[wersja z 21 IV 2008]

Analiza Matematyczna

część 4

Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki

Akademia Świętokrzyska 2007/2008

Wojciech Broniowski

Równania różniczkowe

Definicje, klasyfikacja

Równanie różniczkowe zwyczajne ma ogólną postać $F(x, y(x), y'(x), \ldots) = 0,$ gdzie ... oznaczają możliwość wystąpienia wyższych pochodnych. Zmienna x jest zmienną niezależną, a $y(x)$ jest szukaną funkcją. Rząd równania to najwyższy rząd pochodnej. W szczególnosci, równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma postać $F(x, y, y') = 0.$

Równanie różniczkowe cząstkowe ma ogólną postać

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}, \ldots) = 0$$

(równaniami cząstkowymi nie bedziemy się zajmować)

Uklad równań różniczkowych zwyczajnych na n funkcji $y_i(x)$ ma postać

$$F_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x), \ldots) = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

Model fizyczny/ekonomiczny/meteorologiczny... $\rightarrow$ r. różniczkowe

Przykład: oscylator harmoniczny

$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0 -$ r. mechaniki

$f = ma -$ prawo Newtona

$-kx(t) = m\ddot{x}(t), \;\; k, \; m > 0, \;\; \dfrac{k}{m} = \omega^2 -$ oscylator harmoniczny

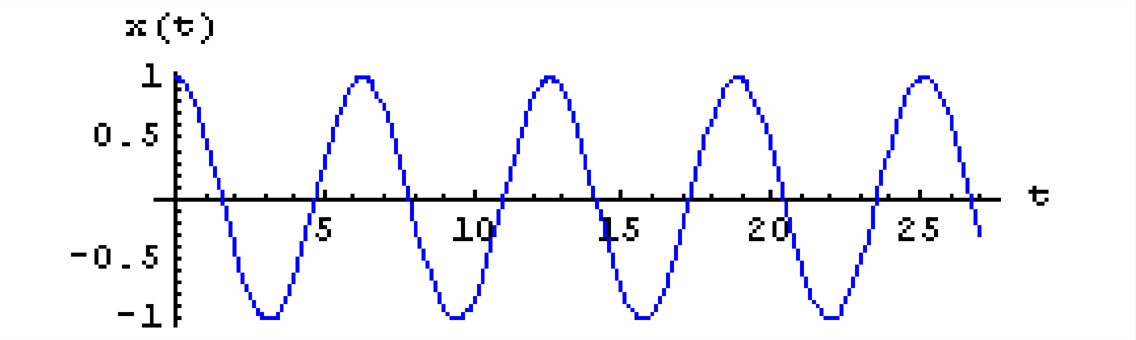
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) -$ r. różniczkowe do rozwiązania

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) -$ ogólna postać rozwiązania

Sprawdzenie: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \; \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

Warunki początkowe: $x(t) = x_0, \; \dot{x}(t) = v_0 \to A = x_0, B\omega = v_0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) -$ rozwiązanie spelniające war. początkowe



Przykład: rozpad promieniotwórczy / wzrost populacji

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0$$

(ubytek na jedn. czasu proporcjonalny do liczby atomów)

Rozw.: $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) -$ liczba nierozpadlych atomów po czasie t

$\lambda \to -\lambda$

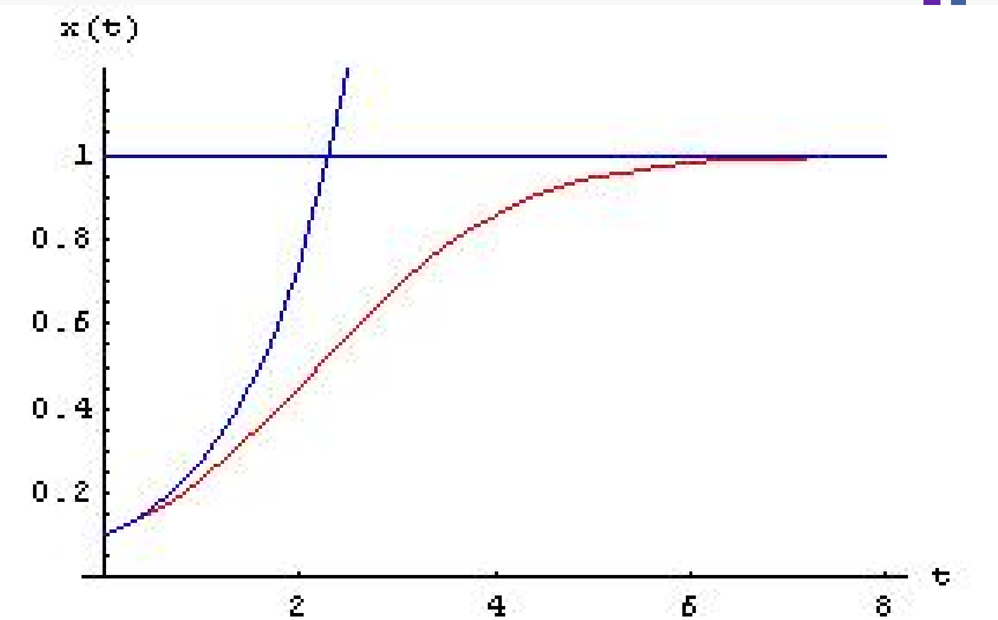
$N(t) = N_0 \exp(\lambda t) -$ populacja w czasie t, prawo wzrostu Malthusa

Bardziej realistyczne równanie:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)[1 - N(t)/N^*],$$

$x = N/N^* \to \dot{x} = \lambda x(1-x)$

(nieliniowość!)



Ogólne uwagi i twierdzenia

Rozwiązanie $y(x)$ r.r. nazywamy calką r.r., a wykres $(x, y(x))$ krzywą calkową.
Calka ogólna równania rzędu pierwszego jest postaci $y(x) = f(x, C)$, gdzie C jest stalą. Stalą tę wyznacza się z warunku poczatkowego $y_0 = f(x_0, C)$.
Rozwiązanie osobliwe to rozwiązanie, którego nie można uzyskać z postaci $f(x, C)$ dla żadnej wartosci C.

Przyklad: $y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)' = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C, \; x + C \geq 0$

$$y(x) = \begin{cases} (x+C)^2, & x \geq -C \\ 0, & x < -C \end{cases}$$

$y(x) = 0 -$ rozw. osobliwe

Jednoznaczność rozwiązań

Tw. (o jednoznacznosci rozwiązań) R. postaci $y' = f(x, y)$,

$f(x, y)$ i $f_y(x, y)$ ciagle w pewnym otoczeniu $(x_0, y_0) \Rightarrow$

$\exists$ otoczenie $(x_0 - a,\ x_0 + a)$, w którym jest okreslona dokladnie

jedna funkcja $\phi(x)$ o wlasnociach: $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $\phi(x_0) = y_0$.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$p(y)y'(x) = q(x) \Rightarrow p(y)\frac{dy}{dx} = q(x) \Rightarrow p(y)dy = q(x)dx \Rightarrow \int p(y)dy = \int q(x)dx$$

$P(y) = \int p(y)dy, \;\; Q(x) = \int q(x)dx, \qquad P(y) = Q(x) + C, \; C -$ pewna stala

Rozwiązanie jest dane w postaci uwiklanej!

D: $\frac{d}{dx}\left(P(y(x)) - Q(x) - C\right) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}P(y) - \frac{d}{dx}Q(x) = y'\,p(y) - q(x) = 0$

Przyklad:

$$y^2\frac{dy(t)}{dt} = t \Rightarrow y^2 dy = tdt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3C}$$

$$C' = 3C, \; y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C'}$$

Warunek początkowy: $y(t_0) = y_0 \Rightarrow \frac{y_0^3}{3} = \frac{t_0^2}{2} + \frac{C'}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) + y_0^3}$

Z nieskończonej liczby rozwiązań z parametrem C warunek początkowy wybiera jedno!

Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = t + C \Rightarrow \left|\frac{x}{x-1}\right| = \exp(t+C) \Rightarrow$$

$$\left|1-\frac{1}{x}\right| = \exp(-C)\exp(-t) \Rightarrow 1-\frac{1}{x} = C'\exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1-C'\exp(-t)}$$

war. początkowy: $x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1-x_0}{x_0}\exp(-t)}$

$$1+\frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0-1} \Rightarrow t \neq -\ln\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(w $t = -\ln\left(\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$ osobliwość)

