$
4. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t \sin t$ (przez podstawienie)
5. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)
6. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$
7. Obliczyć całkę $\int_1^\infty dx e^{-2x}$
8. Obliczyć całkę $\int_0^\pi dx \frac{1}{\cos x - 1}$
9. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$.
10. Znajdź pole całkowite (pobocznicę plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y = 1 - x^2$, gdzie $x \in [0, 1]$.
11. Znajdź długość paraboli $y = x^2/3 + 1$, $x \in [0, 2]$
12. Znajdź obwód elipsy danej równaniem $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$
13. Oblicz całkę podwójną
$$\int \int_A (xy^2 + y + 1) dx dy$$
po obszarze A będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(2, 0)$.
14. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, $y \geq 0$. Zadanie najłatwiej rozwiązać z pomocą współrzędnych sferycznych.
15. Oblicz pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$
16. Wyraż pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ danej wzorem $3x + x^2 + 2y - \log y = 0$ poprzez x i y . Czy funkcja $y(x)$ ma ekstremum?
17. Znajdź, jeśli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2 - 2(y - 1)^2 + 3$, $x, y \in R$. Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)
18. Znajdź minima funkcji $f(x, y, z) = (x - 2)^2(1 + y^2) + \sin^2 z$
19. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu

20. Z pomocą metody mnożników Lagrange'a znajdź minimum warunkowe funkcji $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2z^2$ pod warunkiem $x + y + 2z = 0$.
21. Wyznacz krzywiznę krzywej $y = ax^2 + bx^4$ w punkcie $(0,0)$. Liczby a i b są parametrami
22. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $2x^2 dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1) = 4$. Narysuj wykres otrzymanej krzywej całkowej
23. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe niejednorodne, stosując np. metodę uzmienniania stałej: $y'(x) = 2y + x^2$