

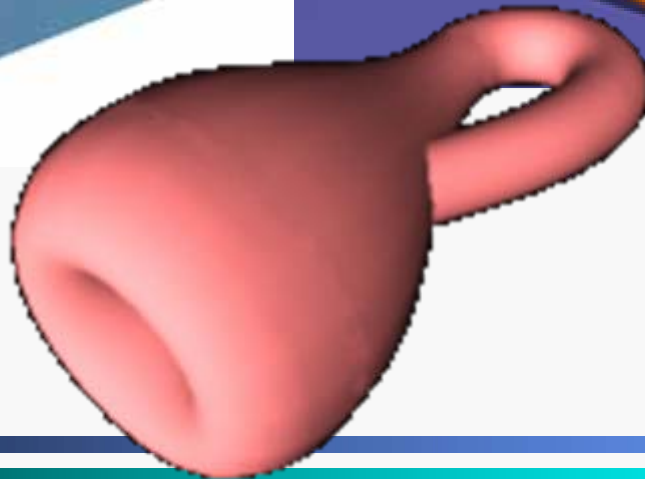
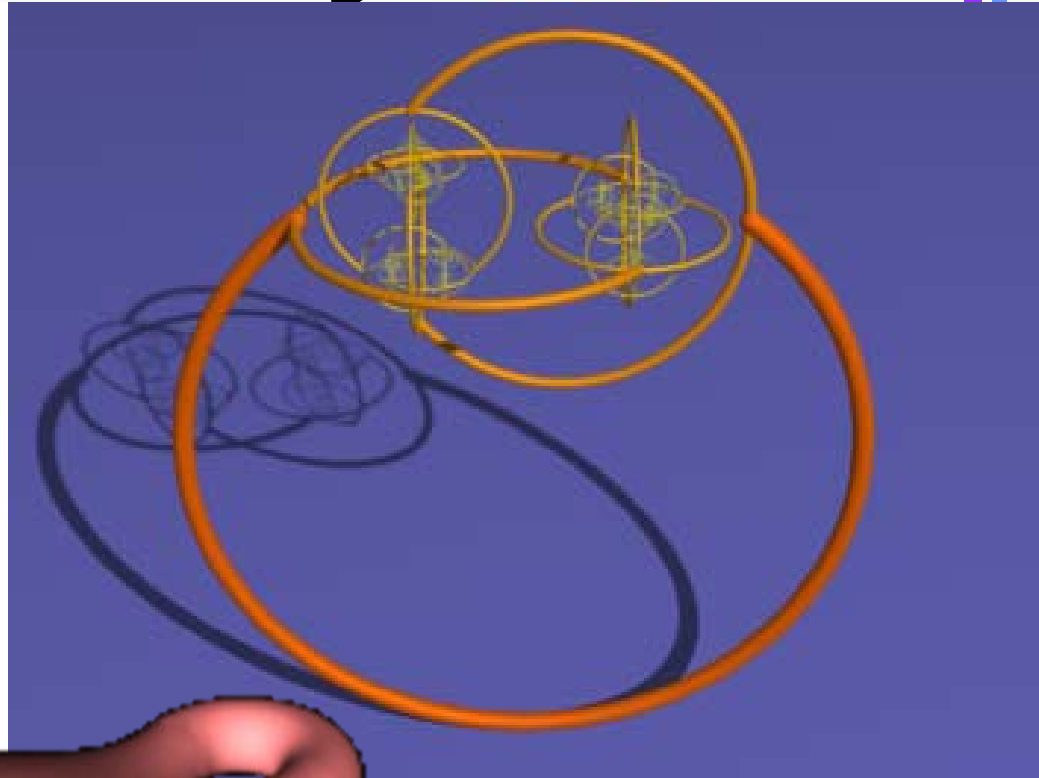
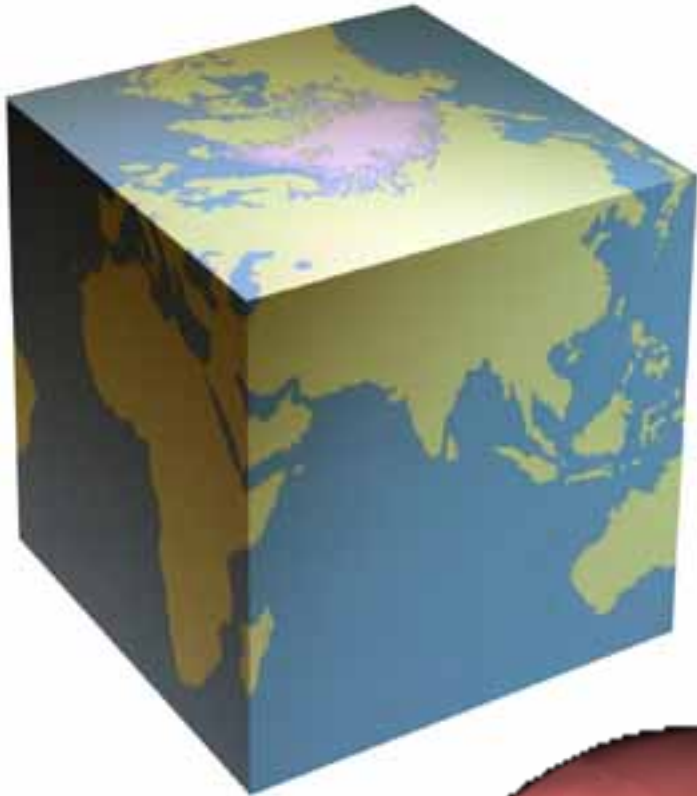
[wersja z 6 X 2009]

