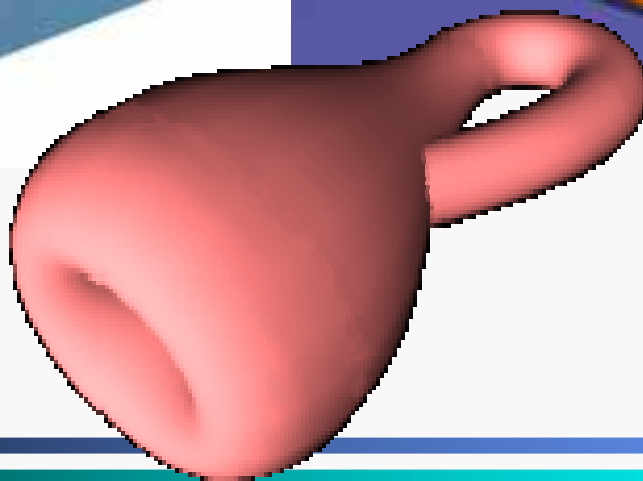
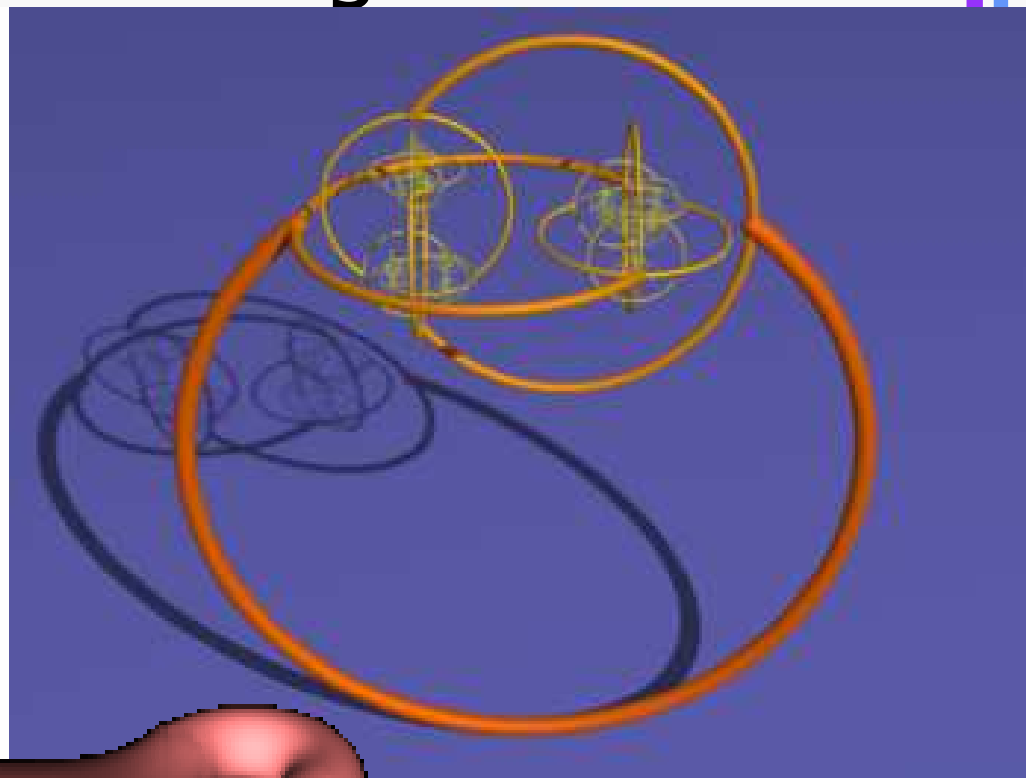
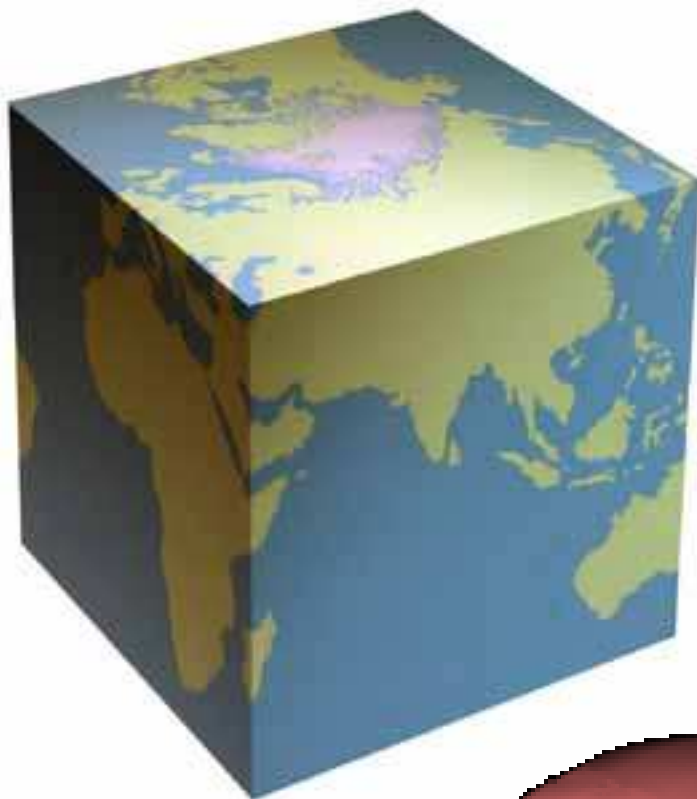


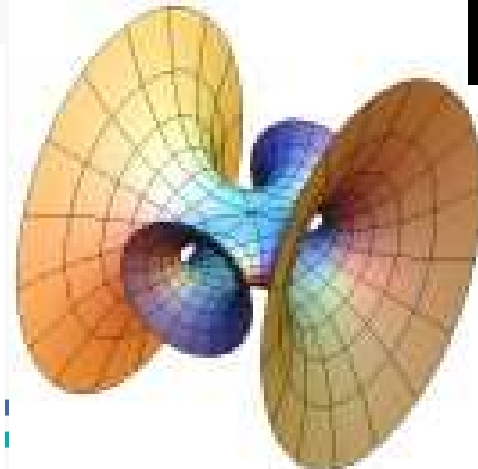
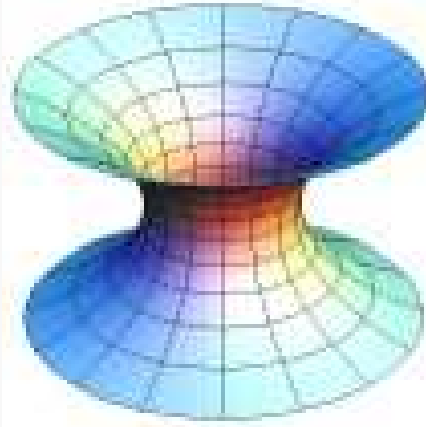
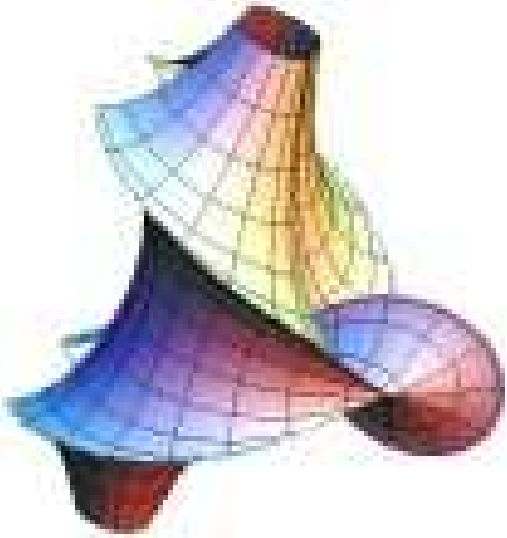
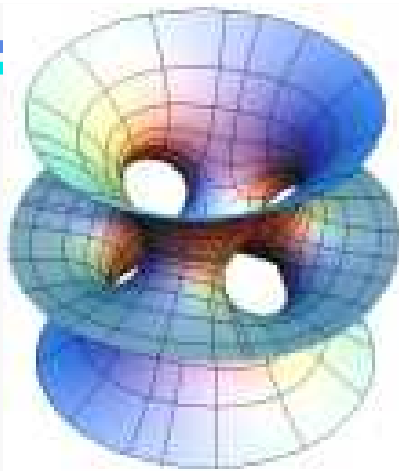
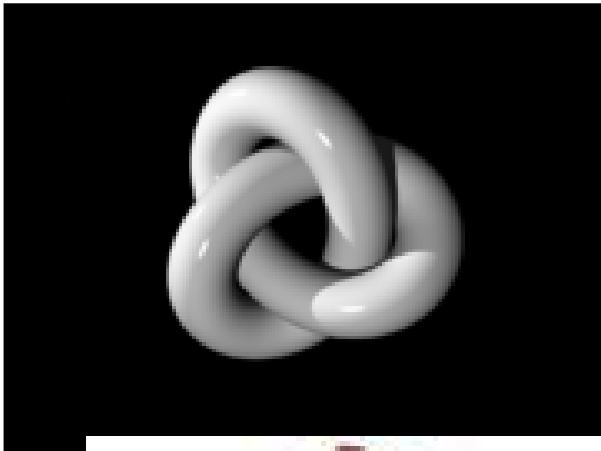
[wersja z 5 X 2010]

