[wersja z 14 V 2006]

Analiza Matematyczna
część 5

$\Rightarrow$

Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki

Akademia Świętokrzyska 2005/2006

Wojciech Broniowski

Równania różniczkowe

Definicje, klasyfikacja

Równanie różniczkowe zwyczajne ma ogólną postać $F(x, y(x), y'(x), \ldots) = 0,$ gdzie ... oznaczają możliwość wystąpienia wyższych pochodnych. Zmienna x jest zmienną niezależną, a $y(x)$ jest szukaną funkcją. Rząd równania to najwyższy rząd pochodnej. W szczególnosci, równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma postać $F(x, y, y') = 0.$

Równanie różniczkowe cząstkowe ma ogólną postać

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}, \ldots) = 0$$

(równaniami cząstkowymi nie bedziemy się zajmować)

Uklad równań różniczkowych zwyczajnych na n funkcji $y_i(x)$ ma postać

$$F_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x), \ldots) = 0, \; i = 1, \ldots, n$$

Model fizyczny/ekonomiczny/... $\rightarrow$ r. różniczkowe

Przykład: oscylator harmoniczny

$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0 -$ r. mechaniki

$f = ma -$ prawo Newtona

$-kx(t) = m\ddot{x}(t), \quad k, \ m > 0, \quad \dfrac{k}{m} = \omega^2$ – oscylator harmoniczny

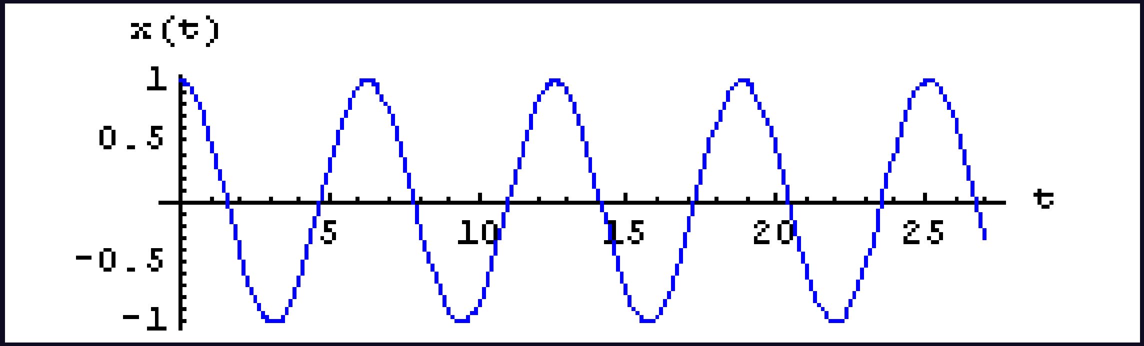
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) -$ r. różniczkowe do rozwiązania

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ – ogólna postać rozwiązania

Sprawdzenie: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \ \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

Warunki początkowe: $x(t) = x_0, \ \dot{x}(t) = v_0 \rightarrow A = x_0, B\omega = v_0$

$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) -$ rozwiązanie spelniające war. początkowe



Przykład: rozpad promieniotwórczy / wzrost populacji

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0$$

(ubytek na jedn. czasu proporcjonalny do liczby atomów)

Rozw.: $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) -$ liczba nierozpadlych atomów po czasie t