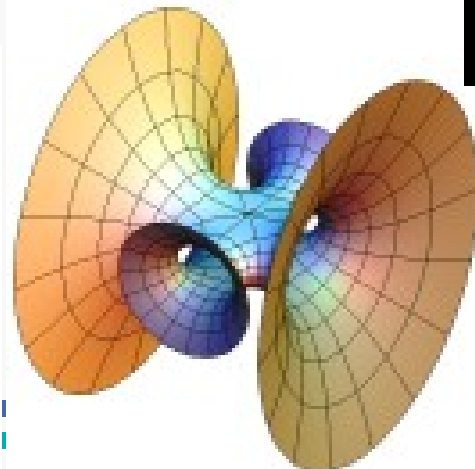
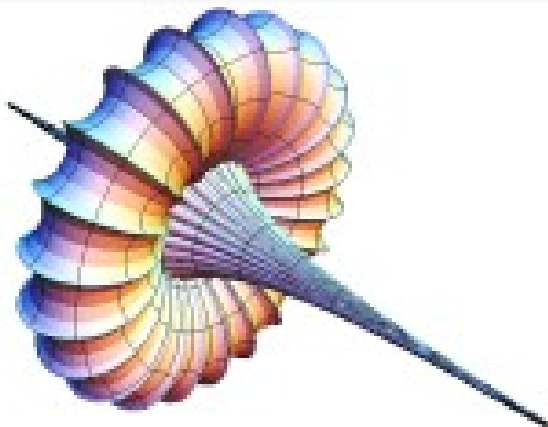
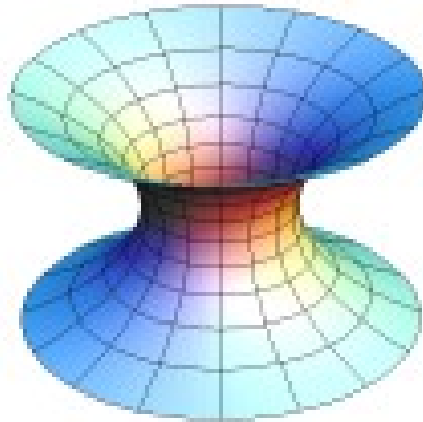
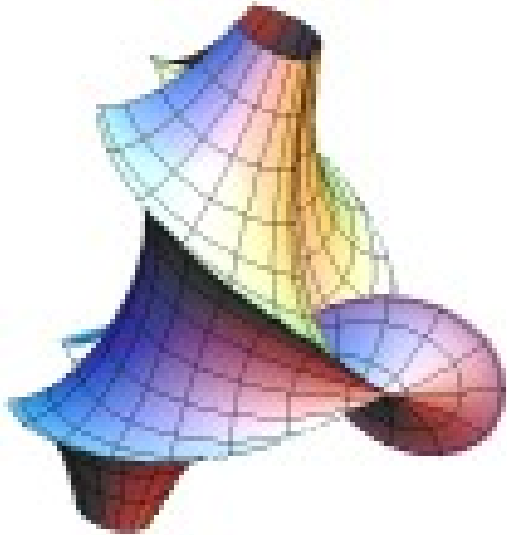
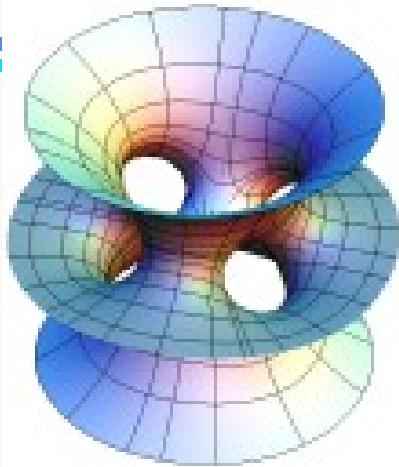
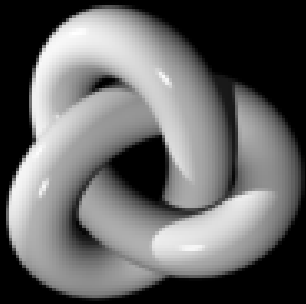
Analiza Matematyczna 3

Całki wielowymiarowe

Konspekt wykładu dla studentów II r. fizyki
Uniwersytet Jana Kochanowskiego 2009/2010
Wojciech Broniowski

Powierzchnie kawałkami gładkie





Całki wielowymiarowe

Uogólnienie całki Riemanna:

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Dokonyjemy podziału prostokąta

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in P_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in P_i\}$$

$$s = m_1 |P_1| + \dots + m_k |P_k|, \quad S = M_1 |P_1| + \dots + M_k |P_k|$$

Rozważamy normalny ($\delta_n \rightarrow 0$) ciąg podziałów

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \text{całka dolna}, \quad S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \text{całka górna funkcji } f \text{ na prostokącie } P$$

Jeżeli $s^* = S^*$ to wielkość tę nazywamy wielokrotną całką Riemanna

$$\text{Notacja: } \iint_P dx dy f(x, y), \quad \iiint_P dx dy dz g(x, y, z)$$

Całka iterowana

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y) \right), \int_{a_1}^{b_1} dx \left(\int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y) \right) - \text{całki iterowane}$$

Tw. Fubniego: Jeżeli $f : P \rightarrow R$ jest ciągła, to obie całki iterowane są równe całce Riemanna $\iint_P dx dy f(x, y)$.

(analogicznie dla większej liczby wymiarów)

Przykład: $P = [0, 1] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_P dx dy (x^2 y + 2) &= \int_0^1 dx \left(\int_0^2 dy (x^2 y + 2) \right) = \int_0^1 dx \left(\frac{x^2 y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{y=0}^2 = \int_0^1 dx (2x^2 + 4) = \frac{2}{3} + 4 \\ &= \int_0^2 dy \left(\int_0^1 dx (x^2 y + 2) \right) = \int_0^2 dy \left(\frac{x^3 y}{3} + 2x \right) \Big|_{x=0}^1 = \int_0^2 dx \left(\frac{y}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} + 4 \end{aligned}$$

Całki po dowolnym obszarze

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \in P \setminus A \end{cases}$$

$$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ – zbiór normalny względem O_x

Tw. Jeżeli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna, oraz

$$\iint_A dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$$

Przykład:

$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ – trójkąt

$$\iint_A dx dy xy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy = \int_0^1 dx \frac{1}{2} (1-x)^2 x = \frac{1}{24}$$