$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

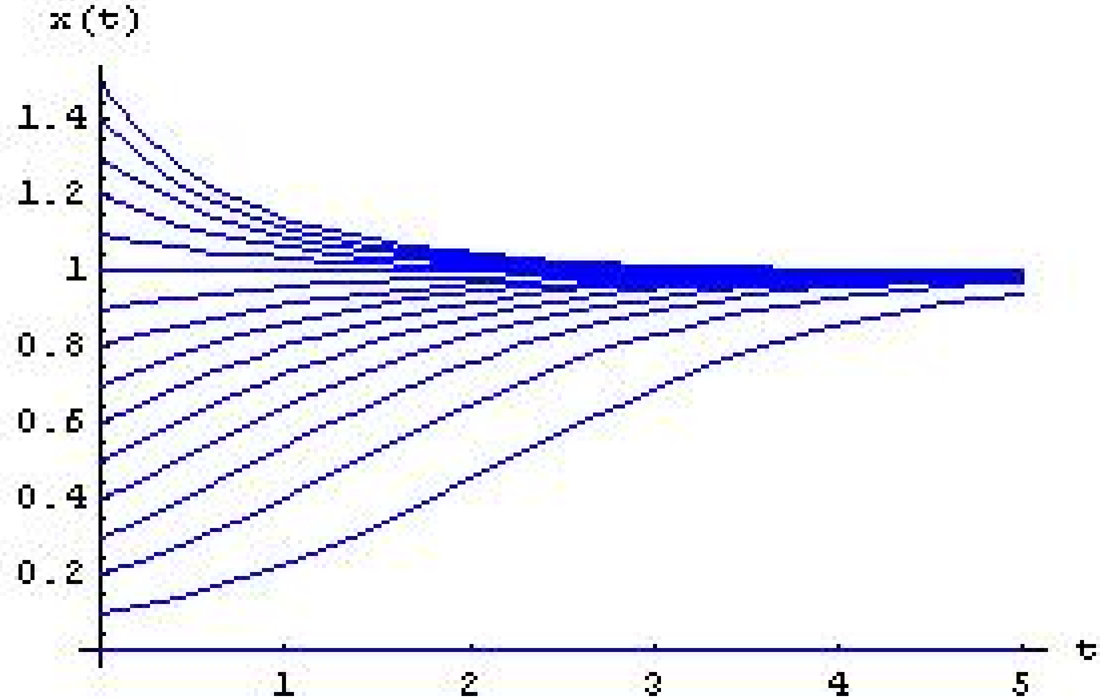
$\forall x_0 \neq 0 : \lim_{t\to\infty} x(t) = 1$

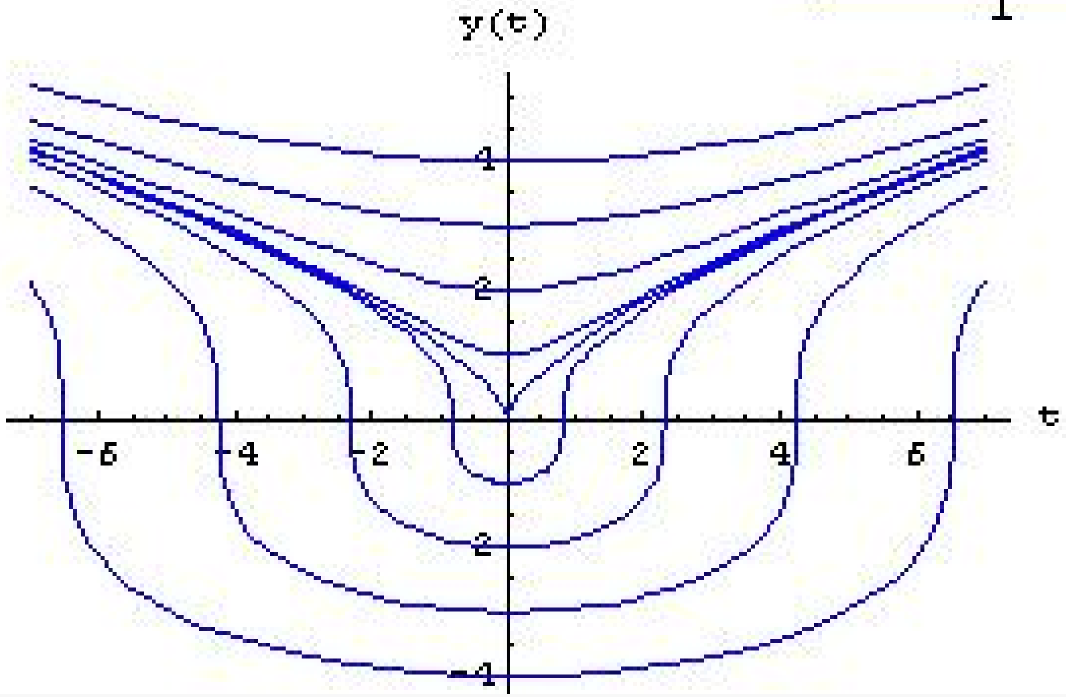
Jednoparametrowe rodziny krzywych

R. populacji

$$\dot{x} = x(1-x)$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t)}$$





$$y^2 \dot{y} = t$$

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + y_0^3}$$

Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$u = ax + by + c$$

$$u' = a + by' = a + bf(u)$$

$$\frac{u'}{a + bf(u)} = 1$$

R. jednorodne w x i y:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u(x) = \frac{y}{x}, \; y = ux, \; y' = u'x + u$$

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}, \quad f(u) \neq u, \; x \neq 0$$

Analiza funkcji wielu zmiennych

Przestrzeń wektorowa unormowana

$\|\cdot\| : X \to R$ - norma

1) $\vec{x} \neq 0 \Rightarrow \|\vec{x}\| > 0, \quad \|\vec{0}\| = 0$

2) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

3) $\|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|$

Tw. Przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią metryczną z metryką $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

D: $\rho : X \times X \to R_{+} \cup \{0\}$

(norma indukuje metrykę, ale metryka nie indukuje normy)

1) $\rho(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{0}\| = 0,$ 2) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x}),$

3) $\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$

Przyklad: $X = R^n, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (dlugosć wektora)

Pochodna cząstkowa

$$f : R^n \to R, \quad y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pochodna cząstkowa po x_k w punkcie $\vec{x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\delta}$$

Inna notacja: $f_{x_k}(\vec{x}),\ f_k(\vec{x})$

Pochodną funkcją cząstkową po x_k nazywamy funkcję

przyporządkowującą każdemu $\vec{x}$ wartość $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})$

Pochodna cząstkową po x_k wyliczamy tak samo, jak zwykłą pochodną, traktując pozostałe zmienne jako stałe

$$f(x, y, z) = z\sin(xy)$$

$$f_x(x, y, z) = zy\cos(xy),\ f_y(x, y, z) = zx\cos(xy),\ f_z(x, y, z) = \sin(xy)$$

Gradient

$f : R^n \to R$

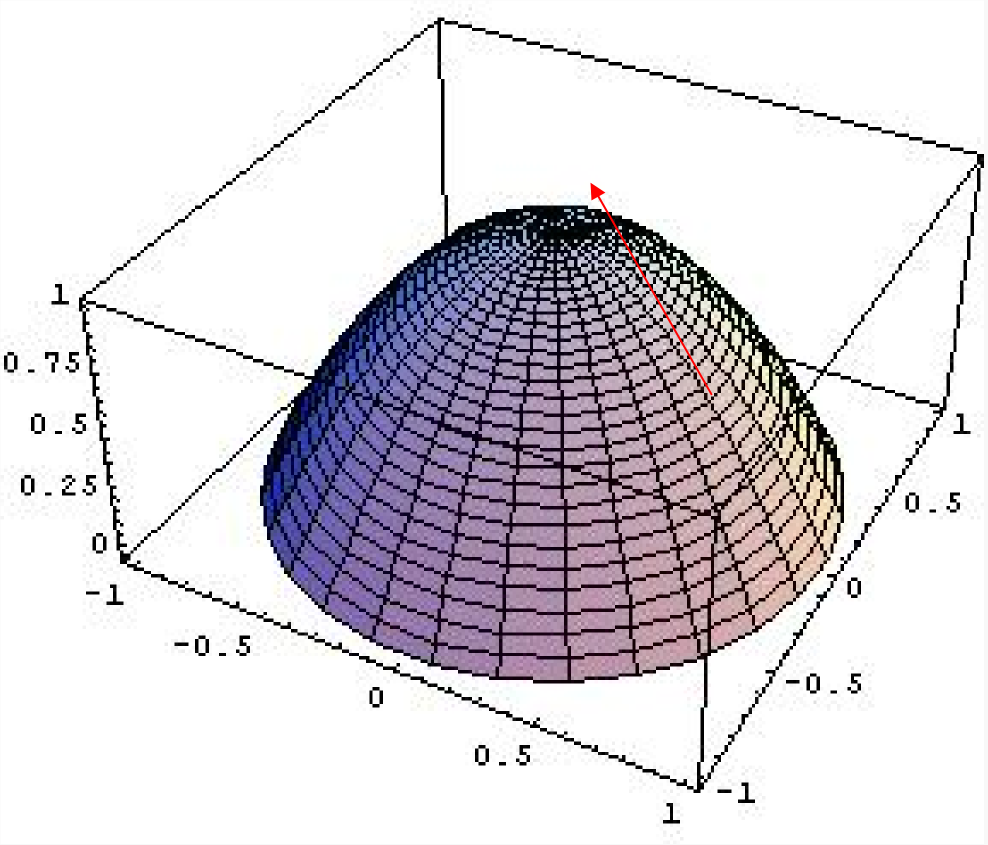
Gradientem funkcji f nazywamy wektor pochodnych cząstkowych, tj.

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)$$

Operator Nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \vec{\nabla} f(\vec{x}) = (2x, 2y)$$

Interpretacja geometryczna gradientu



Kierunek najszybszego wzrostu

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (-2x, -2y)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

Pochodna funkcji złożonej

$f : R^k \to R,\ \ g_i : R^m \to R,\ i = 1,...,k,$ posiadające pochodne cząstkowe w punkcie $\vec{x}$ i $y_k = g_k(x)$.

