

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 3: Przestrzenie metryczne, ciągi liczbowe

1. Zbadać, która z poniższych funkcji jest metryką w R :

(a) $(x - y)^2$

(b) $|x^2 - y^2|$

(c) $\sqrt{|x - y|}$

(d) $|2x - y|$

2. * Udowodnij, że przedstawione na wykładzie metryki “miejska”, “wiejska” (lub “leśna”) i “węzła kolejowego” rzeczywiście są metrykami w R^2 . Wyraź te metryki wzorami zawierającymi współrzędne punktów. Narysuj w tych metrykach a) odcinki b) okręgi dla różnych przypadków położenia środka i wartości promienia.

3. Rozważ zbiór $M = \{ \text{Warszawa, Kraków, Wrocław, Gdańsk} \}$ oraz ceny biletów połączeń lotniczych zadanych tabelką

	Warszawa	Kraków	Wrocław	Gdańsk
Warszawa	0	200	180	170
Kraków	200	0	220	380
Wrocław	180	220	0	310
Gdańsk	170	380	310	0

Czy M z podanymi cenami biletów tworzy przestrzeń metryczną?

4. Czy trzy liczby mogą jednocześnie tworzyć (skończony) ciąg arytmetyczny i geometryczny?

5. W kwadrat o boku a , wpisano koło, w koło wpisano kwadrat, w który wpisano koło, itd. Obliczyć sumę pól wszystkich wpisanych kół.

6. Wykazać, że jeżeli liczby a , b i c (dodatnie i różne od 1) tworzą skończony ciąg geometryczny, to liczby

$$\frac{1}{\log_a A}, \frac{1}{\log_b A}, \frac{1}{\log_c A}, (A > 0, A \neq 1)$$

tworzą skończony ciąg arytmetyczny.

7. Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, którego suma n pierwszych wyrazów jest równa n^2 dla wszystkich $n \in N$.

8. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne począwszy od pewnego n

- (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$
- (b) $a_n = \cos(\frac{1}{n})$
- (c) $a_n = \frac{1}{n} \log(n)$
- (d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- (e) * $a_n = (4^n + 6^n)^{\frac{1}{n}}$

9. Zbadać ograniczoność ciągów

- (a) $a_n = \frac{3^n}{3^{n+2}}$
- (b) $a_n = \frac{n}{n+1} \sin(\frac{n\pi}{4})^2$
- (c) $a_n = (3^n + \sin(n))^{\frac{1}{n}}$
- (d) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

10. Udowodnić na podstawie definicji granicy ciągu, że

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+1} = 3$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = +\infty$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^2) = -\infty$
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-n^2}{\sqrt{n+1}}) = -\infty$
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} = 1$
- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$
- (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$
- (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$

11. Wykazać rozbieżność podanych ciągów

- (a) $a_n = (-2)^n$
- (b) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$
- (c) * $a_n = \cos(\pi \log_2 n)$

12. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów (uwaga: sum w dwóch ostatnich punktach nie należy sumować)

- (a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- (b) $a_n = \frac{n^2}{5^n}$
- (c) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$

$$(d) \quad * a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(e) \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

13. Obliczyć granice podanych ciągów

$$(a) \quad a_n = \frac{2n^2 - n}{5 - n^2}$$

$$(b) \quad a_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 - n + 1}$$

$$(c) \quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$(d) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$(e) \quad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$(f) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$(g) \quad a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$$

$$(h) \quad a_n = \left(\frac{n^2 + 6}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$(i) \quad a_n = \left(\frac{n^2 + 2}{2n^2 + 1}\right)^{n^2}$$

$$(j) \quad a_n = \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 4}$$

$$(k) \quad a_n = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(l) \quad a_n = (5^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(m) \quad a_n = \frac{(n^2 + 1)n! + 1}{(2n + 1)(n + 1)!}$$

$$(n) \quad a_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$$

$$(o) \quad a_n = \frac{\log_2(n + 1)}{\log_4(n + 1)}$$

$$(p) \quad a_n = \frac{(n^2 + 1)(2n - 1)!}{(2n + 1)! + 1}$$

$$(q) \quad a_n = \frac{2^n 3^{2n}}{n!}$$

14. Dany jest w sposób rekurencyjny ciąg $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$ dla $n \geq 1$. Pokazać zbieżność i obliczyć granicę.