Analiza Matematyczna 3

Konspekt wykładu dla studentów II r. fizyki
Uniwersytet Jana Kochanowskiego 2010/2011
Wojciech Broniowski

Powierzchnie kawałkami gładkie





Całki wielowymiarowe (powtórka)

Uogólnienie całki Riemanna:

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Dokonyjemy podziału prostokąta

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in P_i\}, M_i = \sup\{f(x) : x \in P_i\}$$

$$s = m_1 |P_1| + \dots + m_k |P_k|, S = M_1 |P_1| + \dots + M_k |P_k|$$

Rozważamy normalny ($\delta_n \rightarrow 0$) ciąg podziałów

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \text{całka dolna}, S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \text{całka górna funkcji } f \text{ na prostokącie } P$$

Jeżeli $s^* = S^*$ to wielkość tę nazywamy wielokrotną całką Riemanna

$$\text{Notacja: } \iint_P dx dy f(x, y), \iiint_P dx dy dz g(x, y, z)$$

Całka iterowana

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y) \right), \int_{a_1}^{b_1} dx \left(\int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y) \right) - \text{całki iterowane}$$

Tw. Fubiniego: Jeżeli $f : P \rightarrow R$ jest ciągła, to obie całki iterowane są równe całce Riemanna $\iint_P dx dy f(x, y)$.

(analogicznie dla większej liczby wymiarów)

Przykład: $P = [0, 1] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_P dx dy (x^2 y + 2) &= \int_0^1 dx \left(\int_0^2 dy (x^2 y + 2) \right) = \int_0^1 dx \left(\frac{x^2 y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{y=0}^2 = \int_0^1 dx (2x^2 + 4) = \frac{2}{3} + 4 \\ &= \int_0^2 dy \left(\int_0^1 dx (x^2 y + 2) \right) = \int_0^2 dy \left(\frac{x^3 y}{3} + 2x \right) \Big|_{x=0}^1 = \int_0^2 dx \left(\frac{y}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} + 4 \end{aligned}$$

Całki po dowolnym obszarze

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \in P \setminus A \end{cases}$$

$$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ – zbiór normalny względem O_x

Tw. Jeżeli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna, oraz

$$\iint_A dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$$

Przykład:

$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ – trójkąt

$$\iint_A dx dy xy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy = \int_0^1 dx \frac{1}{2} (1-x)^2 x = \frac{1}{24}$$

Zastosowania całek wielokrotnych

$$V = \iiint_A dx dy dz$$

$$A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$x, y - \text{ustalone} \Rightarrow z \leq 1 - x - y$$

x – ustalone, szukamy największego możliwego y : $y \leq 1 - x - z$,

ponieważ najmniejsze $z = 0 \Rightarrow y \leq 1 - x$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \int_0^1 dx \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

Jest to tzw. objętość sympleksu. W n wymiarach $V = \frac{1}{n!}$

Środek ciężkości

$$\bar{x} = \frac{1}{|A|} \iint_A x \, dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy - \text{figura 2-wym.}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|V|} \iiint_V x \, dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{|V|} \iiint_V z \, dx dy dz - \text{bryła}$$

Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu

regularnego zbioru A wokół Ox : $|V| = 2\pi \iint_A y \, dx dy$

Reguły Guldina: $|V| = 2\pi\eta |A|$, $\eta = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy$,

Dla torusa $|V| = 2\pi a \pi r^2$

Podobnie dla powierzchni powstałej w wyniku obrotu łuku mamy

$|S| = 2\pi\xi |L|$, $\xi = \frac{1}{|L|} \int_{\alpha}^{\beta} y dt$ - odległość środka ciężkości łuku od osi obrotu

Dla torusa $|S| = 2\pi a 2\pi r$



Pole powierzchni

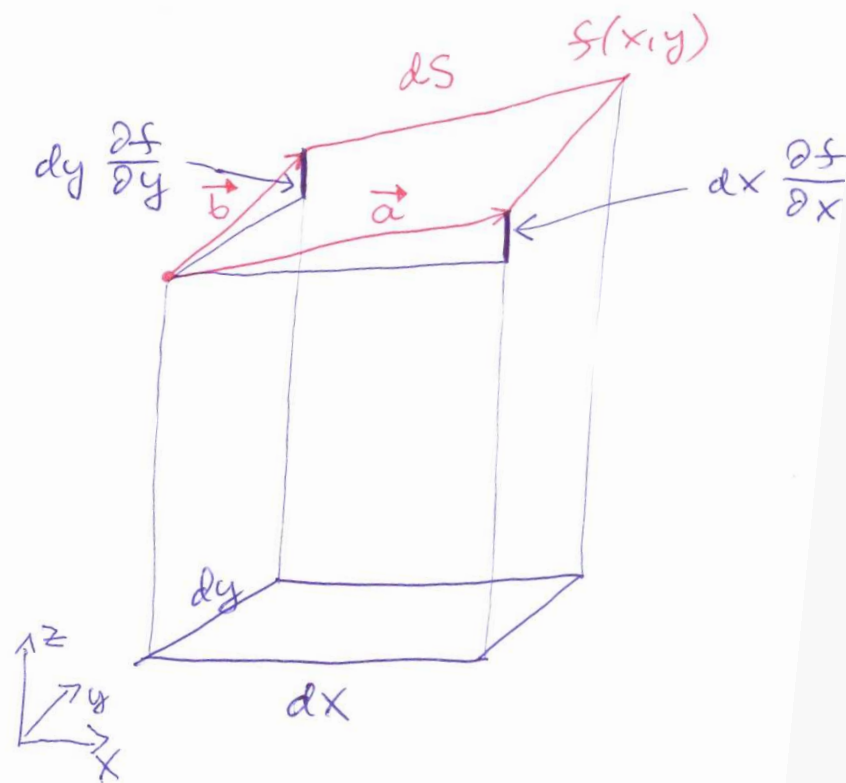
Pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{a} i \vec{b} wynosi $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Z rysunku wynika, że

