IMIĘ I NAZWISKO Analiza Matematyczna - Fizyka i Informatyka

Zestaw 14 - fizyka / 12 - informatyka (termin oddania - 23 V)

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całki krzywoliniowe zorientowane

   (a) $I_1 = \int_C xdx + (1+y)dy$, gdzie C jest krzywą biegnącą wzdłuż prostej od punktu $(0,0)$ do punktu $(1,1)$.

   (b) $I_2 = \int_K y^2dx + x^2dy$, gdzie K jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = b\cos t$, oraz $t \in [0,\pi]$.

   (c) $I_3 = \int_L -ydx + xdy - 2ydz$, gdzie L jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = bt$, oraz $t \in [0, 2\pi]$.

   (d) $I_4 = \int_P x^2dx + \sqrt{xy}dy$, gdzie P jest ćwiartką okręgu od punktu $(0,r)$ do punktu $(R,0)$, przebieganą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

   (e) $I_5 = \int_S (2y - xy)dx + (x - x^2y^2)$, gdzie S jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $(0,0)$ do punktu (a,a^2).

2. Oblicz całki krzywoliniowe niezorientowane

   (a) $J_1 = \int_L xyds$, gdzie L jest krzywą o równaniu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0,2\pi]$, a $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ jest różniczką długości.

   (b) $J_2 = \int_C ds$, gdzie L jest linią śrubową $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \lambda t$, $t \in [0,2\pi]$.

   (c) $J_3 = \int_A x^2y$, gdzie A jest łukiem elipsy leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

3. Z pomocą wzoru Greena oblicz całkę

$$\oint_K (x+y)^2dx - (x^2+y^2)dy,$$

   gdzie K jest dodatnio zorientowanym konturem będącym brzegiem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$,0,1) i $(1,0)$.

4. Sprawdź (z pomocą tw. o całce różniczki zupełnej), że całka

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} x^2dx + (y^2+2)dy$$

   nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz.

5. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2 - 5yz)dx + (y^3 - 5xz)dy + (z^3 - 5xy)dz$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz.

6. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_S x^2 + y^2 dS,$$

gdzie S jest półsferą $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

7. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

8. Korzystając ze wzoru Gaussa oblicz całkę

$$\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

9. Korzystając ze wzoru Gaussa oblicz całkę

$$\int_S (x-y)dydz + (y-z)dxdz + (z-x)dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną stożka $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$.

10. Korzystając ze wzoru Stokesa zamień całkę

$$\oint_L x^2y^2dxdz + dydz + zdz,$$

gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, na całkę po zewnętrznej stronie półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

11. (**tylko fiz.**) Korzystając ze wzoru Stokesa oblicz pracę W wykonaną przez siłę $\vec{F} = (x+z, x-y+2z, y-x)$ po drodze zamkniętej biegnącej wokół trójkąta $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ (pamiętamy, że $dW = F_1dx + F_2dy + F_3dz$).