$\lambda \to -\lambda$

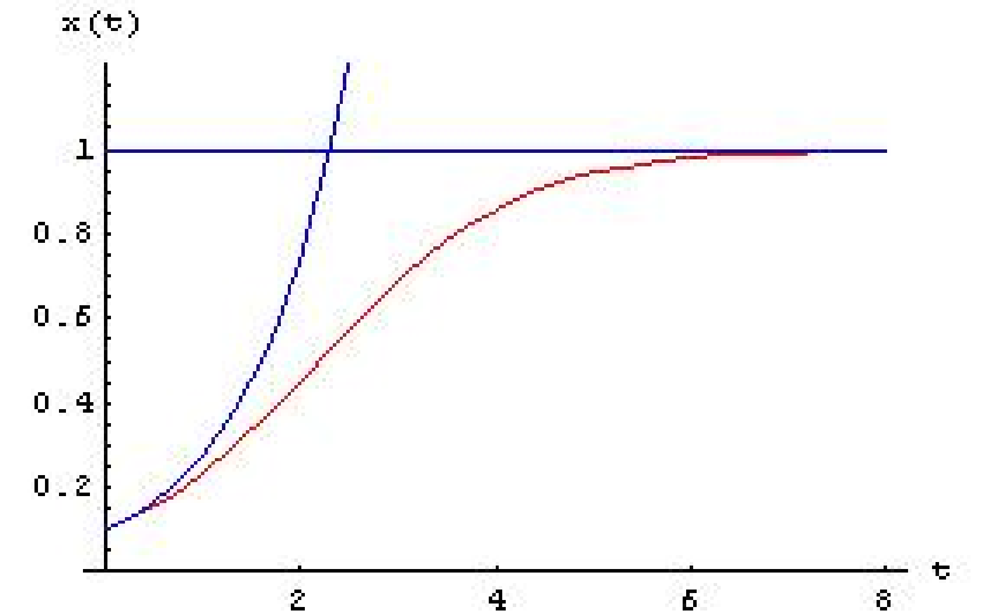
$N(t) = N_0 \exp(\lambda t) -$ populacja w czasie t, prawo wzrostu Malthusa

Bardziej realistyczne równanie:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)[1 - N(t)/N^*],$$

$x = N/N^* \to \dot{x} = \lambda x(1-x)$

(nieliniowość!)



Ogólne uwagi i twierdzenia

Rozwiązanie $y(x)$ r.r. nazywamy calką r.r., a wykres $(x, y(x))$ krzywą calkową.

Calka ogólna równania rzędu pierwszego jest postaci $y(x) = f(x, C)$, gdzie C jest stalą. Stalą tę wyznacza się z warunku poczatkowego $y_0 = f(x_0, C)$.

Rozwiązanie osobliwe to rozwiązanie, którego nie można uzyskać z postaci $f(x, C)$ dla żadnej wartosci C.

Przyklad: $y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)' = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C,\ x + C \geq 0$

$$y(x) = \begin{cases} (x+C)^2, & x \geq -C \\ 0, & x < -C \end{cases}$$

$y(x) = 0 -$ rozw. osobliwe

Jednoznaczność rozwiązań

Tw. (o jednoznacznosci rozwiązań) R. postaci $y' = f(x,y)$,

$f(x,y)$ i $f_y(x,y)$ ciagle w pewnym otoczeniu $(x_0, y_0) \Rightarrow$

$\exists$ otoczenie $(x_0 - a,\ x_0 + a)$, w którym jest okreslona dokladnie

jedna funkcja $\phi(x)$ o wlasnociach: $\phi'(x) = f(x, \phi(x)),\ \phi(x_0) = y_0$.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$p(y)y'(x) = q(x) \Rightarrow p(y)\frac{dy}{dx} = q(x) \Rightarrow p(y)dy = q(x)dx \Rightarrow \int p(y)dy = \int q(x)dx$$

$P(y) = \int p(y)dy,\quad Q(x) = \int q(x)dx,\qquad P(y) = Q(x) + C,\ C -$ pewna stala

Rozwiązanie jest dane w postaci uwiklanej!

D: $\frac{d}{dx}\left(P(y(x)) - Q(x) - C\right) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}P(y) - \frac{d}{dx}Q(x) = y'\,p(y) - q(x) = 0$

Przyklad:

$$y^2\frac{dy(t)}{dt} = t \Rightarrow y^2 dy = tdt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3C}$$

$$C' = 3C,\ y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C'}$$

Warunek początkowy: $y(t_0) = y_0 \Rightarrow \frac{y_0^3}{3} = \frac{t_0^2}{2} + \frac{C'}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) + y_0^3}$

Z nieskończonej liczby rozwiązań z parametrem C warunek początkowy wybiera jedno!

Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = t + C \Rightarrow \left|\frac{x}{x-1}\right| = \exp(t+C) \Rightarrow$$

$$\left|1 - \frac{1}{x}\right| = \exp(-C)\exp(-t) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = C'\exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - C'\exp(-t)}$$

war. początkowy: $x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t)}$

$$1 + \frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0 - 1} \Rightarrow t \neq -\ln\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

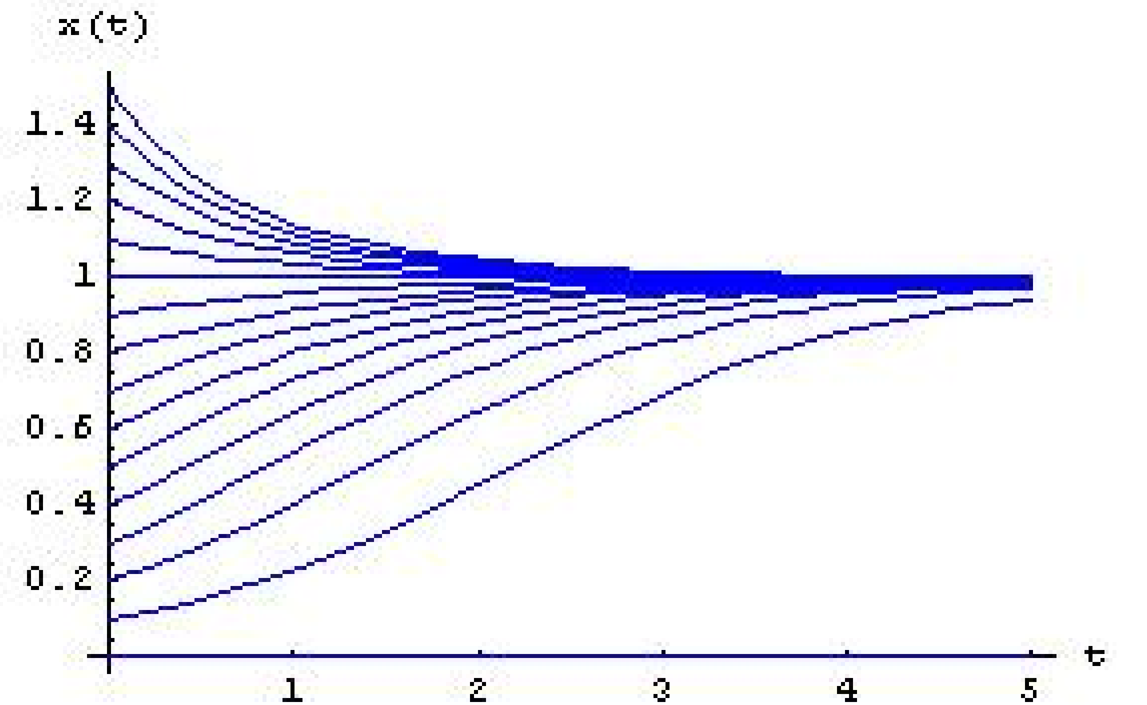
$\forall x_0 \neq 0 : \lim_{t\to\infty} x(t) = 1$