Oznaczamy $\left(f \circ g\right)(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}),...,g_k(\vec{x}))$

Tw. Pochodna cząstkowa funkcji $f \circ g$ wynosi

$$\frac{\partial\left(f \circ g\right)(\vec{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_i} \frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_j},\quad j = 1,...,k$$

Przyklad:

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2 + 2y_1,\ g_1(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + \beta + \gamma,\ g_2(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^2$$

$$\frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = (y_2 + 2)1 + y_1 2\alpha = \alpha^2 + 2\alpha(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \beta} = ...,\quad \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \gamma} = ...$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t),\beta(s,t),\gamma(s,t))}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t),\beta(s,t),\gamma(s,t))}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x,y),y)}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x,y),y)}{\partial y} = \frac{\partial \kappa}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

$U \subset R^n, \; f : U \to R, \; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ różniczkowalna

Pochodna cząstkowa drugiego rzędu: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f_{x_j x_i} = f_{ji}$

Tw. W U istnieją pochodne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, ciągle w $\vec{x}$. Wtedy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

D: $\Phi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h) + f(x, y)$

$\varphi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y), \; \psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y)$

Z Tw. Lagrange'a o wartosci sredniej $\exists \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2 \in (0,1)$:

$\Phi(x, y) = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y) = k\varphi_y(x, y+\theta_1 k)$

$\varphi_y(x, y+\theta_1 k) = f(x+h, y+\theta_1 k) - f(x, y+\theta_1 k) = hf_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)$

$\Phi(x, y) = hkf_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)$

Podobnie $\Phi(x, y) = \psi(x+h, y) - \psi(x, y)$ ...

$\Phi(x, y) = hkf_{yx}(x+\eta_2 h, y+\eta_1 k)$

$\Rightarrow f_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = f_{yx}(x+\eta_2 h, y+\eta_1 k)$. Z ciaglosci $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ $\square$

Macierz drugich pochodnych (hessian):

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Pochodna cząstkowa rzędu trzeciego: $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{kji}$

$$f : R^3 \to R,\ \ f(x,y,z) = x^2 + yx$$

$$f_x = 2x + y,\ f_y = x,\ f_{xx} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0$$

Wzór Taylora dla wielu zmiennych

$$f : U \subset R^2 \to R, \;\; P_0 = (x_0, y_0), \;\; P(x+h, y_0+k), \;\; \overline{P_0P} \subset U$$

$$d^j f(x,y)(h,k) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{\partial^j f(x,y)}{\partial x^{j-l} \; \partial y^l} h^{j-l} k^l \quad - \text{różniczka rzedu j (dwa wymiary)}$$

Tw. f ma ciągle pochodne cząstkowe rzędu n w $U \;\; \Rightarrow \exists \theta \in (0,1)$:

$$f(P) = f(P_0) + \frac{d^1 f(P_0)(h,k)}{1!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f(P_0)(h,k)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta))(h,k)}{n!}$$

Dla d wymiarów i $n = 2$ czlonów, $f : \; R^m \to R,$ mamy

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f(\vec{x} + \theta \vec{h})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

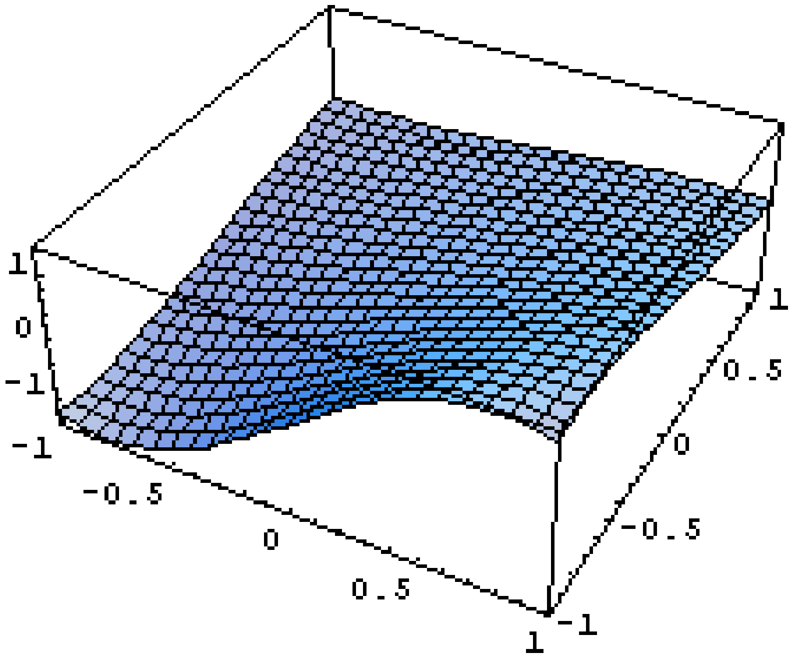
$f : U \subset R^d \to R -$ d-wymiarów

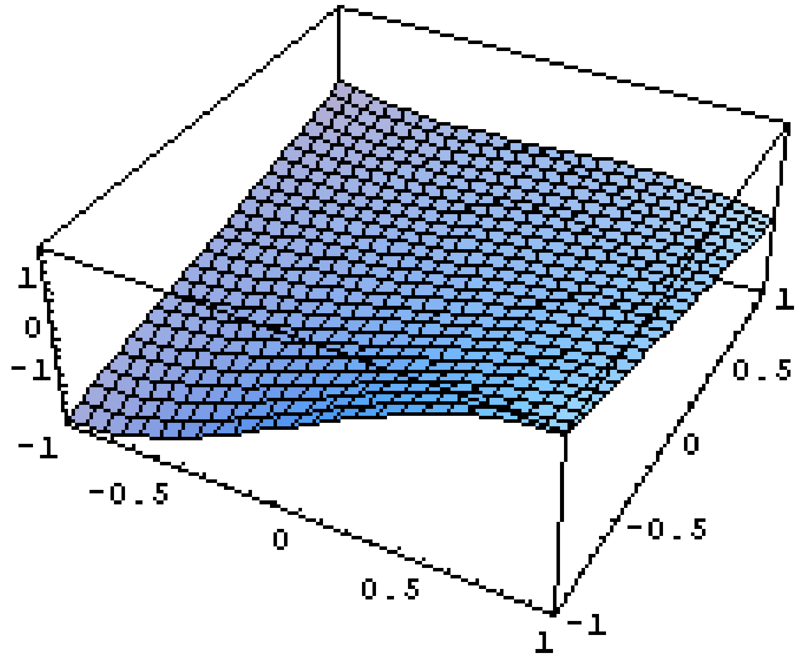
$$d^j f(\vec{x})(\vec{h}) = \sum_{i_1,\ldots,i_d=0}^{j} \frac{j!}{i_1! \ldots i_d!} \frac{\partial^j f(x_1, \ldots, x_d)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_d^{i_d}} h_1^{i_1} \ldots h_d^{i_d}, \;\; i_1 + \ldots + i_d = j$$

(wzór Taylora taki sam, jak wyżej)

Przyklad:

$$f(x) = \sin(x)\cos(xy)e^{-y} \approx x - xy - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6} - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{xy^4}{24} - \frac{7x^3 y^2}{12}$$





Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Tw. (warunek konieczny ekstremum lokalnego)

Jeżeli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie $\vec{x}_0$ i ma w tym pochodne cząstkowe, to $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0.$

Dowód: Ustalmy i, następnie rozważmy $g(x) = f(\ldots, x_{i-1}, x, x_{x+1}, \ldots).$

Funkcja $g(x)$ ma ekstremum dla $x = x_{0,i}$, a zatem z tw. o warunku koniecznym ekstremum dla funkcji jednej zmiennej mamy $\dfrac{dg(x)}{dx} = 0,$

co oznacza $\dfrac{\partial f(\ldots, x_{i-1}, x, x_{x+1}, \ldots)}{\partial x} = 0.$ □

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Forma kwadratowa to wyrażenie postaci

$$g(\vec{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i a_{ij} h_j \qquad \text{(np. dla } n=3\text{: } x^2 + y^2 - z^2 - 10zx + 2xy)$$

Forma kwadratowa jest dodatnio okreslona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) > 0$$

a ujemnie okreslona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) < 0.$$

Jeżeli nie zachodzi żaden z tych przypadków, to forma jest nieokreslona.

Tw. Rozważmy formę $d^2 f(\vec{x})(\vec{h}) = \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ i niech $f(x)$ ma ciągle pierwsze i drugie pochodne w okolicy x_0, oraz $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0$. Wtedy jeżeli

a) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest dodatnio okreslona to f ma w x_0 minimum lokalne

b) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest ujemnie okreslona to f ma w x_0 maksimum lokalne

c) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest nieokreslona to f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego

Minorem rzędu k macierzy a rzędu m nazywamy wyznacznik utworzony z pierwszych k rzędów i pierwszych k kolumn tej macierzy:

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Tw. Forma $g(h) = h_i a_{ij} h_j$ jest dodatnio okreslona, jeżeli wszystkie jej minory są dodatnie, $A_k > 0,\ k = 1,2,..,m,$ a ujemnie okreslona, jeżeli $(\text{-}1)^{\mathrm{k}} A_k > 0,\ k = 1,2,..,m.$ Jeżeli nie zachodzi żadna z tych dwóch sytuacji, to forma jest nieokreslona.