$\vec{a} = (dx, 0, f_x dx)$, $\vec{b} = (0, dy, f_y dy)$, zatem

$$S = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix}$$

$$= \left| -\hat{i} f_x dx dy - \hat{j} f_y dx dy + \hat{k} dx dy \right|$$

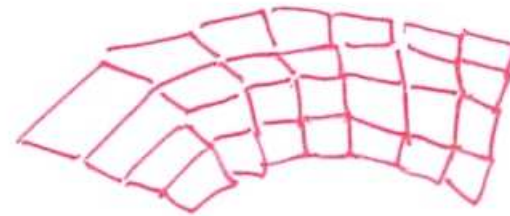
$$= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$



$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Wzór wynika z konstrukcji przybliżając
infinitesimalnymi równoległobokami



Przykład:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

$$A = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zamiana zmiennych - dyfeomorfizm

Pamiętamy, że dla jednej zmiennej $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y) = \int_a^b dx f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $y = \varphi(x)$

Tw. bijekcja $\varphi: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^1 , φ i φ^{-1} ciągłe

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \quad \text{jakobian przekształcenia } \varphi$$

Wtedy

(Dowód: RR)

$$\int_Y \dots \int f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n =$$

$$\int_X \dots \int f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) |J(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n, \quad y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

Podstawowe układy współrzędnych

Współrzędne biegunowe (osiowe)

$$\Phi : R^2 \rightarrow R^2$$

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix}, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

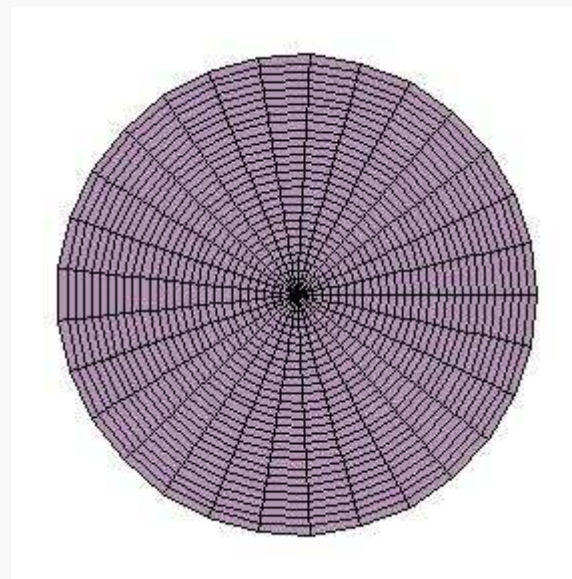
$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\Phi'(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

$$\int dx dy f(x, y) = \int r dr d\phi f(x(r, \phi), y(r, \phi))$$

Homeomorfizm regularny dla $r \neq 0$, rząd $\Phi' = 2$. Dla $r = 0$ jest osobliwość, bo w tym punkcie nie można określić kąta



Przykłady:

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{r^2 \leq R^2} \frac{rdrd\phi}{r} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi = R2\pi$$

$$I_R = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{r^2 \leq R^2} e^{-r^2} rdrd\phi = 2\pi \int_0^R r dr e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^R = \pi - \pi e^{-R^2}$$

$$I_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi$$

$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

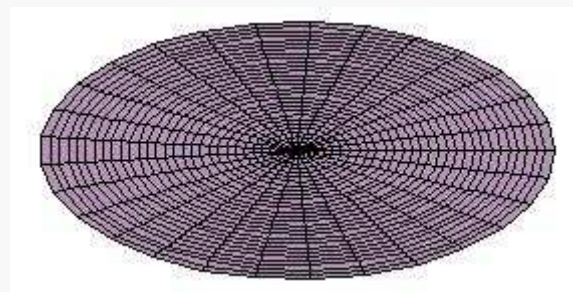
Całka Gaussa

Współrzędne eliptyczne

$$x = ar \cos \phi$$

$$y = br \sin \phi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad J = abr$$



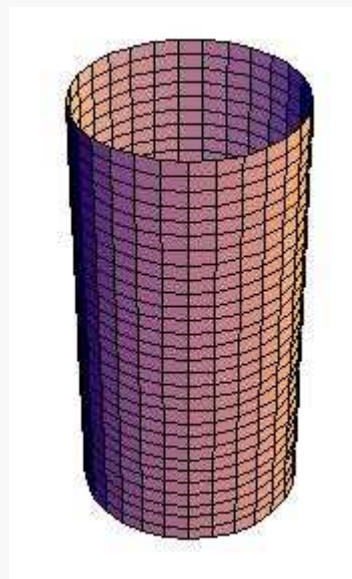
Współrzędne walcowe (cylindryczne)

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

$$J = r$$



Liniowa zmiana skali

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

$$J = abc$$

Współrzędna sferyczne (kuliste)

$$\Phi : R^3 \rightarrow R^3$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$\theta \in [0, \pi]$ - kąt osiowy (szerokość geogr.),

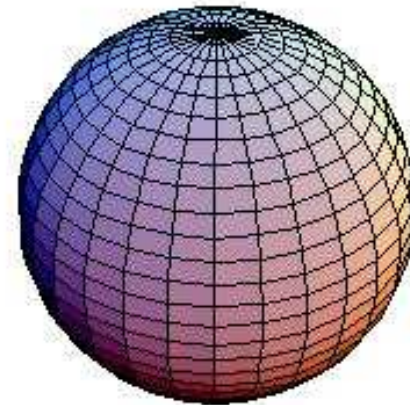
$\phi \in [0, 2\pi)$ - kąt biegunowy (azymutalny, długość geogr.)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$r = 0 \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 1$ - w środku kuli nie można określić kątów

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 2$ - na biegunach nie można określić kąta ϕ



Przykład:

Objętość kuli

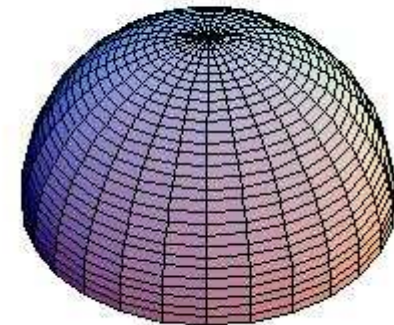
$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} dx dy dz = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \int_0^R dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$(d \cos \theta = -\sin \theta d\theta)$$

Srodek ciężkości półkuli:

$$\eta = \frac{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} z dx dy dz}{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} dx dy dz} = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta r \cos \theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R dr \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^3 \cos \theta = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{3}{8} R$$



Równanie prostej i płaszczyzny

Płaszczyzna styczna

Rozważmy powierzchnię gładką o równaniu $f(x,y,z)=0$ w okolicy (x_0, y_0, z_0) .

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta z$$

Dla punktów na płaszczyźnie $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = k(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (z - z_0) = 0$$

Wektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \right)$ jest prostopadły (normalny) do

powierzchni w punkcie (x_0, y_0, z_0) .

Prosta prostopadła do powierzchni w tym punkcie ma więc równanie parametryczne

$$(x, z, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + x_0, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + y_0, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + z_0 \right)$$

Dla sfery $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, więc prosta prostopadła ma równanie

$$(x, z, y) = (2x_0 t + x_0, 2y_0 t + y_0, 2z_0 t + z_0)$$

Plaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie x jest przestrzenią liniową.

Niech $\Phi : V \subset R^k \rightarrow R^n$, e_1, e_2, \dots, e_k tworzą bazę w R^k , oraz $y = \Phi(x)$.

Wtedy $u_i = \Phi'(x)e_i$ tworzą bazę w przestrzeni stycznej.