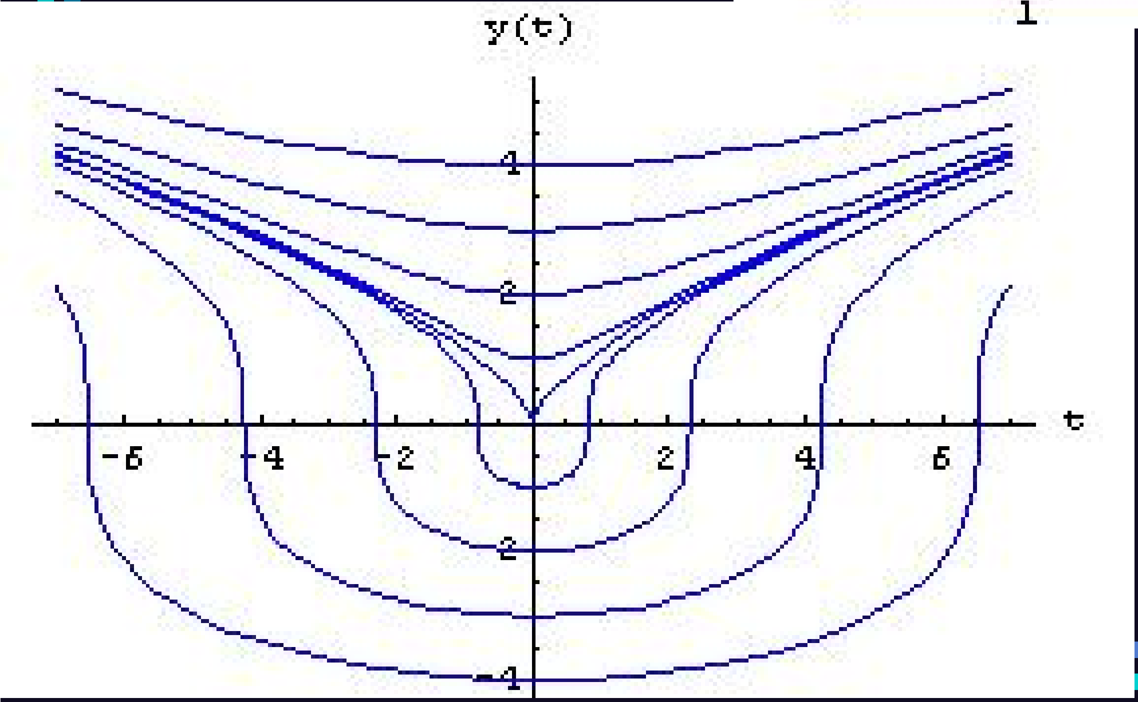
Jednoparametrowe rodziny krzywych

R. populacji

$$\dot{x} = x(1-x)$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t)}$$





Inne równanie

$$y^2\dot{y} = t$$

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + y_0^3}$$

Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = f(ax+by+c)$$

$$u = ax+by+c$$

$$u' = a+by' = a+bf(u)$$

$$\frac{u'}{a+bf(u)} = 1$$

R. jednorodne w x i y:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u(x) = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u'x+u$$

$$u'x+u = f(u)$$

$$\frac{u'}{f(u)-u} = \frac{1}{x},\quad f(u) \neq u,\ x \neq 0$$

Równanie zupełne

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Wówczas istnieje $F(x,y):\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=P,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$

$$\frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=P+Qy'=0\Rightarrow F(x,y)=C$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\Rightarrow F(x,y)=\int P(x,y)dx+\phi(y)=\chi(x,y)+\phi(y)$$

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial \chi(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial \phi(y)}{\partial y}=Q-$ daje się rozwiązać dla $\phi(y)$

Przyklad:

$$(4x^3 + 6xy^3)dx + (9x^2y^2 + 3)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 18xy^2, \frac{\partial F}{\partial x} = P = 4x^3 + 6xy^3, \frac{\partial F}{\partial y} = Q = 9x^2y^2 + 3$$

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx = \int (4x^3 + 6xy^3)dx = x^4 + 3x^2y^3 + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 9x^2y^2 + \phi'(y) = Q = 9x^2y^2 + 3 \Rightarrow \phi'(y) = 3 \Rightarrow \phi(y) = 3y + c$$

$$F(x,y) - C = x^4 + 3x^2y^3 + 3y + C' = 0$$

Rozwiązanie: $x^4 + 3x^2y^3 + 3y + C' = 0$

Czynnik całkujący

Czynnik calkujący to funkcja $\mu(x,y)$: $\mu(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)Q(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ jest r. zupelnym, czyli $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$. Funkcja taka istnieje zawsze, ale tylko w niektórych przypadkach można ją znaleźć w prosty sposób, np. gdy jest postaci $\mu(x)$, $\mu(y)$, lub $f(x)g(y)$