Przypadek $m = 2$: W= $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$, $\quad \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$

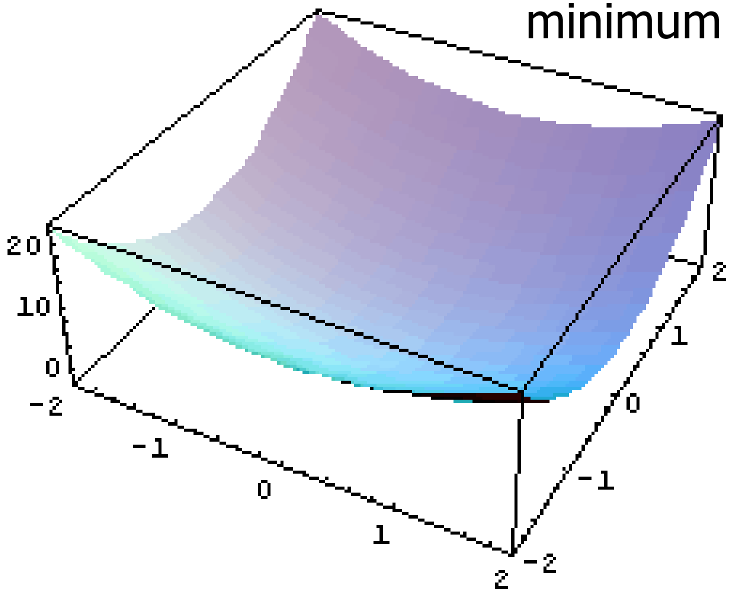
1) $W > 0,\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ - minimum

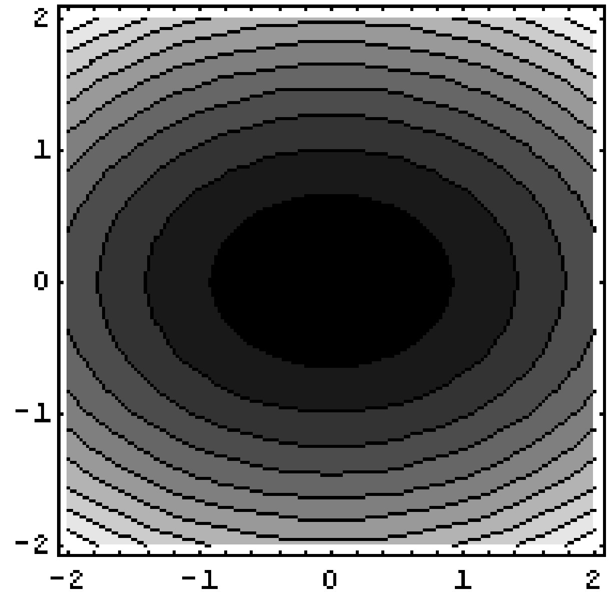
2) $W > 0,\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ - maksimum

3) $W < 0$ - punkt siodlowy

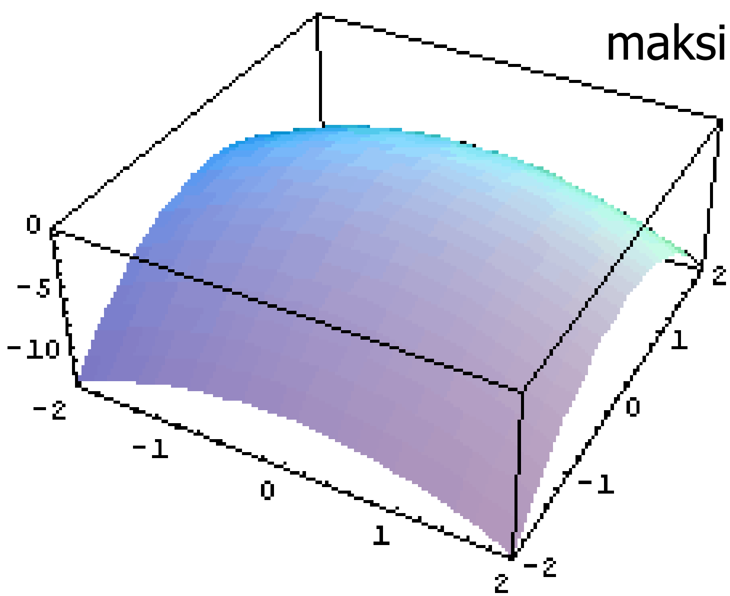
4) $W = 0$ - brak rozstrzygnięcia

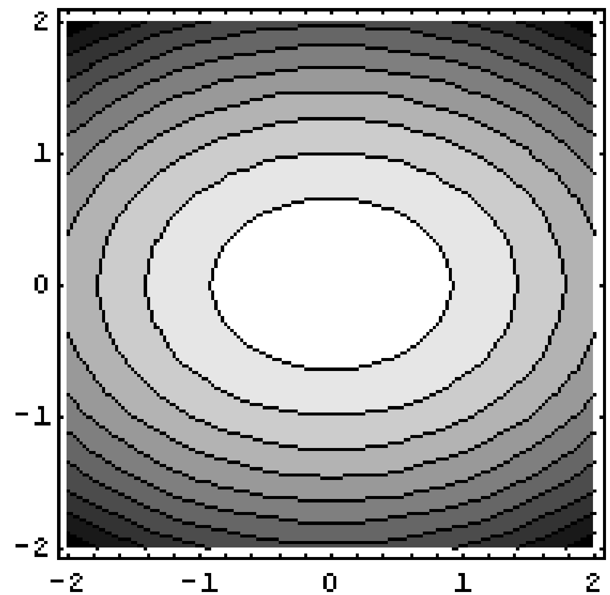
minimum



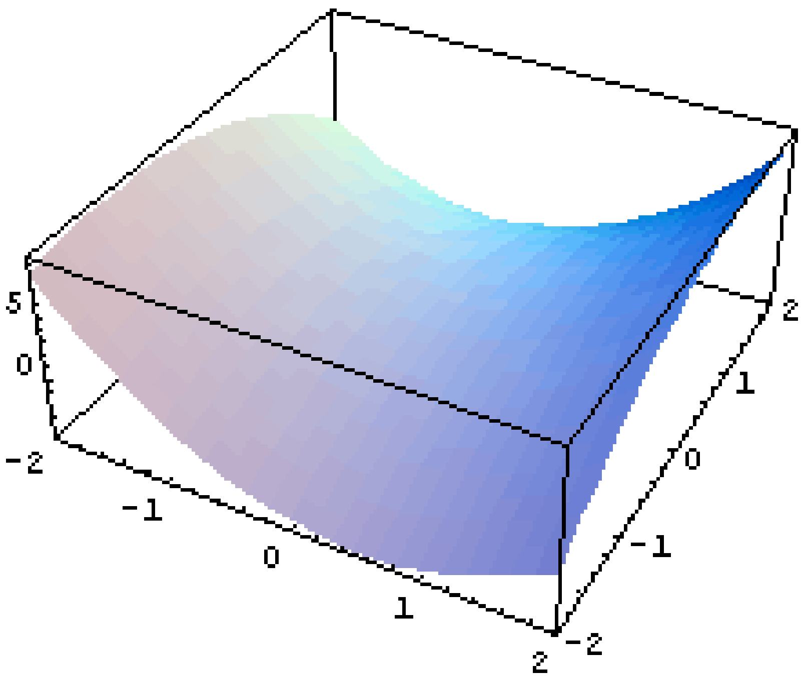


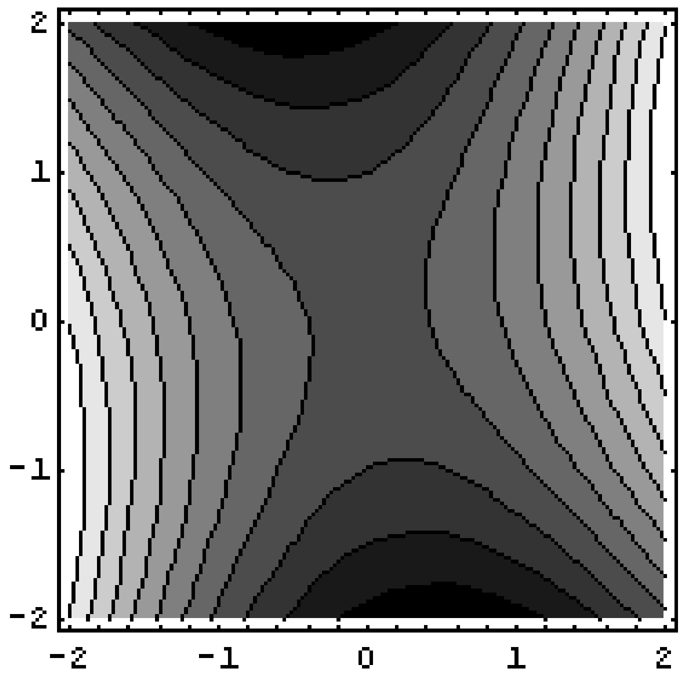
maksimum





Siodło: $f(x)=2x^2-y^2+xy$





Poszukiwanie ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

1) znalezienie ekstremów lokalnych we wnętrzu

2) inspekcja brzegu i "rogów"

Funkcje uwikłane

$F(x,y)$ - ciągla, $F(x,y)=0 \;\rightarrow\; y=y(x)$ - funkcja uwiklana

Tw: $F(x_0,y_0)=0,\; F_x, F_y$ - ciągle w otoczeniu (x_0,y_0), $F_y(x_0,y_0)\neq 0 \;\Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon>0\; \exists \delta>0\; \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\; \exists$jedyne $y\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon): F(x,y)=0$

2) $y'(x)=-\dfrac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$

$F(x,y)=x^2+y^2-1,\; x_0=y_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - równanie okręgu i punkt doń należący

$F_x=2x,\; F_y=2y \;\Rightarrow\; y'(x)=-\dfrac{x}{y},\; y'(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=-1$ - mamy "bez wysilku"

$F(x,y)=2^y x - x^2y^2+(1-x^2)\sin y,\; x_0=y_0=0$ - nie da się odwiklać!

