Zestaw 8: Całka Riemanna

1. Oblicz z definicji (tak, jak w przykładzie rozwiazanym na wykładzie, czyli poprzez dzielenie na paski i przejście graniczne) całkę oznaczoną $\int_0^1 x^2 dx$.

2. Znajdź pole między osią x a wykresem funkcji: a) $y = -x^2 + 1$, b) $\sin x$, $x \in [0, \pi]$, c) $\sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.

3. Znajdź pole elipsy danej wzorem $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$.

4. Znajdź pole między wykresem funkcji $f(x) = 1/2$ i $g(x) = \cos x$, $x \in [-\pi/3, \pi/3]$.

5. Znajdź objętość i pole pobocznicy następujacych **brył obrotowych**: a) walec, b) elipsoida (tylko objetość), c) stożek, d) stożek ścięty.

6. Znajdź objętość i pole pobocznicy następujacych brył powstałych w wyniku obrotu wokół osi x funkcji a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, b) $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, c) $h(x) = \exp(-x)$, $x \in [0, \infty]$.

7. Oblicz długość paraboli między wierzchołkiem a jej dowolnym innym punktem.

8. Oblicz całkę $\int_0^1 x^4 e^{-ax} dx$ z pomocą metody różniczkowania pod całką.

9. Rozważ $I_n = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$, $n \in N$. Policz I_0. Następnie pokaż z pomoca całkowania przez części, że $I_{n+1} = nI_n$. Podaj wzór ogólny na I_n.

10. Zbadaj, przy pomocy kryterium całkowego, zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty 1/(n\log^p n)$.