**Termin: 29.05.07** Analiza Mat., informatyka, 2006/2007

*Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.*

# **Zestaw 10 - informatyka:** Całki wielowymiarowe, liniowe, powierzchniowe, układy współrzędnych

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całki wielowymiarowe

$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_0^3 dy\, xy^2,\ I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(x+y+z),\ I_3 = \int_0^{\pi} dx \int_0^1 dy\, y\cos(xy).$$

2. Oblicz całkę

$$\int\int_D (xy+y)dxdy$$

   po obszarze $D$ będącym wnętrzem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,0)$.

3. Oblicz całkę

$$\int\int\int_D x^2y^2z^2,$$

   gdzie obszar $D$ jest sześcianem o wierzchołkach w punktach $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$.

4. Zmień kolejność całkowania w całce

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x,y).$$

   (Wskazówka: potnij obszar całkowania na paski równoległe do osi $Ox$.)

5. Zmień kolejność całkowania w poniższych całkach i pokaż, że można je zapisać w postaci całek jednokrotnych:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy f(y),$$

$$J = \int_a^A dx \int_b^B dy \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

6. Poprzez odpowiedni dobór układu współrzędnych zamień całki dwukrotne na jednokrotne:

$$I_1 = \int_{x^2+y^2\le R^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, I_2 = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2\le 1} f(\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2})dxdy$$

7. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli, powstałej z kuli przez cięcie wzdłuż płaszczyzny równika i płaszczyzny równoleżnika $0^o$.

8. Oblicz całki krzywoliniowe zorientowane

   (a) $I_1 = \int_C xdx + (1+y)dy$, gdzie $C$ jest krzywą biegnącą wzdłuż prostej od punktu $(0,0)$ do punktu $(2,1)$.

   (b) $I_2 = \int_K y^2dx + x^2dy$, gdzie $K$ jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = b\cos t$, oraz $t \in [0,\pi]$.

   (c) $I_3 = \int_L -ydx + xdy - 2ydz$, gdzie $L$ jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = bt$ (spirala), oraz $t \in [0,2\pi]$.

   (d) $I_4 = \int_P x^2dx + \sqrt{xy}dy$, gdzie $P$ jest ćwiartką okręgu od punktu $(x,y) = (0,R)$ do punktu $(x,y) = (R,0)$, tj. przebieganą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

   (e) $I_5 = \int_S (2y - xy)dx + (x - x^2y^2)$, gdzie $S$ jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $(0,0)$ do punktu $(a,a^2)$.

9. Oblicz całki krzywoliniowe niezorientowane

   (a) $J_1 = \int_L xyds$, gdzie $L$ jest krzywą o równaniu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0,2\pi]$, a $ds = \sqrt{x(t)'^2 + y(t)'^2}dt$ jest różniczką długości (naszkicuj krzewą!).

   (b) $J_2 = \int_C ds$, gdzie $L$ jest linią śrubową $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \lambda t$, $t \in [0,2\pi]$.

10. Z pomocą wzoru Greena oblicz całkę

$$\oint_K (x+y)^2dx - (x^2+y^2)dy,$$

gdzie $K$ jest dodatnio zorientowanym konturem będącym brzegiem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$,0, 1) i $(1,0)$.

11. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2 - 5yz)dx + (y^3 - 5xz)dy + (z^3 - 5xy)dz$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz.

12. Korzystając ze wzoru Gaussa oblicz całkę

$$\int_S (x-y)dydz + (y-z)dxdz + (z-x)dxdy,$$

gdzie $S$ jest zewnętrzną stroną (pobocznica plus podstawa) stożka $x^2+y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$.

13. Korzystając ze wzoru Stokesa zamień całkę

$$\oint_L x^2y^2dx + zdy - ydz,$$

gdzie $L$ jest okręgiem $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, na całkę po zewnętrznej stronie półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.