Zastosowania całek wielokrotnych

$$V = \iiint_A dx dy dz$$

$$A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$x, y - \text{ustalone} \Rightarrow z \leq 1 - x - y$$

x – ustalone, szukamy największego możliwego y : $y \leq 1 - x - z$,

ponieważ najmniejsze $z = 0 \Rightarrow y \leq 1 - x$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1 - x - y) = \int_0^1 dx \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

Jest to tzw. objętość sympleksu. W n wymiarach $V = \frac{1}{n!}$

Środek ciężkości

$$\bar{x} = \frac{1}{|A|} \iint_A x \, dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy - \text{figura 2-wym.}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|V|} \iiint_V x \, dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{|V|} \iiint_V z \, dx dy dz - \text{bryła}$$

Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu

regularnego zbioru A wokół Ox : $|V| = 2\pi \iint_A y \, dx dy$

Reguły Guldina: $|V| = 2\pi\eta |A|$, $\eta = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy$,

Dla torusa $|V| = 2\pi a \pi r^2$

Podobnie dla powierzchni powstałej w wyniku obrotu łuku mamy

$|S| = 2\pi\xi |L|$, $\xi = \frac{1}{|L|} \int_{\alpha}^{\beta} y dt$ - odległość środka ciężkości łuku od osi obrotu

Dla torusa $|S| = 2\pi a 2\pi r$



Pole powierzchni

Pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{a} i \vec{b}

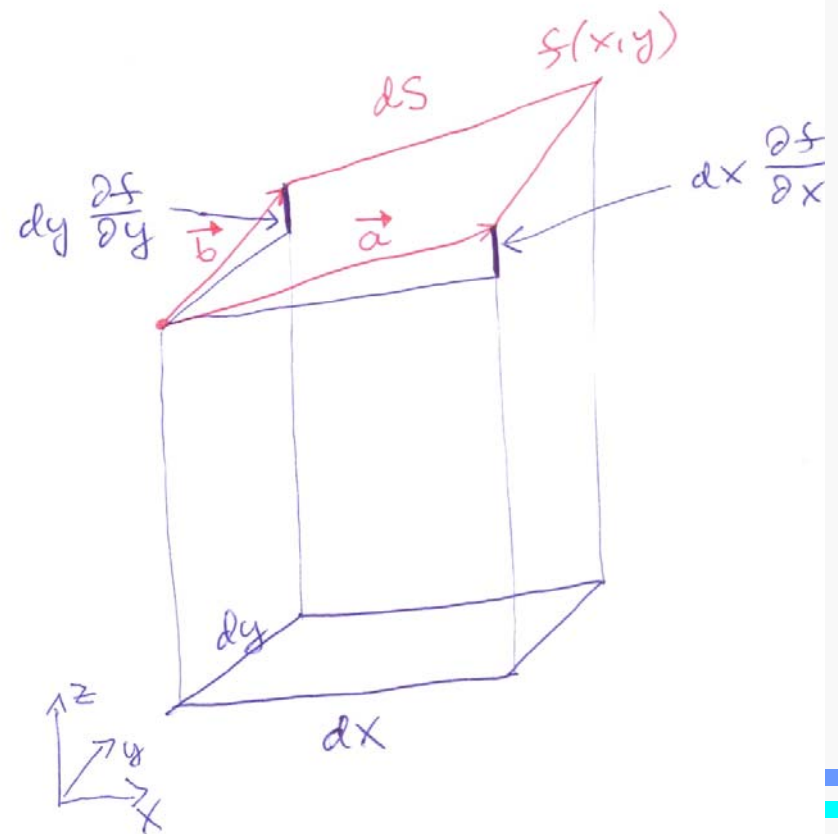
wynosi $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Z rysunku wynika, że

$\vec{a} = (dx, 0, f_x dx)$, $\vec{b} = (0, dy, f_y dy)$, zatem

$$S = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix}$$

$$= \left| -\hat{i} f_x dx dy - \hat{j} f_y dx dy + \hat{k} dx dy \right|$$

$$= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$



$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

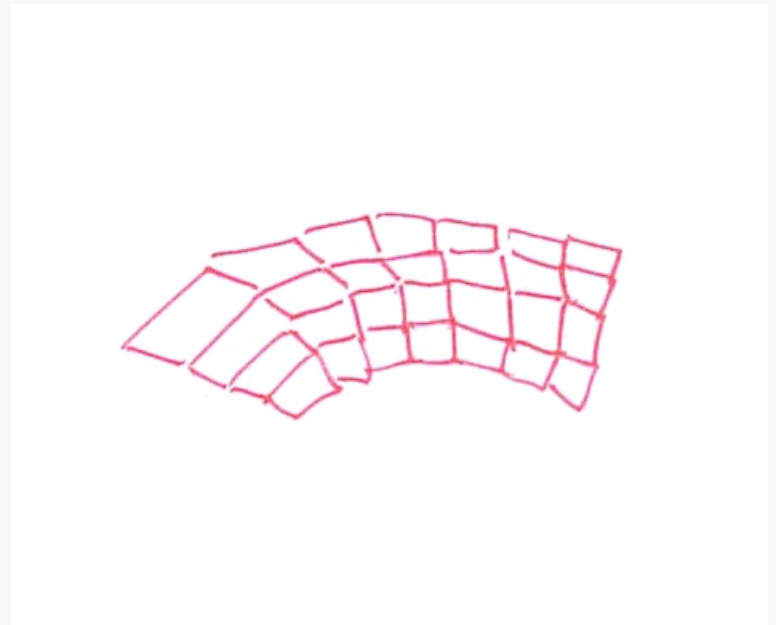
Wzór wynika z konstrukcji przybliżającej powierzchnię równoległobokami

Przykład:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

$$A = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Zamiana zmiennych - dyfeomorfizm

$f \in C^1 : R^n \supset U \rightarrow V \subset R^n$, homeomorfizm rzędu n

(bijekcja, pochodna Frecheta odwracalna, f i f^{-1} ciągłe)

