

Matematyka Dyskretna

Przykładowy egzamin pisemny

Zadania te są uzupełnieniem / rozszerzeniem zadań, które otrzymali Państwo od p. dr. Kosztołowicza. Należy pisać porządnie i oczywiście każdą odpowiedź uzasadnić!

1. Rozwiąż z pomocą równania charakterystycznego lub innej metody rekurencję

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Sprawdź wynik poprzez wypisanie kilku pierwszych wyrazów.

2. Rozważ liczby trójkątne t_n , powstałe poprzez układanie koralików tak, jak na rys. 1. Wypisz kilka pierwszych wyrazów ciągu (t_n) . Napisz wzór rekurencyjny dla t_n . Rozwiąż tę rekurencję, zakładając ogólną postać $t_n = an^2 + bn + c$, gdzie a , b , c są liczbami, które można wyznaczyć podstawiając tę postać t_n do wzory rekurencyjnego i porównując współczynniki przy potęgach n .



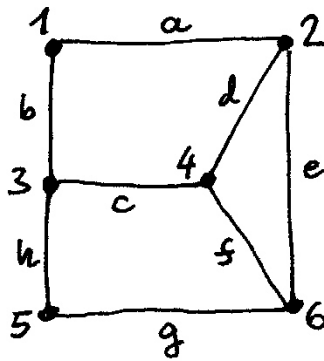
Rysunek 1:

3. (Zadanie rozrywkowe, nie na egzamin!) Dany jest ciąg o następujących wyrazach:

$$10, 11, 12, 13, 14, 20, 22, 101, \dots$$

Ciąg ten w naturalny sposób kończy się. Jakie są kolejne wyrazy tego ciągu?

4. Na ile sposobów S_n można usadzić n osób przy okrągłym stole, jeśli istotne jest tylko, kto jest sąsiadem, oraz nie jest istotne, czy danego sąsiada mamy po lewej czy po prawej stronie? Narysuj sytuacje dla $n = 1, 2, 3$. Wypisz kilka pierwszych liczb S_n .
5. Ile jest macierzy $n \times n$ o wyrazach 0,1, lub 2, w których co najmniej jeden wiersz ma same zera? Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania takiej macierzy, wszystkie liczby są generowane losowo z prawdopodobieństwem $1/3$?
6. W pierwszej sali pisze egzamin 16 studentów i 8 studentek, a drugiej sali 10 studentów i 6 studentek. Jedna osoba wyszła na korytarz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba ta pisała w pierwszej sali, jeśli jest to student? Zakładamy, że prawdopodobieństwo wyjścia jest takie samo, niezależnie od płci i sali.
7. Rozważ graf z rys. 2. Napisz odpowiadające mu: a) listy incydencji, b) macierz incydencji, c) macierz sąsiedztwa tego grafu. Czy ten graf jest eulerowski, półeulerowski, hamiltonowski, półhamiltonowski?



Rysunek 2:

8. Dane są listy incydencji grafu skierowanego

$$L = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline B & B & C \\ C & D & D \\ D & C & \end{array} \right), \quad (1)$$

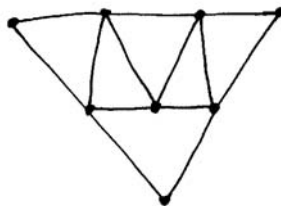
Narysuj ten graf.

9. Dana jest macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Narysuj ten graf.

10. Znajdź cykl Eulera dla grafu z rys. 3 (uwaga na nr. rysunku!)



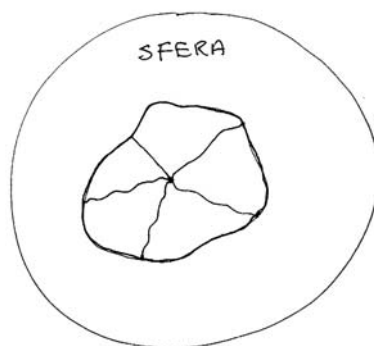
Rysunek 3:

11. Znajdź wszystkie cykle Hamiltona dla grafu z rys. 2 (uwaga na nr. rysunku!).

12. Przydziel następujące wagi krawędziom grafu z rys. 2:

$$w(a) = 2, w(b) = w(c) = w(d) = w(g) = 1, w(e) = w(f) = 3, w(h) = 6.$$

- a) Stosując algorytm Jarnika (Prima) znajdź minimalne drzewo spinające grafu. Przedstaw graficznie lub opisowo kolejne kroki. Jaka jest waga tego drzewa? Czy drzewo jest wyznaczone jednoznacznie? b) Powtórz punkt a) stosując algorytm Kruskala.
13. Stosując algorytm Dijkstry, znajdź w grafie z rys. 2 z wagami z pkt. 12 najkrótszą drogę od wierzchołka 1 do wierzchołka 5. Jaka jest waga tej drogi? Czy droga jest wyznaczona jednoznacznie?
14. Do trzech budowanych domów należy doprowadzić ziemią linię zasilania prądem, wodą i gazem. Czy można to zrobić bez krzyżowania wykopów? Podaj uzasadnienie w oparciu o teorię grafów planarnych.
15. Jaka jest liczba chromatyczna χ grafu z rys. 2? Odpowiedź uzasadnij. Podaj przykład kolorowania przy użyciu χ kolorów.
16. Rozważ mapę z rys. 4, narysowaną na sferze. Narysuj graf dualny. Ile kolorów wystarcza, aby pokolorować tę mapę? Zrób przykład kolorowania z tą liczbą kolorów.



Rysunek 4:

17. Narysuj mapę o pięciu obszarach na sferze, która jest dwuchromatyczna i w której każde państwo sąsiaduje co najmniej z dwoma innymi.
18. Grafem regularnym nazywamy graf prosty o n wierzchołkach, w którym stopień każdego wierzchołka wynosi s . Narysuj graf regularny o $n = 6$ i $s = 3$. Ile jest typów takich grafów? (W danym typie utożsamiamy grafy izomorficzne).
19. Rozważ wyrażenie $(a - b)/3 + 2 * (c + d)$. Przedstaw je w postaci drzewa z wyróżnionym korzeniem. Następnie przepisuj wyrażenie w postaci prefiksowej i postfiksowej.
20. Dane jest wyrażenie w postaci notacji polskiej: $** -x32/ + z21$. Narysuj odpowiadające drzewo z wyróżnionym korzeniem. Następnie przepisuj wyrażenie w postaci infiksowej oraz postfiksowej.