Przykład:

Dla powierzchni danej jako $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ mamy $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$,

$$u = \Phi' e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad v = \Phi' e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

Orientacja

Rozważmy bazy w przestrzeni R^k : (v_1, \dots, v_k) oraz (w_1, \dots, w_k) . Bazy te powiazane są przekształceniem liniowym $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, przy czym musi zachodzić warunek $|a| \neq 0$ aby zachować liniową niezależność. Jeżeli $|a| > 0$, to mówimy, że bazy są zgodnie zorintowane, a gdy $|a| < 0$, to mówimy, że są zorintowane przeciwnie.

Dla $k = 1$ mamy jedną bazę jednoelementową $v_1 = 1$ i drugą $w_1 = -1$.

Dla $k = 2$ przykładowe bazy $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i baza $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ są

powiazane przekształceniem o macierzy $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, zatem $|a| = 1 > 0$ i bazy są

zorintowane zgodnie, natomiast dla bazy $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |a| = -1 < 0$,

więc ta baza jest zorintowana przeciwnie do poprzednich. Orientację bazy kanonicznej nazywamy prawoskretną (zorintowaną dodatnio).

Wektor normalny

Niech M będzie powierzchnią dwuwymiarową w R^3 , T_x płaszczyzną styczną do M w punkcie \vec{x} , a wektory (\vec{u}, \vec{v}) bazą na płaszczyźnie stycznej. Wektor normalny definiujemy jako $\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$. Wektor ten wskazuje zewnętrzną (wewnętrzną) stronę powierzchni

orientowanej jeśli baza jest prawoskrętna (lewoskrętna).

c. d. przykładu:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dla górnej półsfery } f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z, \quad f_x = -\frac{x}{z}, \quad f_y = -\frac{y}{z}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

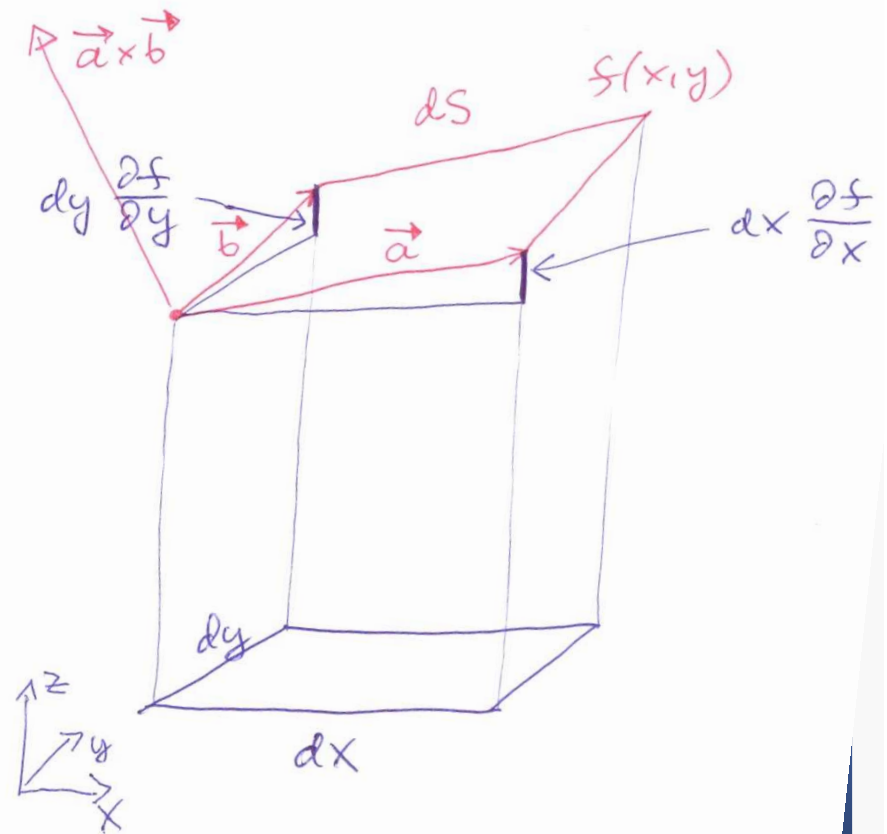
Dla dolnej półsfery $f = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z$ wynik taki sam (jeż!)

Nieco inne wyprowadzenie:

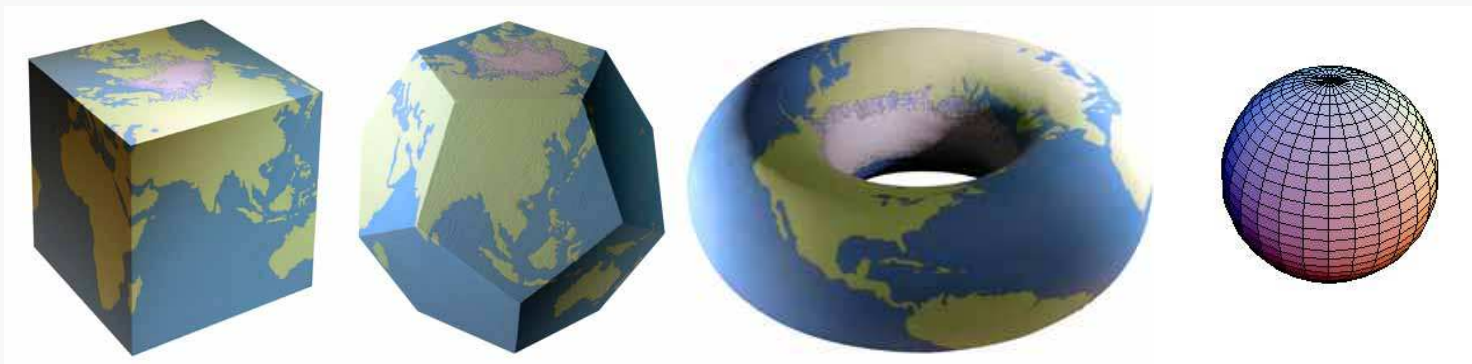
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= -\hat{i}f_x dx dy - \hat{j}f_y dx dy + \hat{k} dx dy \\ &= (-f_x, -f_y, 1) dx dy\end{aligned}$$

Po znormalizowaniu

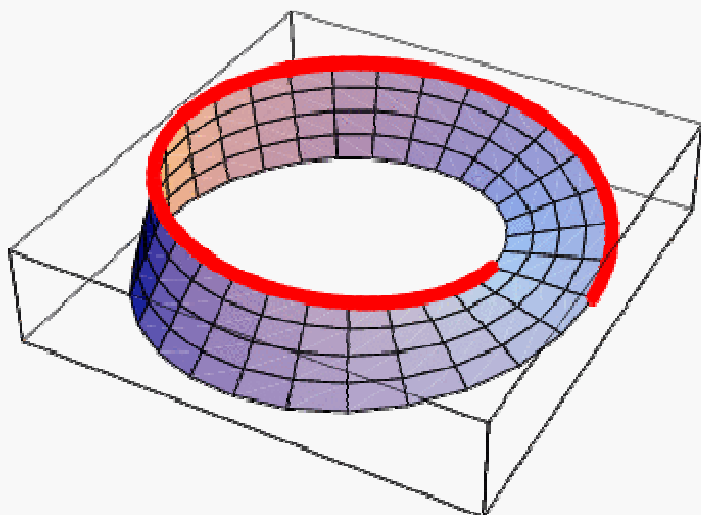
$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$$



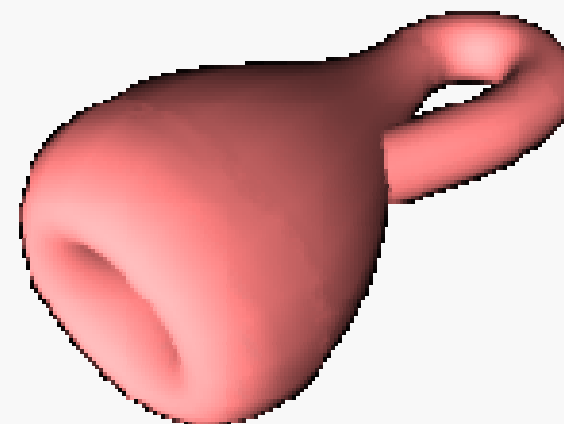
Powierzchnie orientowalne (mają stronę wewnętrzną i zewnętrzną)