Pamiętamy, że dla jednej zmiennej $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y) = \int_a^b dx f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $y = \varphi(x)$

Tw. $\varphi : X \subset R^n \rightarrow Y \subset R^n$ klasy C^1

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \quad \text{jakobian przekształcenia } \varphi$$

Wtedy

$$\int_Y \dots \int f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n =$$

$$\int_X \dots \int f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n)) |J(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n, \quad y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

Podstawowe układy współrzędnych

Współrzędne biegunowe (osiowe)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

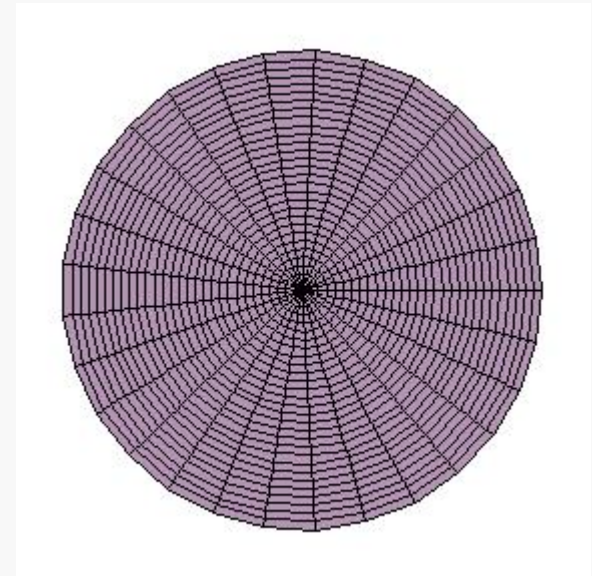
$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix}, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\Phi'(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

$$\int dx dy f(x, y) = \int r dr d\phi f(x(r, \phi), y(r, \phi))$$



Homeomorfizm regularny dla $r \neq 0$, rząd $\Phi' = 2$. Dla $r = 0$ jest osobliwość, bo w tym punkcie nie można określić kąta

Przykłady:

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{r^2 \leq R^2} \frac{rdrd\phi}{r} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi = R2\pi$$

$$I_R = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{r^2 \leq R^2} e^{-r^2} rdrd\phi = 2\pi \int_0^R r dr e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^R = \pi - \pi e^{-R^2}$$

$$I_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi$$

$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

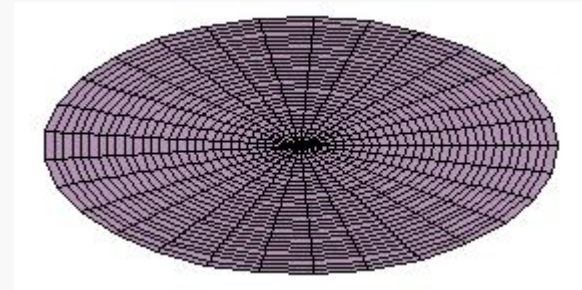
Całka Gaussa

Współrzędne eliptyczne

$$x = ar \cos \phi$$

$$y = br \sin \phi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad J = abr$$



Współrzędne walcowe (cylindryczne)

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

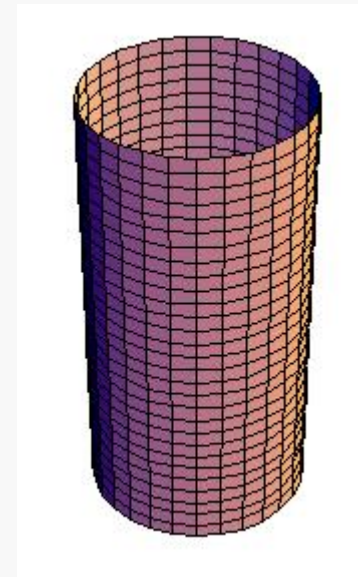
Liniowa zmiana skali

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

$$J = abc$$



Współrzędna sferyczne (kuliste)

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$\theta \in [0, \pi]$ - kąt osiowy (szerokość geogr.),

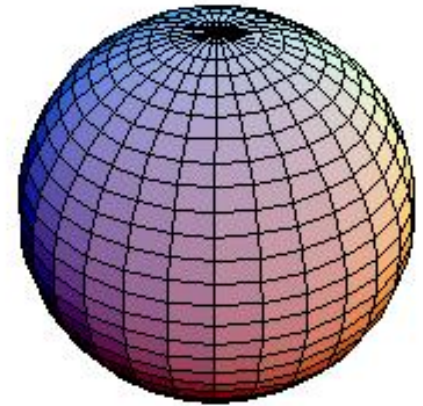
$\phi \in [0, 2\pi)$ - kąt biegunowy (azymutalny, długość geogr.)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$r = 0 \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 1$ - w środku kuli nie można określić kątów

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 2$ - na biegunach nie można określić kąta ϕ



Przykład:

Objętość kuli

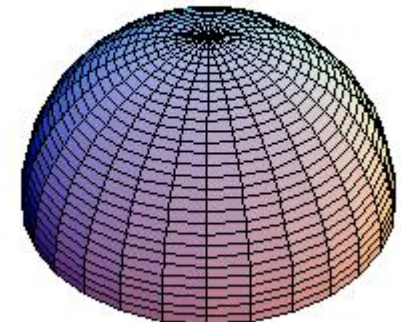
$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} dx dy dz = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \int_0^R dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$(d \cos \theta = -\sin \theta d\theta)$$

Srodek ciężkości półkuli:

$$\eta = \frac{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} z dx dy dz}{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} dx dy dz} = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta r \cos \theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R dr \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^3 \cos \theta = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{3}{8} R$$



Równanie prostej i płaszczyzny

Płaszczyzna styczna

Rozważmy powierzchnię gładką o równaniu $f(x,y,z)=0$ w okolicy (x_0, y_0, z_0) .

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} dz$$

Dla punktów na płaszczyźnie $(dx, dy, dz) = k(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} (z - z_0) = 0$$

Wektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \right)$ jest prostopadły (normalny) do

powierzchni w punkcie (x_0, y_0, z_0) .