$F_y(0,0)=1\neq 0$

$$y'(x)=-\frac{2^y-2xy^2-2x\sin y}{2^y x\ln 2-2x^2y+(1-x^2)\cos y},\; y'(0)=-1$$

Wyprowadzenie 2): $F(x, y(x)) = 0,$

Z tw. o pochodnej funkcji zlożonej:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = F_x(x,y) + y'(x)F_y(x,y) = 0$$

Ponadto $\frac{d^2}{dx^2}F(x,y(x)) = \frac{d}{dx}\left(F_x(x,y) + y'(x)F_y(x,y)\right) =$

$$= F_{xx} + 2y'(x)F_{xy} + y''(x)F_y + (y'(x))^2 F_{yy} = 0$$

$$F_{xx} - 2\frac{F_x}{F_y}F_{xy} + y''(x)F_y + \left(\frac{F_x}{F_y}\right)^2 F_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow y''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^{\,2} - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^{\,2}}{F_y^{\,3}}$$

Ekstremum $y(x)$: $y'(x) = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{F_{xx}}{F_y}$

Przyklad krzywej trzeciego stopnia: Liść Kartezjusza

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$F_y = 3y^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow y^6 + y^3 - 3y^3 \neq 0 \Rightarrow y \neq \sqrt[3]{2}$$

$$(x, y) \neq (0,0) \wedge (x, y) \neq (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$

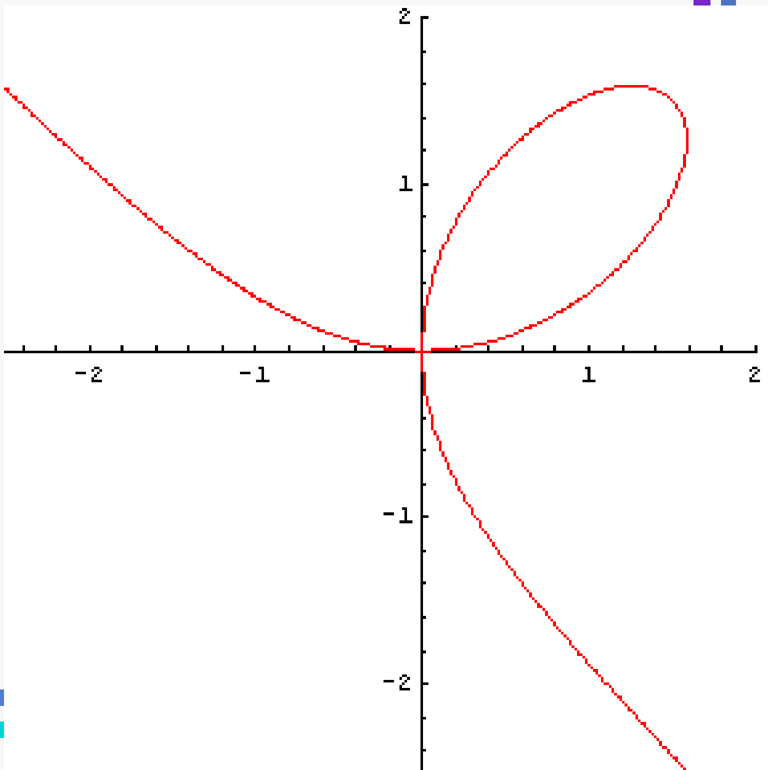
$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} \Rightarrow y' = 0 \text{ dla } y = x^2 \Rightarrow x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{2},\ y_0 = \sqrt[3]{4},$$

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y{}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3} =$$

$$= \frac{6x(3y^2 - 3x)^2 + 6(3x^2 - 3y)(3y^2 - 3x) + 6y(3x^2 - 3y)^2}{(3y^2 - 3x)^3}$$

$\Rightarrow$ (po wstawieniu) $y''(x_0, y_0) < 0$ - maksimum



Ekstrema warunkowe

$f, g : R^2 \to R$

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum warunkowe, jeżeli

$\exists \delta > 0 \ \forall x, y: \quad |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 | < \delta \wedge g(x,y) = 0 \Rightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$

analogicznie: minimum ... $f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow y = y(x), y' = -\frac{g_x}{g_y}$$

Rozważmy $F(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow F'(x) = f_x + f_y y' = f_x - f_y \dfrac{g_x}{g_y} = \dfrac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y}$

$\Rightarrow$ funkcja może mieć ekstremum gdy $f_x g_y = f_y g_x$

Przyklad: $f(x,y) = x + y, \ \ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

warunek: $2y = 2x, \ \Rightarrow \ \mathrm{x}_0 = y_0 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Metoda mnożników Lagrange'a

Tworzymy pomocniczą funkcję $\Phi(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$, gdzie λ nazywa się mnożnikiem Lagrange'a lub czynnikiem nieoznaczonym Lagrange'a. Następnie znajdujemy ekstrema funkcji Φ tak, jakby zmienne x i y byly niezależne. Rozwiązujemy uklad równań $\Phi_{\mathrm{x}} = 0,\ \Phi_y = 0,\ g(x,y) = 0.$

Dowód: $\Phi_x = f_x + \lambda g_x = 0,\ \ \Phi_y = f_y + \lambda g_y = 0.$ Eliminując λ dostajemy $f_x g_y = f_y g_x$.

Dla n zmiennych i k warunków mamy następujące uogólnienie:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Szukamy ekstremum

$$\partial_j \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \partial_j f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \partial_j g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k \partial_j g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Ponadto $g_r(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ r = 1, ..., k,$ co lacznie daje $n+k$ równań na $n+k$ niewiadomych (n zmiennych x i k czynników λ).

Krzywe i rozciągłości wielowymiarowe

$\Phi : V \subset R^k \to U \subset R^n, k \leq n$ – homeomorfizm $(1-1, \Phi$ i Φ^{-1} ciągle),
U, V – otwarte. Wtedy U nazywamy k-wymiarową powierzchnią (hiperpowierzchnią, rozciągloscią, rozmaitoscią)

Φ ma n skladowych, Φ_n. Ukladamy gradienty Φ_n w macierz: $\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \dots \\ \nabla\Phi_n \end{pmatrix}$

Φ jest homeomorfizmem regularnym, jeżeli $\forall x \in V$ rząd $\Phi'(x) = k$.
Wtedy U nazywamy k-wymiarową powierzchnią gladką

k=0 - zerowymiarowa powierzchnia (punkty izolowane)

k=1 - krzywa, linia

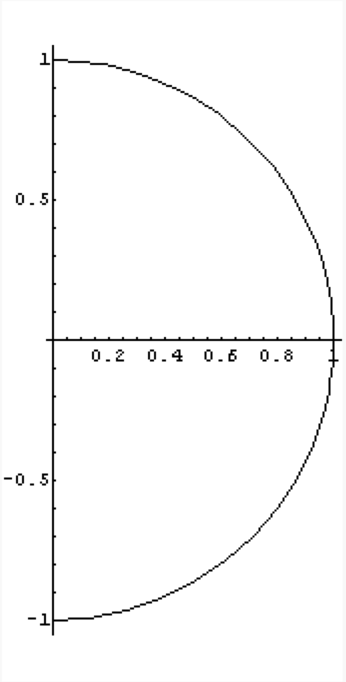
k=2 - powierzchnia

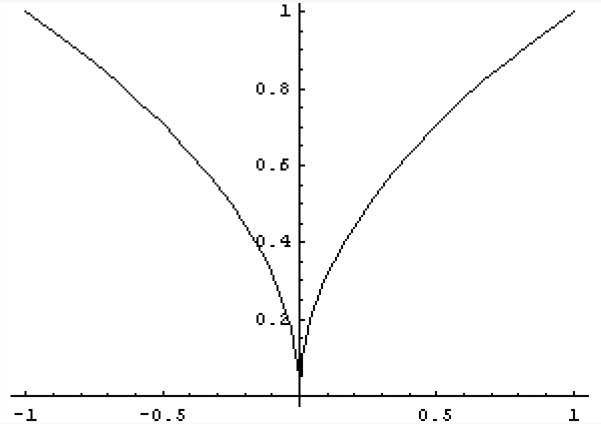
k>2 - hiperpowierznia

Przyklad:

$$k=1, n=2,\ U=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \Phi=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\ \Phi'=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \forall t\in U: \exists \Phi' \wedge \operatorname{rz}\Phi'=1 \quad - \text{ luk gladki}$$

$$k=1, n=2,\ U=(-1,1),\ \Phi=\begin{pmatrix} t\\ \sqrt{|t|}\end{pmatrix}, \forall t\neq 0: \Phi'=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\operatorname{sgn}(t)}{2\sqrt{|t|}}\end{pmatrix} \quad - \text{ w } t=0\ \Phi' \text{ nie instnieje (szpic)}$$





Krzywa domknięta gładka:

$$\Phi : [a,b] \to R^n$$

$\Phi(a) -$ początek, $\Phi(b) -$ koniec

$\Phi(a) \neq \Phi(b) -$ homeomorficzna z przedzialem

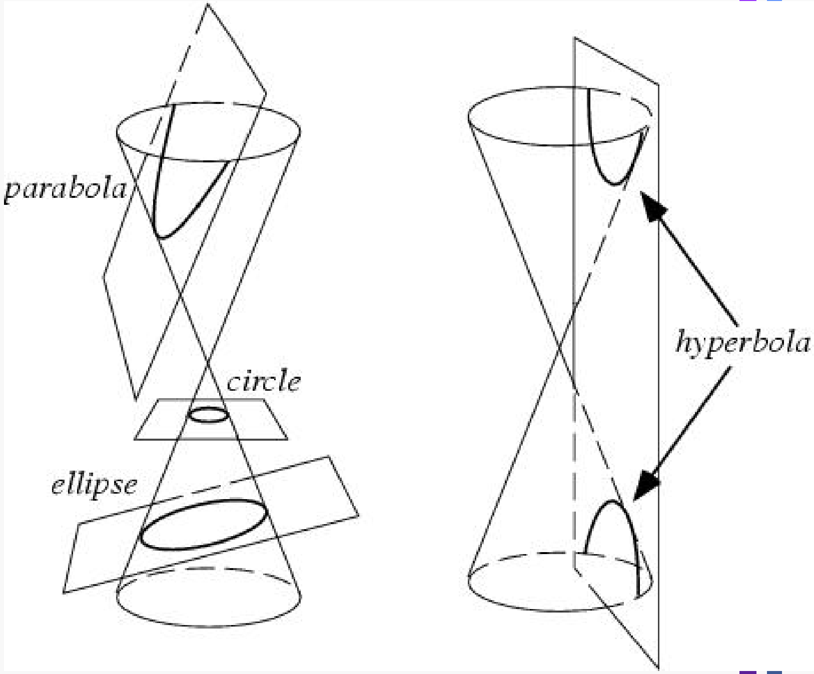
$\Phi(a) = \Phi(b) -$ homeomorficzna z okregiem

