Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 10 - fizyka: Całki wielowymiarowe, liniowe, powierzchniowe, układy współrzędnych

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całki wielowymiarowe

$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_0^3 dy\, xy^2,\ I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(x+y+z),\ I_3 = \int_0^{\pi} dx \int_0^1 dy\, y\cos(xy).$$

2. Oblicz całkę

$$\int\int_D (xy+y)dxdy$$

   po obszarze D będącym wnętrzem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,0)$.

3. Oblicz całkę

$$\int\int\int_D x^2y^2z^2,$$

   gdzie obszar D jest sześcianem o wierzchołkach w punktach $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$.

4. Zmień kolejność całkowania w całce

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x,y).$$

   (Wskazówka: potnij obszar całkowania na paski równoległe do osi Ox.)

5. Zmień kolejność całkowania w poniższych całkach i pokaż, że można je zapisać w postaci całek jednokrotnych:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy f(y),$$

$$J = \int_a^A dx \int_b^B dy \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

6. Poprzez odpowiedni dobór układu współrzędnych zamień całki dwukrotne na jednokrotne:

$$I_1 = \int_{x^2+y^2\le R^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, I_2 = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2\le 1} f(\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2})dxdy$$

7. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli, powstałej z kuli przez cięcie wzdłuż płaszczyzny równika i płaszczyzny równoleżnika 0^o.

8. Znajdź środek ciężkości stożka o wysokości h i promieniu podstawy a.

9. Korzystając ze współrzędnych sferycznych oblicz powierzchnię wycinka sfery między południkami 0^o i 45^o oraz równoleżnikami 30^o i 90^o.

10. *Współrzędne toroidalne.* Torus dany jest parametrycznie jako

$$\begin{aligned} x &= (a + \rho\cos\phi)\cos\alpha, \\ y &= (a + \rho\cos\phi)\sin\alpha, \\ z &= \rho\sin\phi, \\ & \phi \in [0, 2\pi],\ \alpha \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, R] \end{aligned}$$

gdzie $R < a$. Zrób stosowny rysunek i podaj interpretację a, R, oraz kątów ϕ i α. Pokaż, że jakobian przekształcenia wynosi

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \alpha)}\right| = \rho(a + \rho\cos\phi).$$

Oblicz objętość torusa z pomocą całek po zmiennych ρ, ϕ, α. Oblicz w analogiczny sposób położenie środka ciężkości połowy torusa powstałej z przecięcia wzdłuż płaszczyzny $y = 0$ (tj. $\alpha \in [0, \pi]$).

11. Znajdź jakobiany J_1, J_2 i J_3, następnie z pomocą wzoru na pole powierzchni w dowolnych współrzędnych (wykład) wyprowadź wzór na pole powierzchni torusa i połowy torusa z poprzedniego zadania.

12. Znajdź momenty bezwładności torusa względem osi Oz i Ox.

13. Celem sprawdzenia, znajdź objętość i pole powierzchni torusa z poprzednich zadań z pomocą reguł Guldina.

14. Oblicz całki krzywoliniowe zorientowane

    (a) $I_1 = \int_C xdx + (1 + y)dy$, gdzie C jest krzywą biegnącą wzdłuż prostej od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2, 1)$.

    (b) $I_2 = \int_K y^2dx + x^2dy$, gdzie K jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = b\cos t$, oraz $t \in [0, \pi]$.

    (c) $I_3 = \int_L -ydx + xdy - 2ydz$, gdzie L jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = bt$ (spirala), oraz $t \in [0, 2\pi]$.

    (d) $I_4 = \int_P x^2dx + \sqrt{xy}dy$, gdzie P jest ćwiartką okręgu od punktu $(x, y) = (0, R)$ do punktu $(x, y) = (R, 0)$, tj. przebieganą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

    (e) $I_5 = \int_S(2y - xy)dx + (x - x^2y^2)$, gdzie S jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $(0, 0)$ do punktu (a, a^2).

15. Oblicz całki krzywoliniowe niezorientowane

   (a) $J_1 = \int_L xyds$, gdzie L jest krzywą o równaniu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a $ds = \sqrt{x(t)'^2 + y(t)'^2}dt$ jest różniczką długości (naszkicuj krzewą!).

   (b) $J_2 = \int_C ds$, gdzie L jest linią śrubową $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \lambda t$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $J_3 = \int_A x^2 y$, gdzie A jest łukiem elipsy leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

16. Z pomocą wzoru Greena oblicz całkę

$$\oint_K (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

gdzie K jest dodatnio zorientowanym konturem będącym brzegiem trójkata o wierzchołkach $(-1, 0)$,$0, 1)$ i $(1, 0)$.

17. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} x^2 dx + (y^2 + 2) dy$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz. Znajdź odpowiedni potencjał.

18. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2 - 5yz)dx + (y^3 - 5xz)dy + (z^3 - 5xy)dz$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz.

19. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_S (x^2 + y^2) dS,$$

gdzie S jest półsferą $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

20. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

21. Korzystając ze wzoru Gaussa oblicz całkę

$$\int_S (x-y)dydz + (y-z)dxdz + (z-x)dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną (pobocznica plus podstawa) stożka $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$.

22. Korzystając ze wzoru Stokesa zamień całkę

$$\oint_L x^2y^2dx + zdy - ydz,$$

gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, na całkę po zewnętrznej stronie półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$.

23. Korzystając ze wzoru Stokesa oblicz pracę W wykonaną przez siłę

$$\vec{F} = (x + z, x - y + 2z, y - x)$$

po drodze zamkniętej biegnącej wokół trójkąta $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (pamiętamy, że $dW = F_1dx + F_2dy + F_3dz$). Czy siła jest potencjalna?