Prosta prostopadła do powierzchni w tym punkcie ma więc równanie parametryczne

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + x_0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + y_0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} t + z_0 \end{array} \right)$$

Dla sfery $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, więc prosta prostopadła ma równanie $(2x_0t + x_0, 2y_0t + y_0, 2z_0t + z_0)$

Plaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie x jest przestrzenią liniową.

Niech $\Phi : V \subset R^k \rightarrow R^n$, e_1, e_2, \dots, e_k tworzą bazę w R^k , oraz $y = \Phi(x)$.

Wtedy $u_i = \Phi'(x)e_i$ tworzą bazę w przestrzeni stycznej.

Przykład:

Dla powierzchni danej jako $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ mamy $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$,

$$u = \Phi' e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad v = \Phi' e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

Orientacja

Rozważmy bazy w przestrzeni R^k : (v_1, \dots, v_k) oraz (w_1, \dots, w_k) . Bazy te powiazane są przekształceniem liniowym $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, przy czym musi zachodzić warunek $|a| \neq 0$ aby zachować liniową niezależność. Jeżeli $|a| > 0$, to mówimy, że bazy są zgodnie zorientowane, a gdy $|a| < 0$, to mówimy, że są zorientowane przeciwnie.

Dla $k = 1$ mamy jedną bazę jednoelementową $v_1 = 1$ i drugą $w_1 = -1$.

Dla $k = 2$ przykładowe bazy $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i baza $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ są

powiązane przekształceniem o macierzy $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, zatem $|a| = 1 > 0$ i bazy są

zorientowane zgodnie, natomiast dla bazy $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|a| = -1 < 0$,

więc ta baza jest zorientowana przeciwnie do poprzednich. Orientację bazy kanonicznej nazywamy prawoskretną (zorientowaną dodatnio).

Wektor normalny

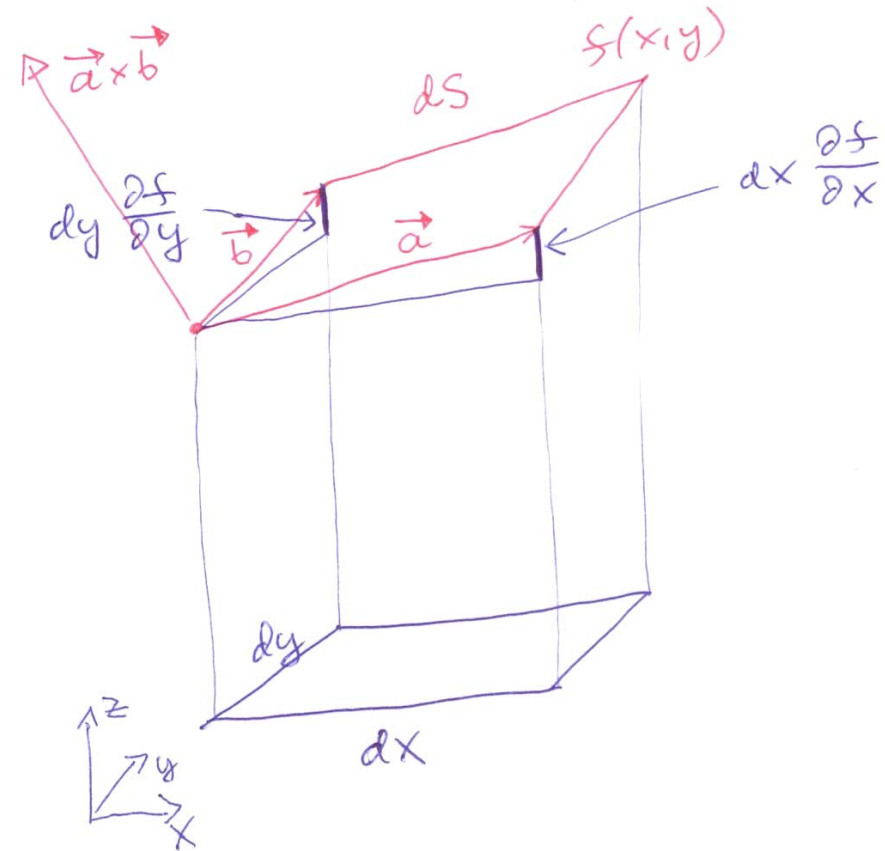
Niech M będzie powierzchnią dwuwymiarową w R^3 , T_x płaszczyzną styczną do M w punkcie \vec{x} , a wektory (\vec{u}, \vec{v}) bazą na płaszczyźnie stycznej. Wektor normalny definiujemy jako $\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$. Wektor ten wskazuje zewnętrzną (wewnętrzną) stronę powierzchni orientowalnej jeśli baza jest prawoskrętna (leuoskrętna).

c. d. przykładu:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dla górnej półsfery } f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z, \quad f_x = -\frac{x}{z}, \quad f_y = -\frac{y}{z}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dla dolnej półsfery $f = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z$ wynik taki sam (jeż!)