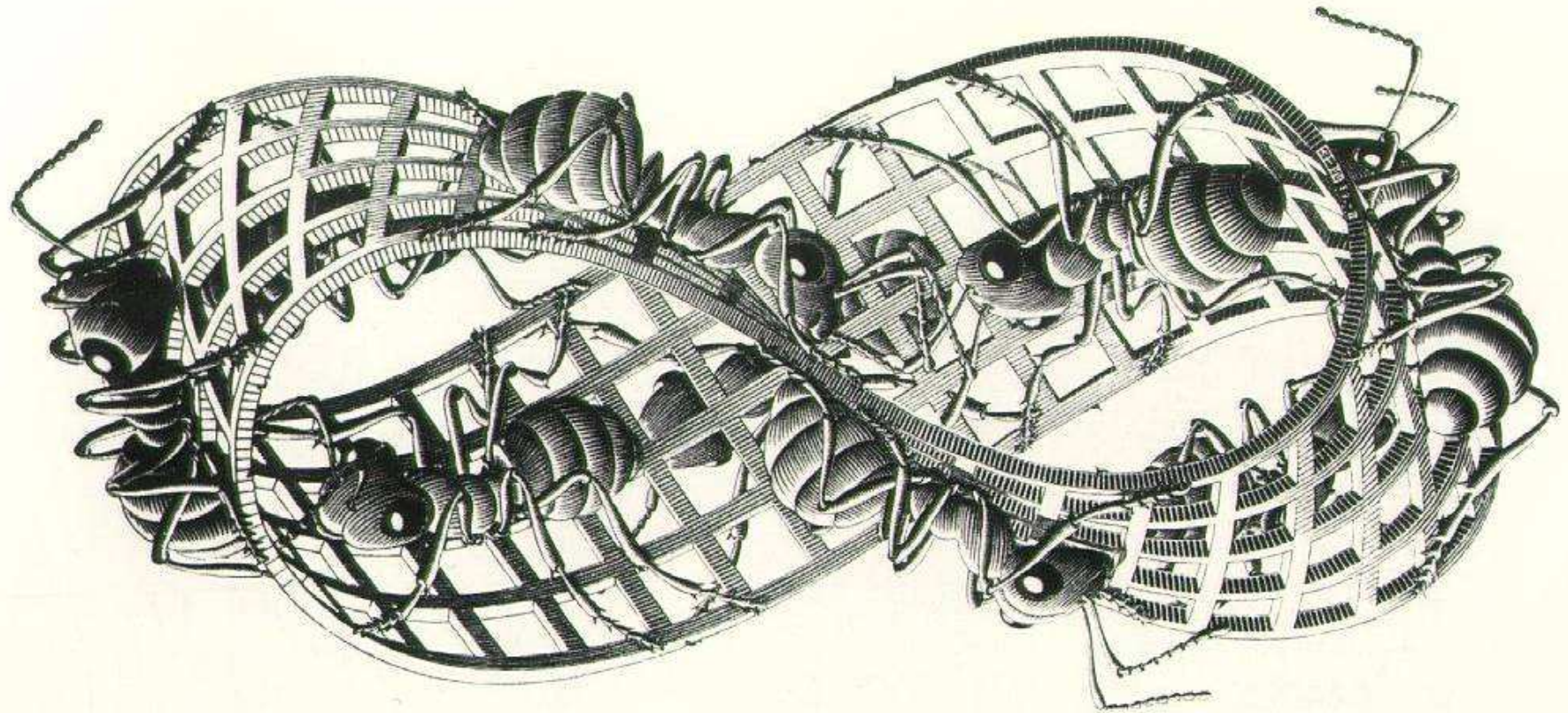
i nieorientowalne (nie można wyznaczyć strony)



Wstęga Möbiusa



Butelka Kleina



(M.C Escher)

$$x = \left(R + s \cos \frac{t}{2}\right) \cos t, \quad y = \left(R + s \cos \frac{t}{2}\right) \sin t, \quad z = s \sin \frac{t}{2}$$

$$t \in [0, 2\pi), \quad s \in [-w, w]$$

Całka krzywoliniowa zorientowana

$F = (F_1, F_2, \dots, F_k)$, C - krzywa gładka

$$I_C = \int_C F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_k dx_k = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dx}$$

$$I_{C_1+C_2} = I_{C_1} + I_{C_2}, \quad I_{-C} = -I_C$$

Tw. Całka I_C nie zależy od parametryzacji krzywej

$$\begin{aligned} \text{D: } \vec{y}(t) = \vec{x}(\varphi(t)) &\Rightarrow \int_C \vec{F}(\vec{y}) \cdot \vec{dy} = \int_a^b \vec{F}(\vec{y}(t)) \cdot \frac{\vec{dy}}{dt} dt = \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(\varphi(t))) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{x}(\varphi)) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{dx} \end{aligned}$$

(w konkretnej parametryzacji staje się zwykłą całką Riemanna)

Przykład: $C : x(\phi) = \cos \phi, y(\phi) = \sin \phi, \phi \in [0, \pi]$ (półokrąg o promieniu jednostkowym)

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + (x - y) dy &= \int_{\phi=0}^{\pi} [\cos^2 \phi d(\cos \phi) + \cos^2 \phi d\phi - \sin \phi d(\sin \phi)] = \\ &= \frac{\cos^3 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin^2 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Całka krzywoliniowa niezorientowana

$$J_C = \int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2} dt$$

$$J_C = J_{-C}$$

Tw. Związek z całką zorientowaną:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_C F_s ds, \quad F_s = \sqrt{F_1^2 + \dots + F_k^2} \cos \alpha, \quad \alpha - \text{kąt między } \vec{dx} \text{ i } \vec{F}$$

Zastosowanie (fizyka): praca $W = \int_C F_s ds = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$C : x = a \cos \phi, y = b \sin \phi, \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – ćwiartka elipsy

$F = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \end{pmatrix}$ – sprężyna zamocowana w środku

$dx = -a \sin \phi d\phi, \quad dy = b \cos \phi d\phi, \quad F_x dx + F_y dy = -k(a^2 - b^2) \sin \phi \cos \phi d\phi$

$$W = -k(a^2 - b^2) \int_0^{\pi/2} \cos \phi d(\cos \phi) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

Nabla, operator Laplace'a i dywergencja

Operator to funkcja, która funkcji przyporządkowuje funkcję.

Nabla $\vec{\nabla}$

Operator Laplace'a (laplasjan)

$$\Delta = \partial_i \partial_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad \Delta f = 4 + 6x$$

Dywergencja: $\vec{g}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (pole wektorowe)

$$\operatorname{div} \vec{g} = \partial_i g_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}$$

$$\vec{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ z^2 y \\ xyz \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 1 + z^2 + xy$$

Elementy rachunku tensorowego

Delta Kroneckera: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$

tensor symetryczny: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\delta_{ii} = n$ (wymiar przestrzeni)

$$\delta_{ij} A_{\dots j \dots} = A_{\dots i \dots}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

Pseudotensor Levi-Civity (w 3 wymiarach): ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1, \quad \text{pozostale} = 0$$

tensor calkowicie (we wszystkich wskaźnikach) antysymetryczny

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$$

Iloczyn wektorowy $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

$$\text{równoważny zapis: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m = a_j c_j b_k d_k - b_j c_j a_k d_k$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Rotacja

$$\vec{f} : U \subset R^3 \rightarrow R^3$$

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f}, \quad (\text{rot } \vec{f})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k$$

$$\partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j f_k = -\varepsilon_{jik} \partial_i \partial_j f_k = (i \leftrightarrow j) = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i f = -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j f$$

$$\partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = 0$$

$$\text{div} (\text{rot } \vec{f}) = 0$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$\partial_i (u(\vec{x}) f_i(\vec{x})) = f_i \partial_i u + u \partial_i f_i$$

$$\text{div} (u\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla} u + u \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \text{grad } u + u \text{div } \vec{f}$$

Tw. Greena

Krzywą zamkniętą nazywamy konturem. Niech kontur C będzie brzegiem zbioru D . Kontur jest zorientowany dodatnio jeśli okala zbiór D w taki sposób, że D znajduje się „po lewej stronie”.

