

Zestaw 13 - fizyka / 11 - informatyka (termin oddania - 9 V)

Całki wielokrotne

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całki

$$I_1 = \int_{-1}^1 dx \int_0^3 dy xy^2, \quad I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(x + y + z), \quad I_3 = \int_0^\pi dx \int_0^1 dy y \cos(xy).$$

2. Oblicz całkę

$$\int \int_D (xy + y) dx dy$$

po obszarze  $D$  będącym wnętrzem trójkąta o wierzchołkach  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 0)$ .

3. Oblicz całkę

$$\int \int \int_D x^2 y^2 z^2,$$

gdzie obszar  $D$  jest sześcianem o wierzchołkach w punktach  $(-1, -1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ .

4. Zmień kolejność całkowania w całce

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x, y).$$

(Wskazówka: potnij obszar całkowania na paski równoległe do osi  $Ox$ .)

5. Zmień kolejność całkowania i pokaż, że można zapisać poniższą całkę w postaci całki jednokrotnej:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy f(y)$$

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

6. Poprzez odpowiednią zamianę zmiennych zamień całki dwukrotne na jednokrotne:

$$I_1 = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \quad I_2 = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2}) dx dy$$

7. Korzystając ze współrzędnych sferycznych oblicz powierzchnię wycinka sfery między południkami  $0^\circ$  i  $30^\circ$  oraz równoleżnikami  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .
8. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli, powstałej z kuli przez cięcie wzdłuż płaszczyzny równika i płaszczyzny równoleżnika  $0^\circ$ .
9. Znajdź środek ciężkości stożka o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $a$ .
10. \* **Współrzędne toroidalne.** Torus dany jest parametrycznie jako

$$\begin{aligned}x &= (a + \rho \cos \phi) \cos \alpha, \\y &= (a + \rho \cos \phi) \sin \alpha, \\z &= \rho \sin \phi, \\ \phi &\in [0, 2\pi], \alpha \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R]\end{aligned}$$

gdzie  $R < a$ . Zrób stosowny rysunek i podaj interpretację  $a$ ,  $R$ , oraz kątów  $\phi$  i  $\alpha$ . Pokaż, że jacobian przekształcenia wynosi

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \alpha)} \right| = \rho(a + \rho \cos \phi).$$

Oblicz pole powierzchni i objętość torusa z pomocą całek po zmiennych  $\rho, \phi, \alpha$ . Oblicz w analogiczny sposób położenie środka ciężkości połowy torusa powstałej z przecięcia wzdłuż płaszczyzny  $y = 0$  (tj.  $\alpha \in [0, \pi]$ ).