RYS., str. 221

Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)

Powstają z przecięcia stożka płaszczyzną:

Okrąg, elipsa, parabola, hiperbola



$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix}, \; J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$I = a + c, \; K = \begin{vmatrix} a & d \\ d & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & f \\ f & g \end{vmatrix}$$

krzywa	Δ	J	Δ / I	K
elipsa	$\neq 0$	> 0	< 0	
parabola	$\neq 0$	0		
hiperbola	$\neq 0$	< 0		
linie przecinajace się	0	0		< 0
linie przekrywające się	0	0		0

okrąg=elipsa, $a = c$

Redukcja do prostszej postaci:

Przez obrót możemy się pozbyć czlonu mieszanego

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi$$

$$y' = -x\sin\phi + y\cos\phi$$

Czlon mieszany wynosi wtedy $2x'y'[(a-c)\cos\phi\sin\phi + b(\cos^2\phi - \sin^2\phi)]$

i znika dla $\mathrm{tg}(2\phi) = \dfrac{2b}{c-a}$ dla $c \neq a$ oraz $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ dla $c = a$. Po takim obrocie mamy $Ax'^2 + Cy'^2 + 2Dx' + 2Fy' + G = 0.$

Dla $A \neq 0,\ C \neq 0$, czlonow liniowych pozbywamy się przez transformację

$$x'' = x' + D/A$$

$$y'' = y' + F/C$$

Wtedy $Ax''^2 + Cy''^2 + G'' = 0.$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b,\ c = \sqrt{a^2 - b^2},\ e = \frac{c}{a} - \text{ mimosród}$$

$$a = b = r,\ \ x^2 + y^2 = r^2 - \text{ okrąg}$$

$$y = ax^2,\ x = ay^2 - \text{ parabola}$$

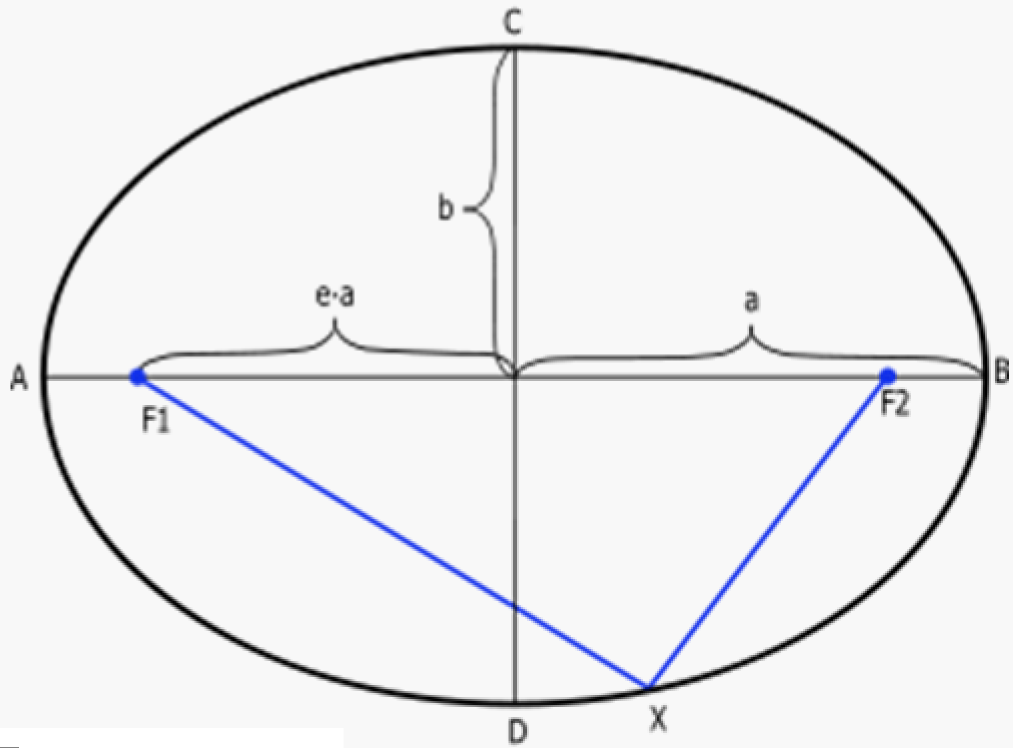
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ xy = c - \text{ hiperbola}$$

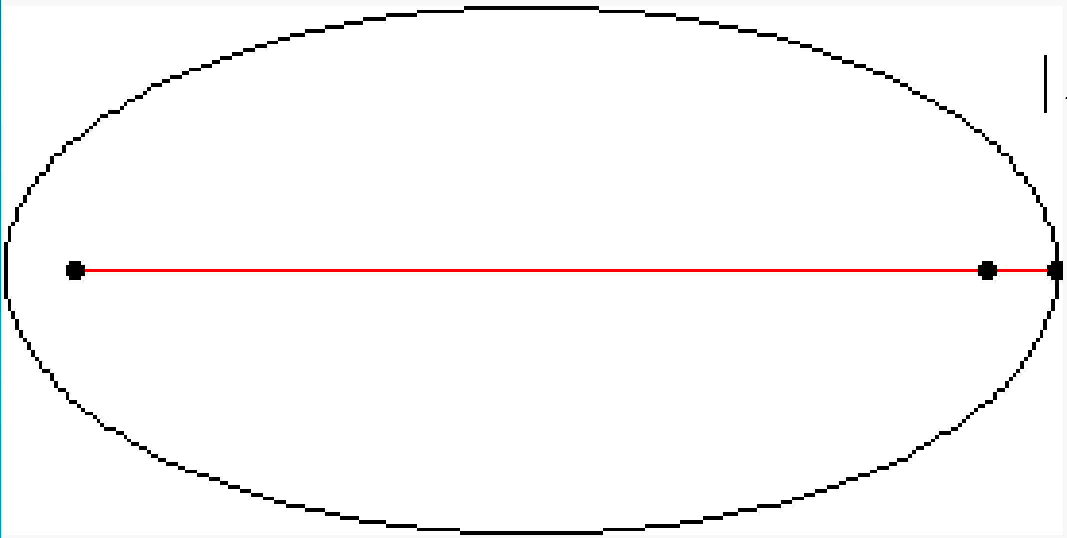
Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c^2=a^2-b^2,\quad (a\geq b)$$