Zbiór normalny D względem osi Ox to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\}, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow R$$

Zbiór normalny D względem osi Oy to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), y \in [c, d]\}, g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow R$$

Tw. Greena

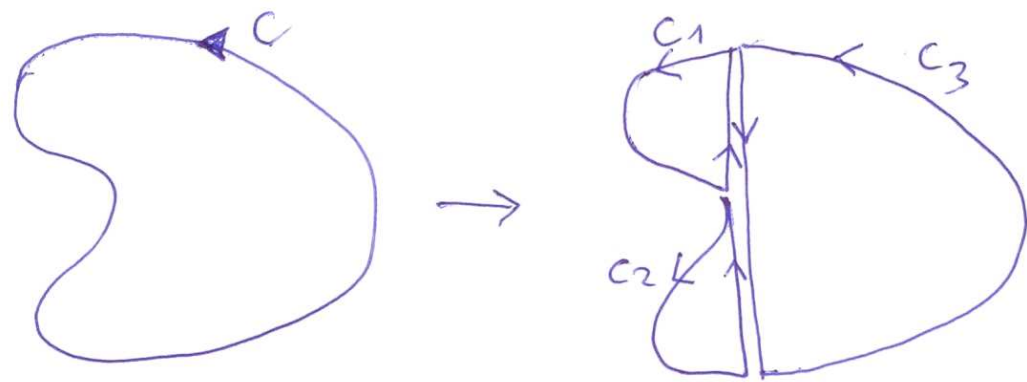
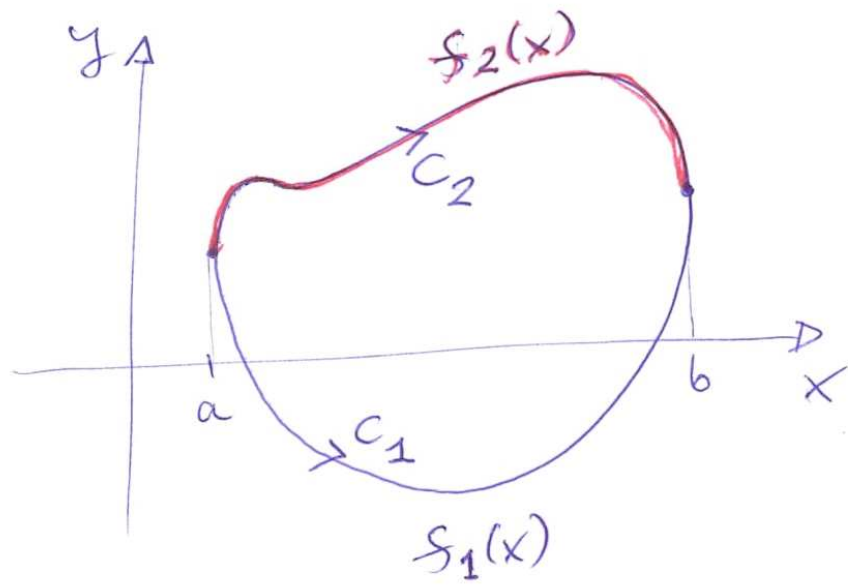
D - zbiór normalny ze względu na Ox i Oy , $C = \partial D$ - jego brzeg zorientowany dodatnio

$$\text{Wtedy } \oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

$$D: \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] = \int_{C_2} Pdx - \int_{C_1} Pdx =$$

$$= - \int_{-C_2} Pdx - \int_{C_1} Pdx = - \oint_{\partial D} Pdx$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d dt [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] = \int_{K_2} Qdy - \int_{-K_1} Qdy = \oint_{\partial D} Qdy$$



Pole potencjalne

$V(x, y)$ – potencjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\oint_C F_x dx + F_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow \int_{K_1} F_x dx + F_y dy = \int_{K_2} F_x dx + F_y dy \quad (\text{rys.})$$

(Praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi - można wprowadzić energię potencjalną. W poprzednim przykładzie z pracą na ćwiartce elipsy wynik jest wtedy natychmiastowy: $W = V_2 - V_1$)

(w powyższym wzorze zauważamy $(\text{rot grad } V)_z = 0$)

Całka powierzchniowa niezorientowana

(współrzędne kartezjańskie)

Plat regularny $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$

Element powierzchni : $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Pole powierzchni plata regularnego: $|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Całka powierzchniowa niezorientowana:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

(współrzędne krzywoliniowe)

$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} du dv$$

$$J_1 = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_2 = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_3 = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Przykład (współrzędne kuliste)

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \theta \cos \phi$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = r^2 \sin \theta$$

Całka powierzchniowa zorientowana

$F : S \rightarrow R^3$ - pole wektorowe

S – płat regularny

n – zewnętrzny wektor normalny

Całka powierzchniowa zorientowana pola F lub strumień pola F :

$$I = \iint_S F(x, y, z) \cdot n(x, y, z) dS - \text{strumień}$$

Niech $F = (F_1, F_2, F_3)$. Wtedy oznaczamy $I = \iint_S F_1 dydz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$

Jeżeli S dana jest równaniem $z = f(x, y)$, to $n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$

$$I = \iint_S \frac{-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dS = \iint_D (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) dx dy$$

Tw. Gaussa (Ostrogradskiego-Gaussa)

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Słownie: całka po objętości V z dywergencji z pola F równa się strumieniowi wypływającemu przez powierzchnie S ograniczającą V

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$$

D: Niech V będzie obszarem normalnym względem płaszczyzny Oxy , ograniczonym funkcjami $g(x, y)$ i $d(x, y)$. Wtedy

$$I_3 = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, d(x, y))) dx dy$$

Oznaczmy $S = S_1 + S_2$, gdzie S_1 dana jest przez $z = g(x, y)$ a S_2 przez $z = d(x, y)$.

$$I_3' = \iint_S F_3 dx dy = \iint_{S_1} F_3 dx dy - (-) \iint_{S_2} F_3 dx dy = \iint_D F_3(x, y, g(x, y)) dx dy - \iint_D F_3(x, y, d(x, y)) dx dy$$

Znak $(-)$ wynika z przeciwnej orientacji S_2 . Zatem $I_3 = I_3'$. Podobnie pokazujemy, że

$I_1 = I_1'$ oraz $I_2 = I_2'$. Jeżeli V nie jest normalny, to dzielimy go na podzbiory normalne.

Tw. Stokesa

Tw. Niech K będzie regularnym konturem będącym brzegiem plata regularnego S . Orientacje K i S są zgodne. Niech F_i mają ciągle pochodne. Wtedy

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Cyrkulacja pola F po krzywej zamkniętej K jest równa calce zorientowanej z rotacji pola F po placie S .