Przyklad: $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y-3x^2$. Szukamy $\mu(x)$: $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(1-x^2y))=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(x)x^2(y-x))\Rightarrow$

$-x^2\mu(x)=\mu'(x)x^2(y-x)+\mu(x)(2xy-3x^2)\Rightarrow\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\dfrac{2}{x}\Rightarrow\mu(x)=\dfrac{c}{x^2}$

(przyjmujemy $c=1$). Mnożymy r.: $(x^{-2}-y)dx+(y-x)dy=0$, co jest r. zupelnym.

Równanie liniowe

Jednorodne: $y' = p(x)y \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = p(x) \Rightarrow \ln|y| = \int p(x)dx + C$

$y = C\exp\left(\int p(x)dx\right)$ lub $y = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$

Niejednorodne: $y' = p(x)y + q(x)$.

Różnica dwóch rozwiązań r. niejednorodnego spelnia r. jednorodne:

$y' = y_2' - y_1' = (p(x)y_2 + q(x)) - (p(x)y_1 + q(x)) = p(x)(y_2 - y_1) = p(x)y$

$\Rightarrow$ rozw. ogólne r. niejednorodnego jest suma rozw. szczególnego r. niejednorodnego i rozw. ogólnego r. jednorodnego

Metoda I: odgadniecie rozw. szczególnego r. niejednorodnego.

Metoda II: uzmiennianie stalej.

Uzmiennianie stałej

$$y' = p(x)y + q(x), \quad P(x) = \int p(x)dx, \quad y(x) = C(x)\exp(P(x))$$

$$C'(x)\exp(P(x)) + C(x)p(x)\exp(P(x)) = p(x)C(x)\exp(P(x)) + q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x)\exp(-P(x)) \Rightarrow C(x) = \int q(x)\exp(-P(x))dx \Rightarrow$$

$$y(x) = \int q(x)\exp(-P(x))dx \cdot \exp(P(x)) - \text{ rozw. szczególne}$$

Dodajemy rozw. ogólne r. jednorodnego

$$y(x) = \left(c + \int q(x)\exp(-P(x))dx\right) \cdot \exp(P(x)) - \text{ szukane rozw. ogólne}$$

Przykład: $y' = xy - x\exp\left(x^2\right)$

R. jedn. : $y' = xy, \quad y = C\exp(\int xdx), \quad y = C(x)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$y(x) = \left(c - \int x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)dx\right) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(c - \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Równanie Bernouilliego

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$$

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z'(x) = (1-\alpha)p(x)z(x) + (1-\alpha)q(x)$$

Równanie typu F(x,y',y'')=0

Podstawienie $z = y'$, co daje ukad równan $z = y'$, $F(x, z, z')$

Układy równań różniczkowych

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \quad\quad ... \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (*)$$

1. Jednoznacznosć rozwiązania
2. Zależnosć od warunku początkowego
3. Stabilnosć ("mala zmiana warunku poczatkowego powoduje male zmiany rozwiazania dla duzych t")

Tw. $\vec{f} : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{K}(\vec{x}_0, r) \to R^n$ ciągla ($\alpha > 0,\ r > 0$), oraz spelnia warunek Lipschitza, tzn.

$$\exists L > 0\ \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overline{K}(\vec{x}_0, r) : \left| \vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y}) \right| \le L \left| \vec{x} - \vec{y} \right| \Rightarrow$$

$\exists \delta > 0$ oraz dokladnie jedno rozwiazanie ukladu (*) $\vec{x} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \overline{K}(\vec{x}_0, r)$ spelniające warunek poczatkowy $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (lokalna jednoznacznosć).