$$e=\frac{c}{a}$$ mimośród



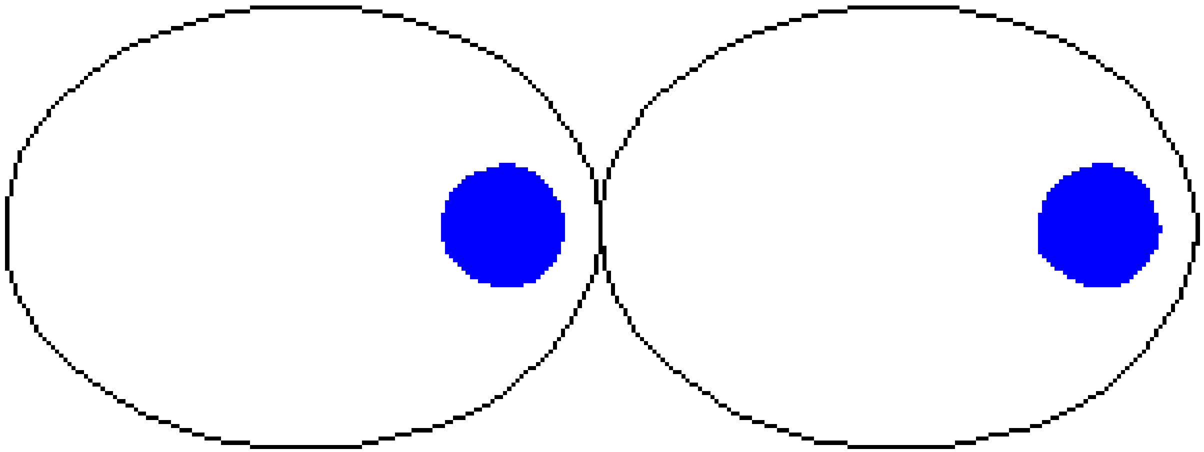


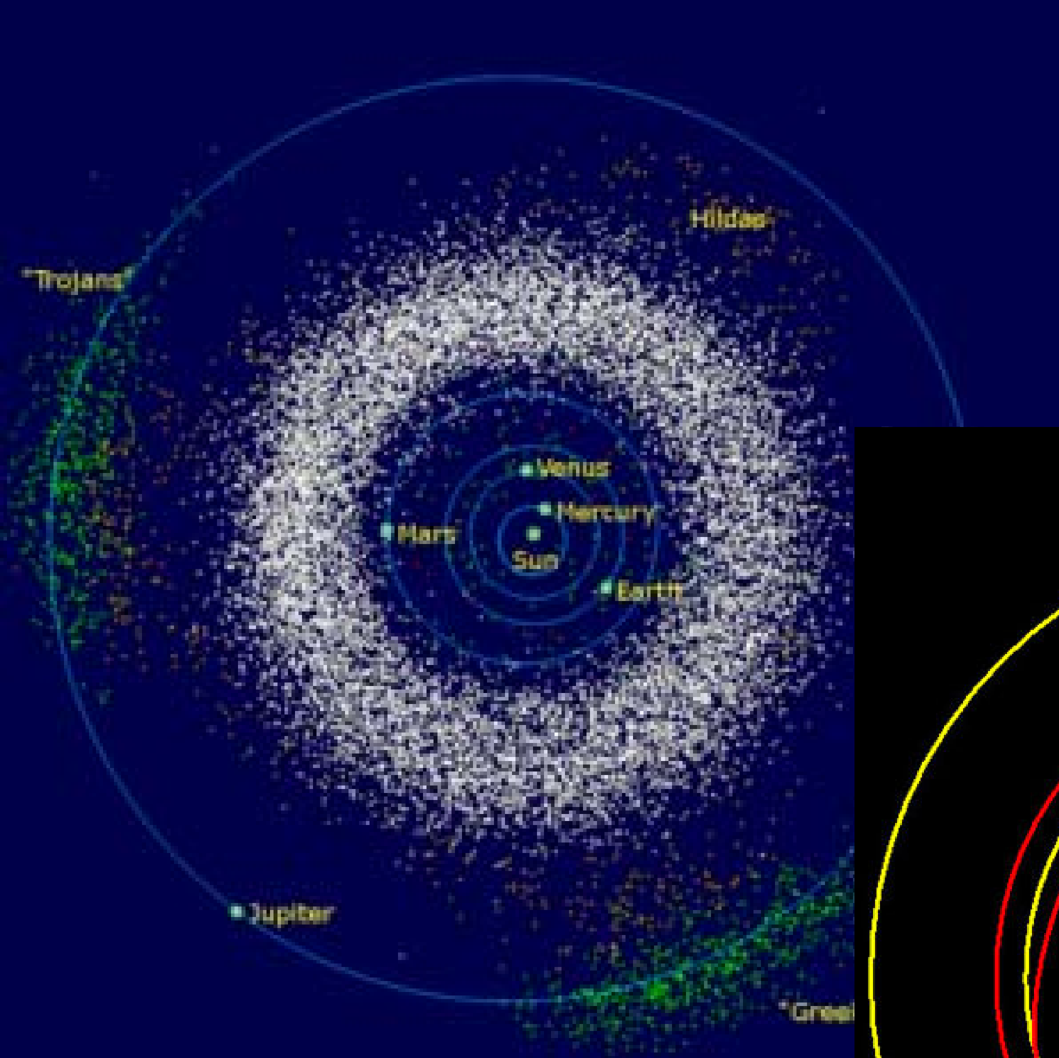
$$|XF_1|+|XF_2|=2a=const.$$

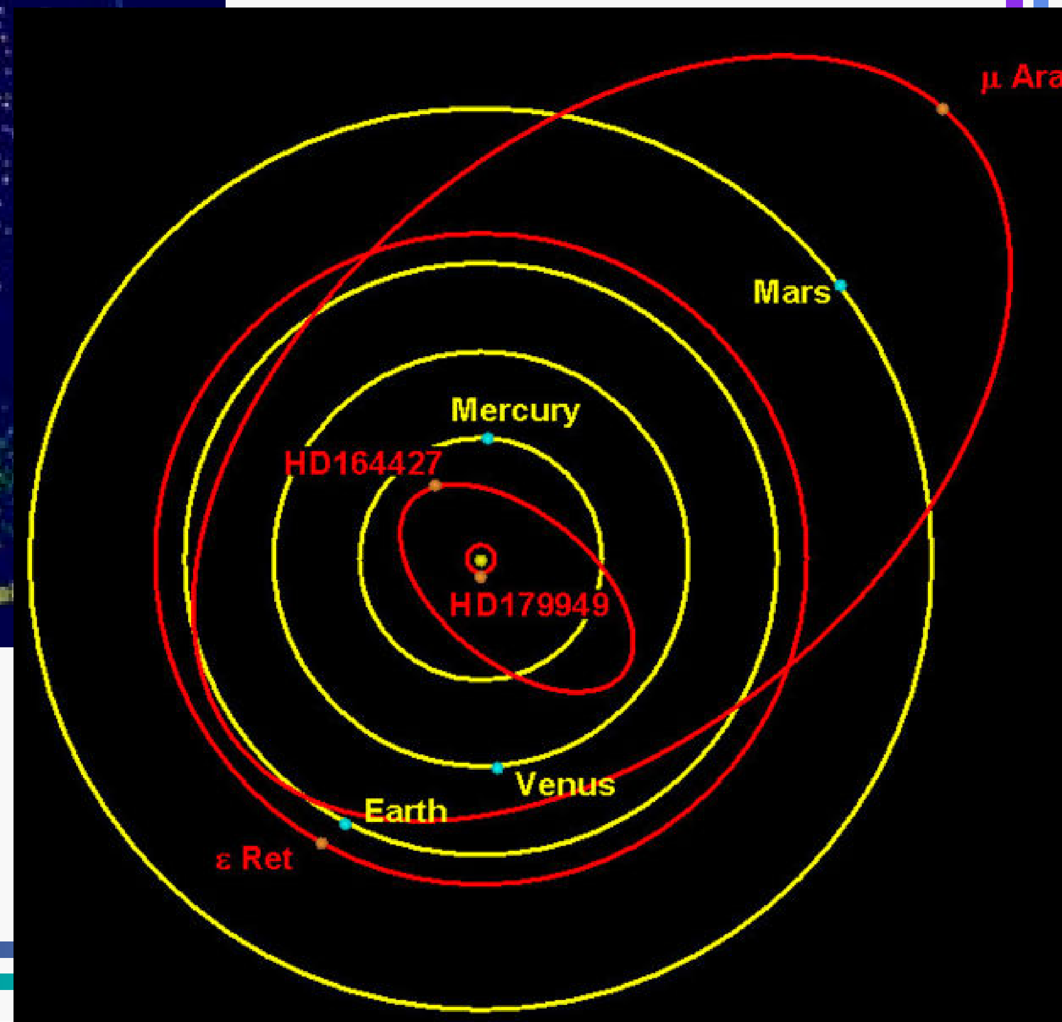
F_1, F_2 - ogniska

a - półoś wielka

b - półoś mała




Hildas
"Trojans"
Venus
Mercury
Mars
Sun
Earth
Jupiter


μ Ara
Mars
Mercury
HD164427
HD179949
Venus
Earth
ε Ret

Całki eliptyczne (*)

długość łuku elipsy

$$x = a\sin\phi,\quad y = b\cos\phi$$

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}\,d\phi = \sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}\,d\phi =$$

$$\sqrt{a^2\cos^2\phi+(a^2-c^2)\sin^2\phi}\,d\phi = \sqrt{a^2-c^2\sin^2\phi}\,d\phi = a\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$L(\Phi) = a\int_0^{\Phi}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$\int_0^{\Psi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(k,\Psi),\quad k<1,\quad F(k) = F(k,\frac{\pi}{2})$$ Całka eliptyczna: I rodzaju

$$\int_0^{\Psi} d\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} = E(k,\Psi),\quad k<1,\quad E(k) = E(k,\frac{\pi}{2})$$ II rodzaju

$$\int_0^{\Psi}\frac{d\phi}{(1+h\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = K(h,k,\Psi)$$ III rodzaju