Inna notacja:

$$\oint_K F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Formy różniczkowe (*)

Różniczka zewnętrzna stopnia p :

$$a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad 1 \leq p \leq n, \quad \text{wszystkie } i_k \text{ różne}$$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \Rightarrow \quad dx_i \wedge dx_i = 0$$

Suma różniczek tego samego stopnia: forma różniczkowa zewnętrzna

$$\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Przykłady: $Pdx + Qdy$, $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, $A dx \wedge dy \wedge dz$

Dodawanie analogiczne do dodawania wielomianów.

$$\text{Mnożenie: } \alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = (-1)^{p+q} \beta \wedge \alpha$$

$$\text{Różniczkowanie: } d\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$d(Pdx + Qdy) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_l \partial x_k} \Rightarrow d(da) = 0$$

α jest formą zupełną, jeżeli $\exists \gamma: \alpha = d\gamma$, α jest formą zamkniętą, jeżeli $d\alpha = 0$

Zamiana zmiennych $x \rightarrow t$:

$$a = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$$

Całkowanie po hiperpowierzchni V :

$$\int_V a = \int_D A(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p = \int_D A(t) dt_1 \dots dt_p \quad (\text{zwykła całka Riemanna})$$

Ogólne Tw. Stokesa: V – hiperpowierzchnia zorientowana, ∂V – jej brzeg

Jeżeli współczynniki formy $a = \sum_{i_1 \dots i_{p-1}} a_{i_1 \dots i_{p-1}}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$ są klasy C^1 na $V + \partial V$,

$$\text{to } \int_{\partial V} a = \int_V da$$

Przykłady: Tw. Greena, Gaussa, Stokesa, także $\int_{[a,b]} f(x) dx = F(b) - F(a)$, bo

$$dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx = f(x) dx, \quad \partial V = \{a, b\}$$

Równania różniczkowe

Definicje, klasyfikacja

Równanie różniczkowe zwyczajne ma ogólną postać $F(x, y(x), y'(x), \dots) = 0$, gdzie ... oznaczają możliwość wystąpienia wyższych pochodnych. Zmienna x jest zmienną niezależną, a $y(x)$ jest szukaną funkcją. Rząd równania to najwyższy rząd pochodnej. W szczególności, równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma postać $F(x, y, y') = 0$.

Równanie różniczkowe cząstkowe ma ogólną postać

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial y(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n}, \dots) = 0$$

(równaniami cząstkowymi nie będziemy się zajmować)

Układ równań różniczkowych zwyczajnych na n funkcji $y_i(x)$ ma postać

$$F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Model fizyczny/ekonomiczny/meteorologiczny... → r. różniczkowe

Przykład: oscylator harmoniczny

$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0$ – r. mechaniki

$f = ma$ – prawo Newtona

$-kx(t) = m\ddot{x}(t)$, $k, m > 0$, $\frac{k}{m} = \omega^2$ – oscylator harmoniczny

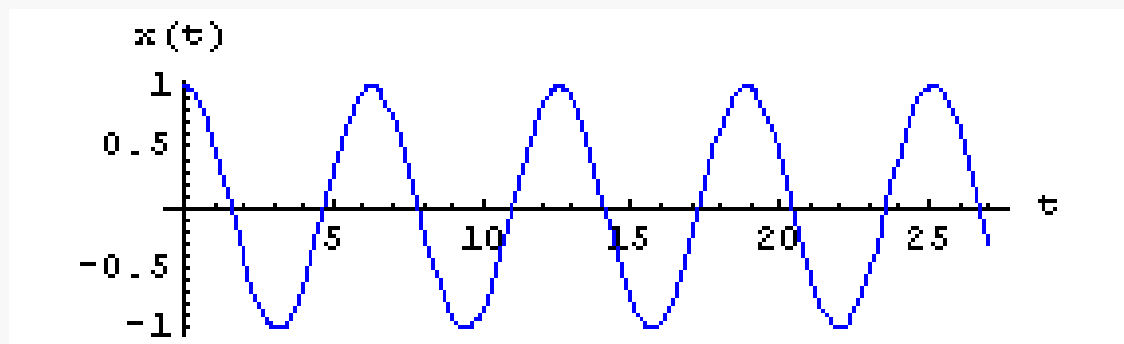
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ – r. różniczkowe do rozwiązania

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ – ogólna postać rozwiązania

Sprawdzenie: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

Warunki początkowe: $x(t) = x_0$, $\dot{x}(t) = v_0 \rightarrow A = x_0, B\omega = v_0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ – rozwiązanie spełniające war. początkowe



Przykład: rozpad promieniotwórczy / wzrost populacji

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0$$

(ubytek na jedn. czasu proporcjonalny do liczby atomów)

Rozw.: $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$ – liczba nierozpadłych atomów po czasie t

$$\lambda \rightarrow -\lambda$$

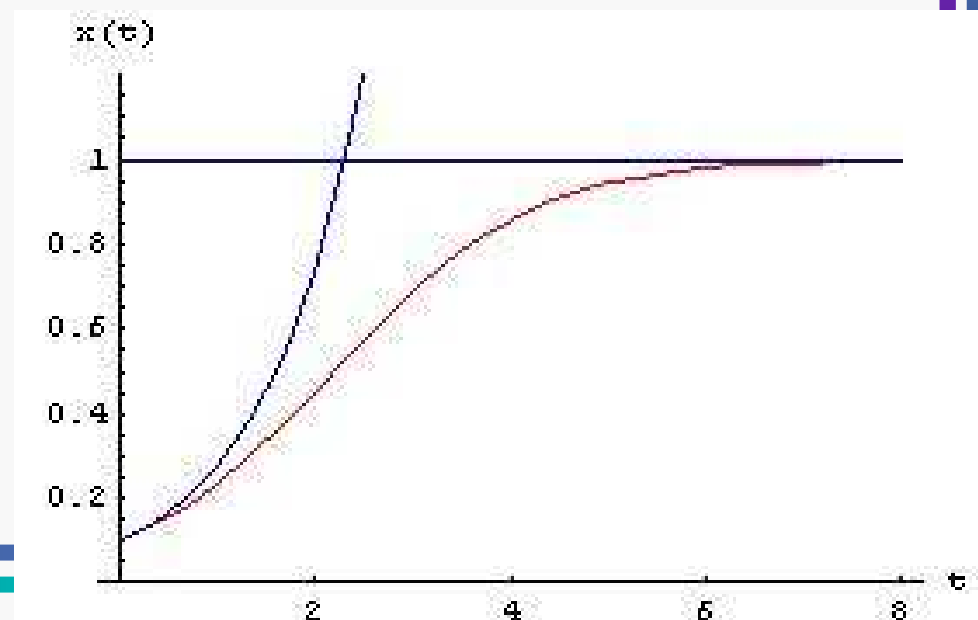
$N(t) = N_0 \exp(\lambda t)$ – populacja w czasie t , prawo wzrostu Malthusa

Bardziej realistyczne równanie:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) [1 - N(t) / N^*],$$

$$x = N / N^* \rightarrow \dot{x} = \lambda x (1 - x)$$

(nieliniowość!)



Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{x}{x-1} \right| = \exp(t + C) \Rightarrow$$

$$\left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \exp(-C) \exp(-t) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = C' \exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - C' \exp(-t)}$$

$$\text{war. początkowy: } x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$

$$1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0-1} \Rightarrow t \neq -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(w $t = -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right)$ osobliwość)

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

$$\forall x_0 \neq 0: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

Ogólne uwagi i twierdzenia

Rozwiązanie $y(x)$ r.r. nazywamy całką r.r., a wykres $(x, y(x))$ krzywą całkową.

Całka ogólna równania rzędu pierwszego jest postaci $y(x) = f(x, C)$, gdzie C jest stałą. Stałą tę wyznacza się z warunku początkowego $y_0 = f(x_0, C)$.

