Zestaw 3: Przestrzenie metryczne, ciągi liczbowe

1. Zbadać, która z poniższych funkcji jest metryką w R:

   (a) $(x-y)^2$

   (b) $|x^2-y^2|$

   (c) $\sqrt{|x-y|}$

   (d) $|2x-y|$

2. * Udowodnij, że przedstawione na wykładzie metryki "miejska", "wiejska" (lub "leśna") i "węzła kolejowego" rzeczywiście są metrykami w R^2. Wyraź te metryki wzorami zawierającymi współrzędne punktów. Narysuj w tych metrykach a) odcinki b) okręgi dla różnych przypadków położenia środka i wartości promienia.

3. Rozważ zbiór M={ Warszawa, Kraków, Wrocław, Gdańsk } oraz ceny biletów połączeń lotniczych zadanych tabelką

	Warszawa	Kraków	Wrocław	Gdańsk
Warszawa	0	200	180	170
Kraków	200	0	220	380
Wrocław	180	220	0	310
Gdańsk	170	380	310	0

   Czy M z podanymi cenami biletów tworzy przestrzeń metryczną?

4. Czy trzy liczby mogą jednocześnie tworzyć (skończony) ciąg arytmetyczny i geometryczny?

5. W kwadrat o boku a, wpisano koło, w koło wpisano kwadrat, w który wpisano koło, itd. Obliczyć sumę pól wszystkich wpisanych kół.

6. Wykazać, że jeżeli liczby a, b i c (dodatnie i różne od 1) tworzą skończony ciąg geometryczny, to liczby

$$\frac{1}{\log_a A}, \frac{1}{\log_b A}, \frac{1}{\log_c A}, (A>0, A\neq 1)$$

   tworzą skończony ciąg arytmetyczny.

7. Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, którego suma n pierwszych wyrazów jest równa n^2 dla wszystkich $n \in N$.

8. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne począwszy od pewnego n

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(b) $a_n = \cos(\frac{1}{n})$

(c) $a_n = \frac{1}{n}\log(n)$

(d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

(e) * $a_n = (4^n + 6^n)^{\frac{1}{n}}$

9. Zbadać ograniczoność ciągów

(a) $a_n = \frac{3^n}{3^n+2}$

(b) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin(\frac{n\pi}{4})^2$

(c) $a_n = (3^n + \sin(n))^{\frac{1}{n}}$

(d) $a_n = (-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n}}$

10. Udowodnić na podstawie definicji granicy ciągu, że

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1} = 3$

(d) $\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$

(e) $\lim_{n\to\infty}(1-n^2) = -\infty$

(f) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1-n^2}{\sqrt{n+1}}) = -\infty$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$

(h) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} = 1$

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{sin(n)}{n} = 0$

(j) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

(k) $\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}} = 1$

11. Wykazać rozbieżność podanych ciągów

(a) $a_n = (-2)^n$

(b) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

(c) * $a_n = \cos(\pi\log_2 n)$ [Wskazówka: rozważ pewien podciąg]

12. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów (uwaga: sum w punkcie (c) i (e) nie należy sumować)

(a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

(b) $a_n = \frac{n^2}{5^n}$

(c) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$

(d) * $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

(e) $a_n = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{3^n})$

13. Obliczyć granice podanych ciągów

(a) $a_n = \frac{2n^2-n}{5-n^2}$

(b) $a_n = \frac{n^2-2n+3}{2n^2-n+1}$

(c) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

(e) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$

(f) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$

(g) $a_n = (1-\frac{4}{n})^{-n+3}$

(h) $a_n = (\frac{n^2+6}{n^2})^{n^2}$

(i) $a_n = (\frac{n^2+2}{2n^2+1})^{n^2}$

(j) $a_n = \frac{5*3^{2n}-1}{4*9^n+4}$

(k) $a_n = (3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

(l) $a_n = (5^n+7^n+9^n)^{\frac{1}{n}}$

(m) $a_n = \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$

(n) $a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$

(o) $a_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_4(n+1)}$

(p) $a_n = \frac{(n^2+1)(2n-1)!}{(2n+1)!+1}$

(q) $a_n = \frac{2^n 3^{2n}}{n!}$

14. Dany jest w sposób rekurencyjny ciąg $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$ dla $n \geq 1$. Pokazać zbieżność i obliczyć granicę.