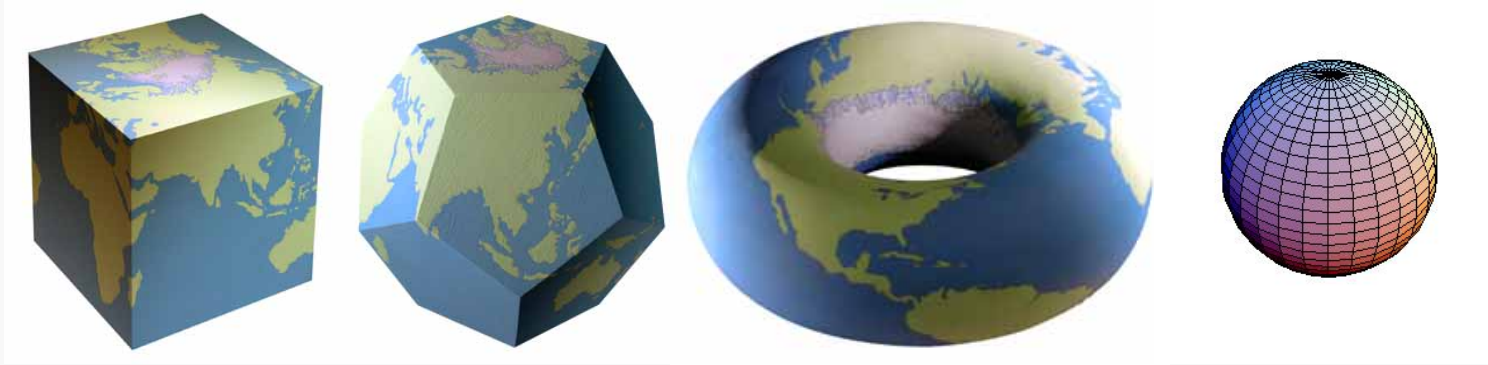
Nieco inne wyprowadzenie:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\hat{i}f_x dx dy - \hat{j}f_y dx dy + \hat{k} dx dy \\ &= (-f_x, -f_y, 1) dx dy \end{aligned}$$

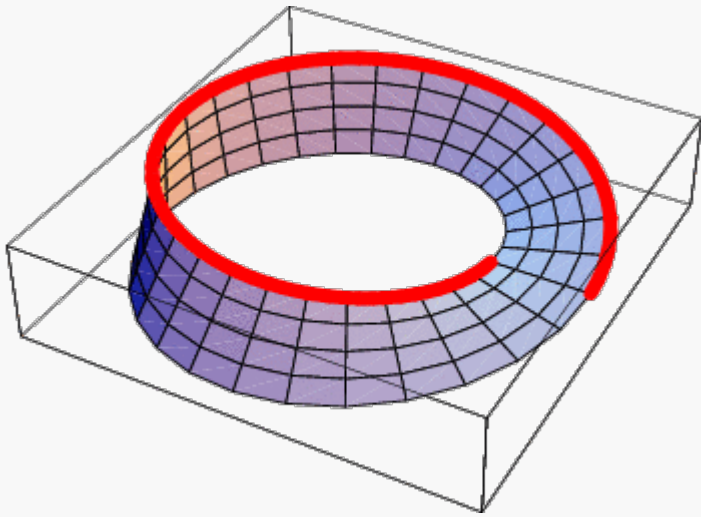
Po znormalizowaniu

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$$

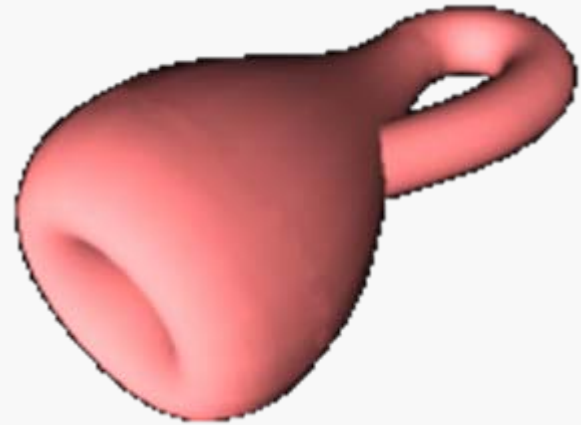
Powierzchnie orientowalne (mają stronę wewnętrzną i zewnętrzną)



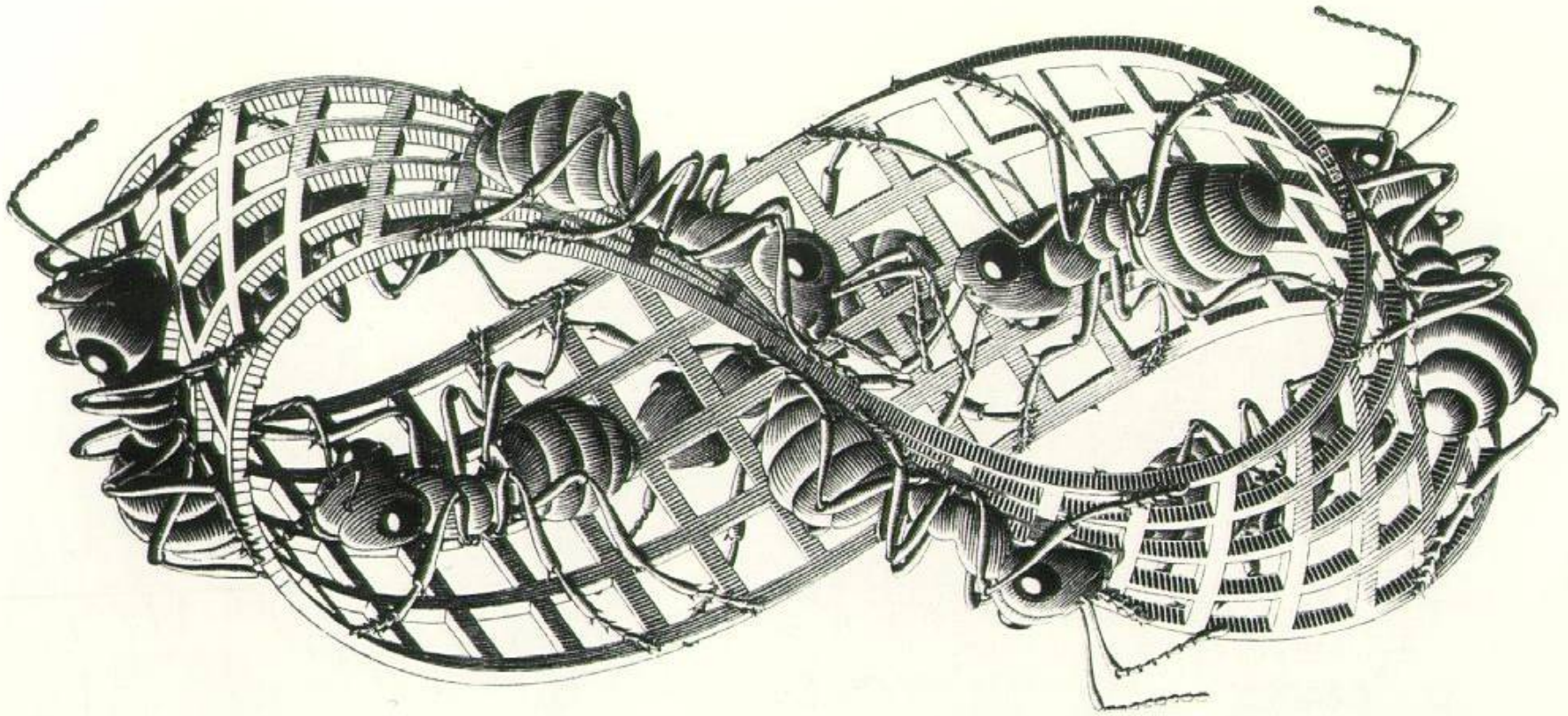
i nieorientowalne (nie można wyznaczyć strony)