(rozwiązanie zależy od n parametrów - calkowity rząd ukladu równań)

Jeżeli $\vec{f}$ ma ciągle pochodne cząstkowe, to spelnia war. Lipschitza, więc uklad z taką funkcją $\vec{f}$ ma jednoznaczne rozwiązanie z danym warunkiem początkowym.

Jesli $\vec{f}$ nie spelnia war. Lipschitza, to równanie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie, np. $x' = \frac{3}{2} x^{1/3}$ ma dwa rozwiązania: $x_1(t) = 0$ (osobliwe) i $x_2(t) = t^{3/2}$. Obydwa spelniają war. początkowy $x(0) = 0$.

Przedlużanie rozwiązania: $\vec{x}_1 : (a,b) \to R^n$, $\vec{x}_2 : (c,d) \to R^n$, $(a,b) \subset (c,d)$, wtedy $\vec{x}_2$ jest przedlużeniem $\vec{x}_1$. Rozwiązanie (*) jest wysycone wzbiorze A, jeżeli jedynym jego przedlużeniem w zbiorze A jest ono samo.

Tw. $\vec{f} : A = (a,b) \times U \to R^n$ ciągla i spelniająca warunek Lipschitza w pewnym otoczeniu każdego punktu A. Wtedy dla dowolnego punktu $(t_0, \vec{x}_0) \in A$ istnieje dokladnie jedno rozwiązanie wysycone spelniajace $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$.

R. r. liniowe rzędu drugiego

$ay''+by'+c=f(x),\ \ a\neq 0,\ a,b,c-\text{stale}$

R. jednorodne: $ay''+by'+cy=0.$

Podstawiamy $y=\exp(rx)\ \Rightarrow\ ar^2+br+c=0-$ (r. charakterystyczne), $\Delta=b^2-4ac$

1) $\Delta>0,\ \ r_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},\ y=C_1\exp(r_1x)+C_2\exp(r_2x)$

2) $\Delta=0,\ \ r=\dfrac{-b}{2a},\ y=\left(C_1+xC_2\right)\exp(rx)$

3) $\Delta<0,\ \ \alpha=\dfrac{-b}{2a},\ \ \beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a},\ y=\exp(\alpha x)\left[C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)\right]$

(lub $y=C_1\exp(r_1x)+C_2\exp(r_2x)$, gdzie $r_{1/2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Przyklad: uklad RLC, Q – ladunek na kondensatorze

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0,\ \ \Delta=R^2-4\frac{L}{C},\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$R=0\Rightarrow Q(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$

R. niejednorodne - uzmiennianie C_1 i C_2 lub odgadnięcie

Przyklad: wymuszony obwód RLC, $f(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$, $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Odgadujemy rozw. szczególne ukladu jednorodnego:

$Q(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, podstawienie $\rightarrow$

$$\left[-LA\omega_0^2 + RB\omega_0 + \frac{A}{C}\right]\cos(\omega_0 t) + \left[-LB\omega_0^2 - RA\omega_0 + \frac{B}{C}\right] = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} -LA\omega_0^2 + RB\omega_0 + \dfrac{A}{C} = U_0 \\ -LB\omega_0^2 - RA\omega_0 + \dfrac{B}{C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{U_0}{L} \dfrac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \dfrac{R^2}{L^2}\omega_0^2} \\ B = \dfrac{U_0}{L^2} \dfrac{R\omega_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \dfrac{R^2}{L^2}\omega_0^2} \end{cases}$$

To rozwiązanie dodajemy do rozw. ogólnego równania jednorodnego.

Układ równań liniowych

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t),\ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Tw: $t_0 \in (a,b), \vec{x}_0 \in R^n, a_{ij}(t) -$ ciagle $\Rightarrow \exists$jedyne rozwiązanie (*) spelniajace $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$. Rozwiązanie jest okreslone w calym przedziale (a,b).

R. Różniczkowe cząstkowe

Szereg Fouriera

Transformata Fouriera