Rozwiązanie osobliwe to rozwiązanie, którego nie można uzyskać z postaci $f(x, C)$ dla żadnej wartości C .

$$\text{Przykład: } y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{y})' = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C, x + C \geq 0$$

$$y(x) = \begin{cases} (x + C)^2, & x \geq -C \\ 0, & x < -C \end{cases}$$

$y(x) = 0$ – rozw. osobliwe

Jednoznaczność rozwiązań

Tw. (o jednoznaczności rozwiązań) R. postaci $y' = f(x, y)$,
 $f(x, y)$ i $f_y(x, y)$ ciągłe w pewnym otoczeniu $(x_0, y_0) \Rightarrow$
 \exists otoczenie $(x_0 - a, x_0 + a)$, w którym jest określona dokładnie
jedna funkcja $\phi(x)$ o własnościach: $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $\phi(x_0) = y_0$.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$p(y)y'(x) = q(x) \Rightarrow p(y) \frac{dy}{dx} = q(x) \Rightarrow p(y)dy = q(x)dx \Rightarrow \int p(y)dy = \int q(x)dx$$

$$P(y) = \int p(y)dy, \quad Q(x) = \int q(x)dx, \quad P(y) = Q(x) + C, \quad C - \text{ pewna stała}$$

Rozwiązanie jest dane w postaci uwiklanej!

$$D: \frac{d}{dx}(P(y(x)) - Q(x) - C) = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} P(y) - \frac{d}{dx} Q(x) = y' p(y) - q(x) = 0$$

Przykład:

$$y^2 \frac{dy(t)}{dt} = t \Rightarrow y^2 dy = t dt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3C}$$

$$C' = 3C, \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C'}$$

$$\text{Warunek początkowy: } y(t_0) = y_0 \Rightarrow \frac{y_0^3}{3} = \frac{t_0^2}{2} + \frac{C'}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) + y_0^3}$$

Z nieskończonej liczby rozwiązań z parametrem C warunek początkowy wybiera jedno!

Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{x}{x-1} \right| = \exp(t + C) \Rightarrow$$

$$\left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \exp(-C) \exp(-t) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = C' \exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - C' \exp(-t)}$$

$$\text{war. początkowy: } x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$

$$1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0-1} \Rightarrow t \neq -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(w $t = -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right)$ osobliwość)

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

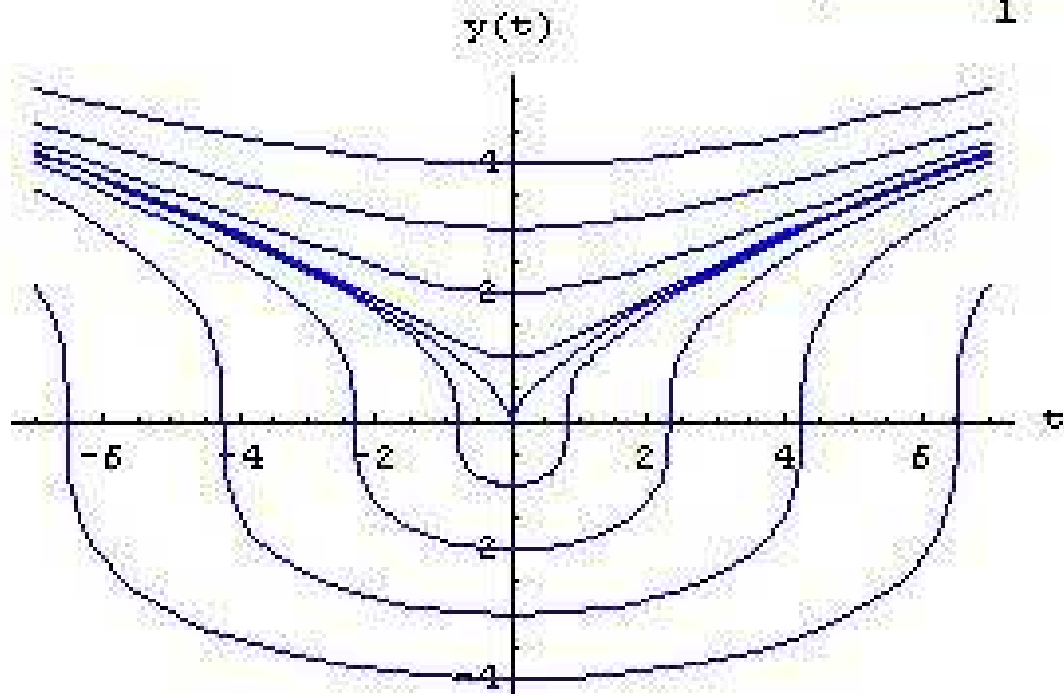
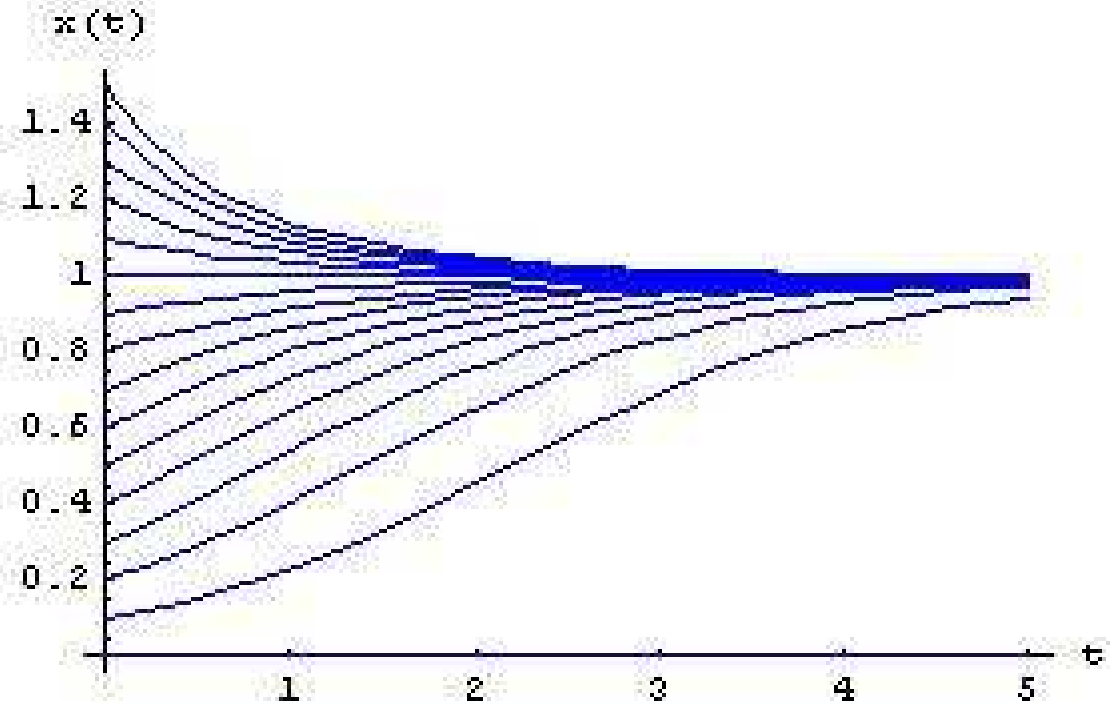
$$\forall x_0 \neq 0: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

Jednoparametrowe rodziny krzywych

R. populacji

$$\dot{x} = x(1-x)$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$



$$y^2 \dot{y} = t$$

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + y_0^3}$$

Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$u = ax + by + c$$

$$u' = a + by' = a + bf(u)$$

$$\frac{u'}{a + bf(u)} = 1$$

R. jednorodne w x i y :

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u(x) = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}, \quad f(u) \neq u, \quad x \neq 0$$

Ciąg dalszy w notatkach i skryptach ...