Wstęga Möbiusa



Butelka Kleina



(M.C Escher)

$$x = \left(R + s \cos \frac{t}{2}\right) \cos t, \quad y = \left(R + s \cos \frac{t}{2}\right) \sin t, \quad z = s \sin \frac{t}{2}$$

$$t \in [0, 2\pi), \quad s \in [-w, w]$$

Całka krzywoliniowa zorientowana

$F = (F_1, F_2, \dots, F_k)$, C - krzywa gładka

$$I_C = \int_C F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_k dx_k = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dx}$$

$$I_{C_1+C_2} = I_{C_1} + I_{C_2}, \quad I_{-C} = -I_C$$

Tw. Całka I_C nie zależy od parametryzacji krzywej

$$D: \vec{y}(t) = \vec{x}(\varphi(t)) \Rightarrow \int_C \vec{F}(\vec{y}) \cdot \vec{dy} = \int_a^b \vec{F}(\vec{y}(t)) \cdot \frac{\vec{dy}}{dt} dt =$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(\varphi(t))) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{x}(\varphi)) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{dx}$$

(w konkretnej parametryzacji staje się zwykłą całką Riemanna)

Przykład: $C : x(\phi) = \cos \phi, y(\phi) = \sin \phi, \phi \in [0, \pi]$ (półokrąg o promieniu jednostkowym)

$$\int_C x^2 dx + (x - y) dy = \int_{\phi=0}^{\pi} [\cos^2 \phi d(\cos \phi) + \cos^2 \phi d\phi - \sin \phi d(\sin \phi)] =$$

$$= \frac{\cos^3 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin^2 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$$

Całka krzywoliniowa niezorientowana

$$J_C = \int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2} dt$$

$$J_C = J_{-C}$$

Tw. Związek z całką zorientowaną:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_C F_s ds, \quad F_s = \sqrt{F_1^2 + \dots + F_k^2} \cos \alpha, \quad \alpha - \text{ kąt między } d\vec{x} \text{ i } \vec{F}$$

Zastosowanie (fizyka): praca $W = \int_C F_s ds = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$C : x = a \cos \phi, y = b \sin \phi, \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – ćwiartka elipsy

$F = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \end{pmatrix}$ – sprężyna zamocowana w środku

$dx = a \sin \phi d\phi, \quad dy = -b \cos \phi d\phi, \quad F_x dx + F_y dy = -k(a^2 - b^2) \sin \phi \cos \phi d\phi$

$$W = -k(a^2 - b^2) \int_0^{\pi/2} \cos \phi d(\cos \phi) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

Tw. Greena

Krzywą zamkniętą nazywamy konturem. Niech kontur C będzie brzegiem zbioru D . Kontur jest zorientowany dodatnio jeśli okala zbiór D w taki sposób, że D znajduje się „po lewej stronie”.

Zbiór normalny D względem osi Ox to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\}, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow R$$

Zbiór normalny D względem osi Oy to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), y \in [c, d]\}, g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow R$$

Tw. Greena

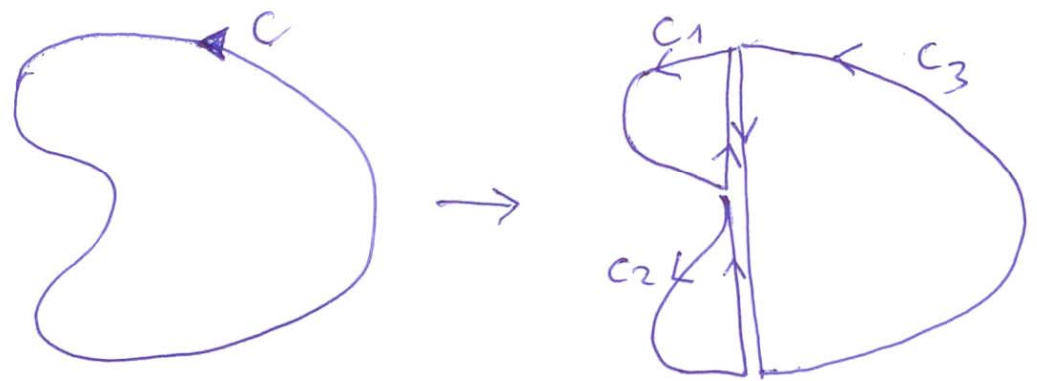
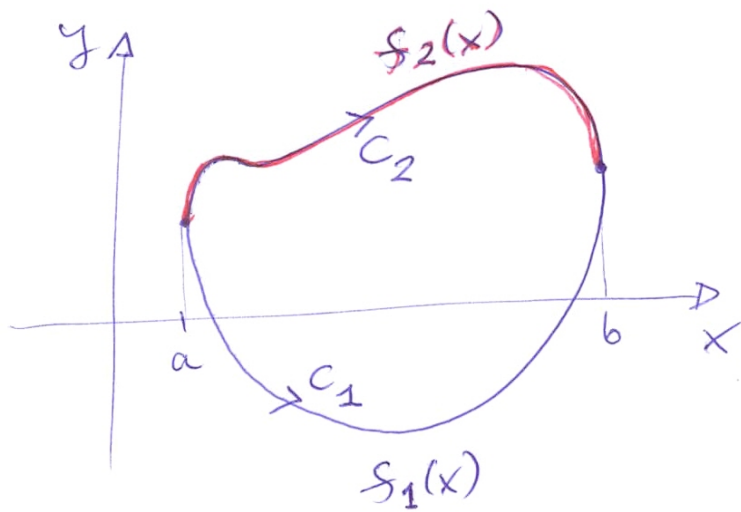
D - zbiór normalny ze względu na Ox i Oy , $C = \partial D$ - jego brzeg zorientowany dodatnio

