

INFORMATYKA – Przykładowy egzamin końcowy

Użyteczne wzory:

Całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \quad (1)$$

Wzory rekurencyjne dla częstych typów całek:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \geq 2 \\ J_n &= \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ K_n &= \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Podstawienia dla całek postaci $\int dx R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u, v)$ jest funkcją wymierną w zmiennych u i v :

- $R(u, v) = -R(-u, v)$, $t = \cos x$
- $R(u, v) = -R(u, -v)$, $t = \sin x$
- $R(u, v) = R(-u, -v)$, $t = \operatorname{tg} x$
- Podstawienie uniwersalne: $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Wtedy $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, oraz $2dt = dx(t^2 + 1)$.

Objętość i pole poboczniczy bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$ wokół osi Ox , $x \in [x_1, x_2]$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \\ S &= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

Krzywizna krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + [f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

Współrzędne biegunowe: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $dx dy = r dr d\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Współrzędne sferyczne: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, $dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Zadania:

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią:

$$(\sim (p \Rightarrow q)) \iff (p \wedge (\sim q))$$

2. Podaj wzór i dziedzinę funkcji *odwrotnej* do funkcji $g(x) = \sqrt{1-x}$, gdzie $x \in [-\infty, 1)$

3. Znajdź, jeśli istnieje, granicę ciągu przy $n \rightarrow \infty$, lub stwierz, że ciąg jest rozbieżny:

(a) $a_n = \frac{n^{30} + 2n + 2}{2n^{30} + 1}$

(b) $b_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$

(c) $c_n = \frac{n!}{n! + 1000n}$

(d) $d_n = (-n)^n$

(e) $e_n = \frac{n^n}{n^n + 2n + \sqrt{n}}$

4. Korzystając z kryterium d'Alamberta zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n)!}$

5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4}{2^n}$

6. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = e^{\operatorname{tg}(1+x^2)}$

7. Korzystając ze wzoru Leibniza obliczyć n -tą pochodną funkcji $g(x) = x^3 e^x$

8. Pod jakim kątem przecinają się elipsa $y^2 + x^2/2 = 1$ i półprosta $y = x$ zawarta w I ćwiartce układu współrzędnych? (wystarczy podać tangens tego kąta)

9. Zbadać i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2-1}$

10. Zbadać i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \exp(x)/x$

11. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę funkcji $\operatorname{tg}(x)/x$

12. Naszkicować wykresy funkcji $\log x$, $\log(x^2)$, oraz $\log(1+x^2)$

13. Obliczyć całkę $\int dt \cos^4 t \sin t$ (przez podstawienie)

14. Obliczyć całkę $\int dz \sqrt{z} \log z$ (przez części)

15. Obliczyć całkę $\int dx \frac{x+1}{x^2-2}$

16. Obliczyć całkę $\int_1^{\infty} dx e^{-2x}$

17. Znajdź objętość bryły obrotowej zadanej krzywą $y = e^{-x}$, $x \in [0, 1]$.

18. Znajdź pole całkowite (pobocznicę plus podstawy) bryły obrotowej zadanej krzywą $y = 1 - x^2$, gdzie $x \in [0, 1]$.

19. Znajdź długość paraboli $y = x^2/3 + 1$, $x \in [0, 2]$

20. Znajdź obwód elipsy danej równaniem $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$

21. Oblicz całkę podwójną

$$\int \int_A (xy^2 + y + 1) dx dy$$

po obszarze A będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(2, 0)$.

22. Oblicz pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$

23. Znajdź, jeśli istnieje, ekstremum lub punkt siodłowy funkcji $3x^2 - 2(y - 1)^2 + 3$, $x, y \in R$.
Określ, co to za punkt (minimum, maksimum, punkt siodłowy)

24. Spośród prostokątów o zadanym obwodzie L wyznacz boki tego o największym polu

25. Wyznacz krzywiznę krzywej $y = ax^2 + bx^4$ w punkcie $(0, 0)$. Liczby a i b są parametrami

26. Rozwiąż równanie różniczkowe $2x^2 dy/dx = \sqrt{y}$, zakładając warunek początkowy $y(1) = 4$.
Narysuj wykres otrzymanej krzywej całkowej.