Zestaw 11: Całki wielowymiarowe, układy współrzędnych

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całki wielowymiarowe

$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_0^3 dy\, xy^2,\ I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(x+y+z),\ I_3 = \int_0^\pi dx \int_0^1 dy\, y\cos(xy).$$

2. Oblicz całkę

$$\int\int_D (xy+y)dxdy$$

po obszarze D będącym wnętrzem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,0)$.

3. Oblicz całkę

$$\int\int\int_D x^2y^2z^2,$$

gdzie obszar D jest sześcianem o wierzchołkach w punktach $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$.

4. Zmień kolejność całkowania w całce

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x,y).$$

(Wskazówka: potnij obszar całkowania na paski równoległe do osi Ox.)

5. Poprzez odpowiedni dobór współrzędnych zamień całki dwukrotne na jednokrotne:

$$I_1 = \int_{x^2+y^2\le R^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, I_2 = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2\le 1} f(\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2})dxdy$$

6. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli, powstałej z kuli przez cięcie wzdłuż płaszczyzny równika i płaszczyzny równoleżnika 0^o.

7. Znajdź środek ciężkości stożka o wysokości h i promieniu podstawy a.

8. Korzystając ze współrzędnych sferycznych oblicz powierzchnię wycinka sfery między południkami 0^o i 45^o oraz równoleżnikami 30^o i 90^o.

9. *Współrzędne toroidalne.* Torus dany jest parametrycznie jako

$$\begin{aligned} x &= (a+\rho\cos\phi)\cos\alpha, \\ y &= (a+\rho\cos\phi)\sin\alpha, \\ z &= \rho\sin\phi, \\ & \phi\in[0,2\pi],\ \alpha\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,R] \end{aligned}$$

gdzie $R < a$. Zrób stosowny rysunek i podaj interpretację a, R, oraz kątów ϕ i α. Pokaż, że jakobian przekształcenia wynosi

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\alpha)}\right| = \rho(a+\rho\cos\phi).$$

Oblicz objętość torusa z pomocą całek po zmiennych ρ, ϕ, α. Oblicz w analogiczny sposób położenie środka ciężkości połowy torusa powstałej z przecięcia wzdłuż płaszczyzny $y = 0$ (tj. $\alpha \in [0, \pi]$).