$$\text{Wtedy } \oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

$$D: \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] = \int_{C_2} Pdx - \int_{C_1} Pdx =$$

$$= - \int_{-C_2} Pdx - \int_{C_1} Pdx = - \oint_{\partial D} Pdx$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d dt [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] = \int_{K_2} Qdy - \int_{-K_1} Qdy = \oint_{\partial D} Qdy$$



Pole potencjalne (fiz.)

$V(x, y)$ – potencjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\oint_C F_x dx + F_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow \int_{K_1} F_x dx + F_y dy = \int_{K_2} F_x dx + F_y dy \quad (\text{rys.})$$

(Praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi - można wprowadzić energię potencjalną. W poprzednim przykładzie z pracą na ćwiartce elipsy wynik jest wtedy natychmiastowy: $W = V_2 - V_1$)

(w powyższym wzorze zauważamy $(\text{rot grad } V)_z = 0$)

Całka powierzchniowa nieorientowana

(współrzędne kartezjańskie)

Plat regularny $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$

Element powierzchni: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Pole powierzchni plata regularnego: $|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Całka powierzchniowa nieorientowana:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

(współrzędne krzywoliniowe)

$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} du dv$$

$$J_1 = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_2 = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_3 = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Przykład (współrzędne kuliste)

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \theta \cos \phi$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = r^2 \sin \theta$$

Całka powierzchniowa zorientowana

$F : S \rightarrow R^3$ - pole wektorowe

S – pląt regularny

n – zewnętrzny wektor normalny

Całka powierzchniowa zorientowana pola F lub strumień pola F :

$$I = \iint_S F(x, y, z) \cdot n(x, y, z) dS - \text{strumień}$$

Niech $F = (F_1, F_2, F_3)$. Wtedy oznaczamy $I = \iint_S F_1 dydz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$

Jeżeli S dana jest równaniem $z = f(x, y)$, to $n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$

$$I = \iint_S \frac{-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dS = \iint_D (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) dx dy$$

Tw. Gaussa (Ostrogradskiego-Gaussa)

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Słownie: całka po objętości V z dywergencji z pola F równa się strumieniowi wypływającemu przez powierzchnie S ograniczającą V

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$$

D: Niech V będzie obszarem normalnym względem płaszczyzny Oxy , ograniczonym funkcjami $g(x, y)$ i $d(x, y)$. Wtedy

$$I_3 = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, d(x, y))) dx dy$$

Oznaczmy $S = S_1 + S_2$, gdzie S_1 dana jest przez $z = g(x, y)$ a S_2 przez $z = d(x, y)$.

$$I_3' = \iint_S F_3 dx dy = \iint_{S_1} F_3 dx dy - (-) \iint_{S_2} F_3 dx dy = \iint_D F_3(x, y, g(x, y)) dx dy - \iint_D F_3(x, y, d(x, y)) dx dy$$

Znak $(-)$ wynika z przeciwnej orientacji S_2 . Zatem $I_3 = I_3'$. Podobnie pokazujemy, że $I_1 = I_1'$ oraz $I_2 = I_2'$. Jeżeli V nie jest normalny, to dzielimy go na podzbiory normalne.

Tw. Stokesa

Tw. Niech K będzie regularnym konturem będącym brzegiem plata regularnego S . Orientacje K i S są zgodne. Niech F_i mają ciągle pochodne. Wtedy

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Cyrkulacja pola F po krzywej zamkniętej K jest równa calce zorientowanej z rotacji pola F po placie S .

Inna notacja:

$$\oint_K F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Formy różniczkowe (*)

Różniczka zewnętrzna stopnia p :

$$a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad 1 \leq p \leq n, \quad \text{wszystkie } i_k \text{ różne}$$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \Rightarrow \quad dx_i \wedge dx_i = 0$$

Suma różniczek tego samego stopnia: forma różniczkowa zewnętrzna

$$\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Przykłady: $Pdx + Qdy$, $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, $A dx \wedge dy \wedge dz$

Dodawanie analogiczne do dodawania wielomianów.

$$\text{Mnożenie: } \alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = (-1)^{p+q} \beta \wedge \alpha$$

$$\text{Różniczkowanie: } d\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$d(Pdx + Qdy) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_l \partial x_k} \Rightarrow d(da) = 0$$

α jest formą zupełną, jeżeli $\exists \gamma : \alpha = d\gamma$, α jest formą zamkniętą, jeżeli $d\alpha = 0$

Zamiana zmiennych $x \rightarrow t$:

$$a = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$$

Całkowanie po hiperpowierzchni V :

$$\int_V a = \int_D A(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p = \int_D A(t) dt_1 \dots dt_p \quad (\text{zwykła całka Riemanna})$$

Ogólne Tw. Stokesa: V – hiperpowierzchnia zorientowana, ∂V – jej brzeg

Jeżeli współczynniki formy $a = \sum_{i_1 \dots i_{p-1}} a_{i_1 \dots i_{p-1}}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$ są klasy C^1 na $V + \partial V$,

$$\text{to } \int_{\partial V} a = \int_V da$$

Przykłady: Tw. Greena, Gaussa, Stokesa, także $\int_{[a,b]} f(x) dx = F(b) - F(a)$, bo

$$dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx = f(x) dx, \quad \partial V = \{a, b\}$$