$$\int R(x,\sqrt{W(x)})dx, \qquad (1)$$

W – wielomian stopnia 3 lub 4

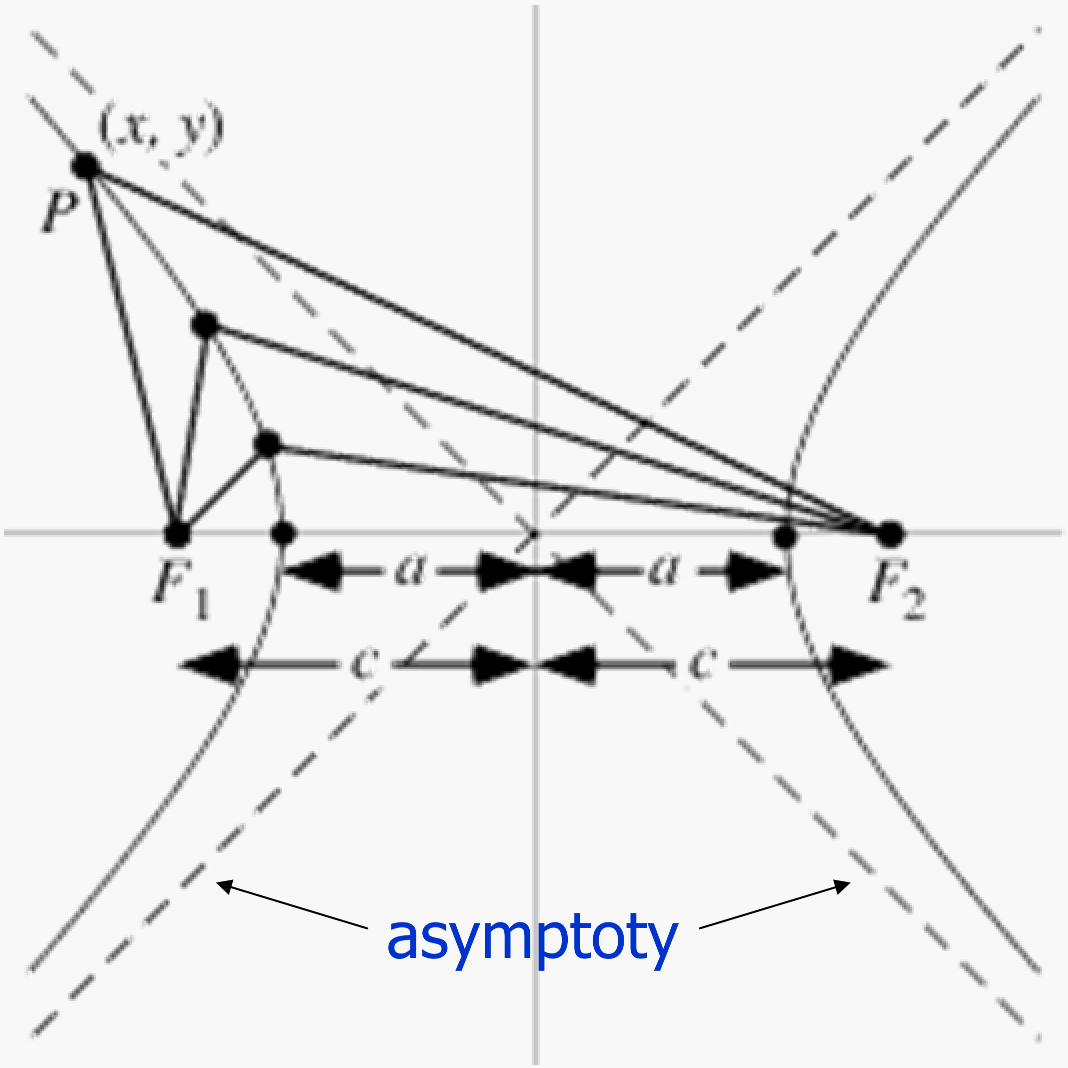
Hiperbola

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a = const.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

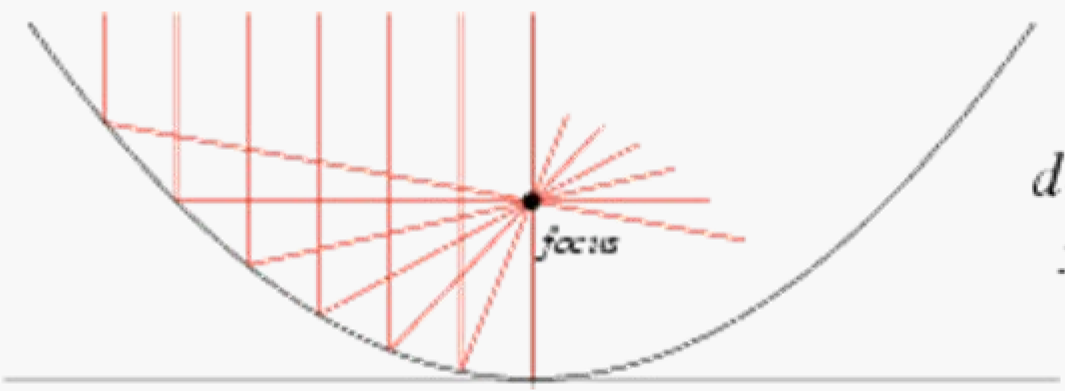
$$e = \frac{c}{a} > 1$$

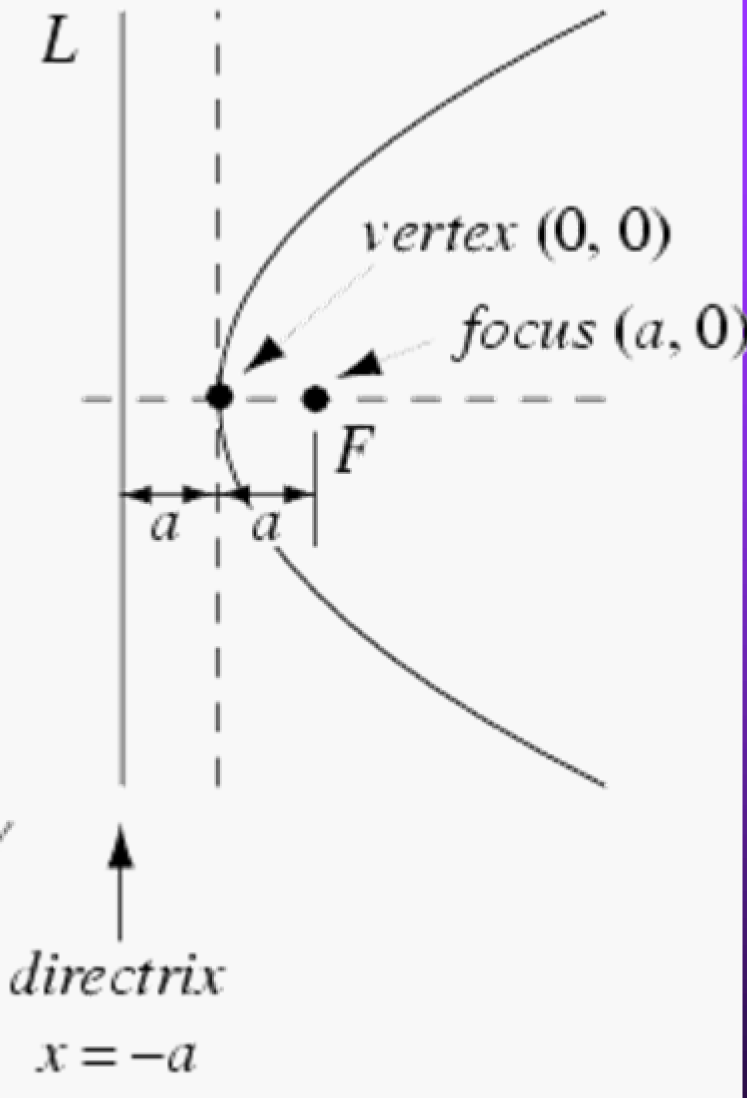


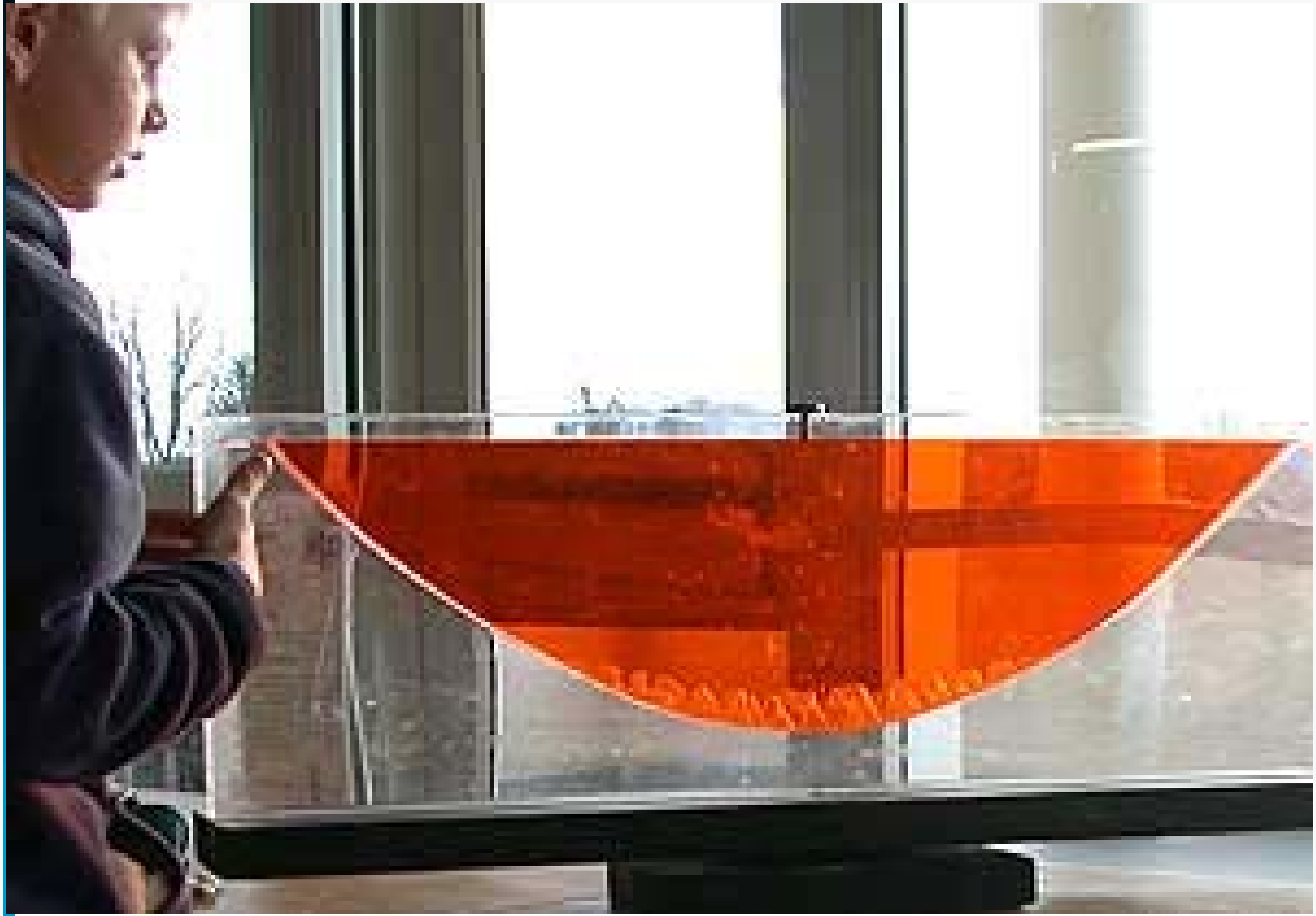
Parabola

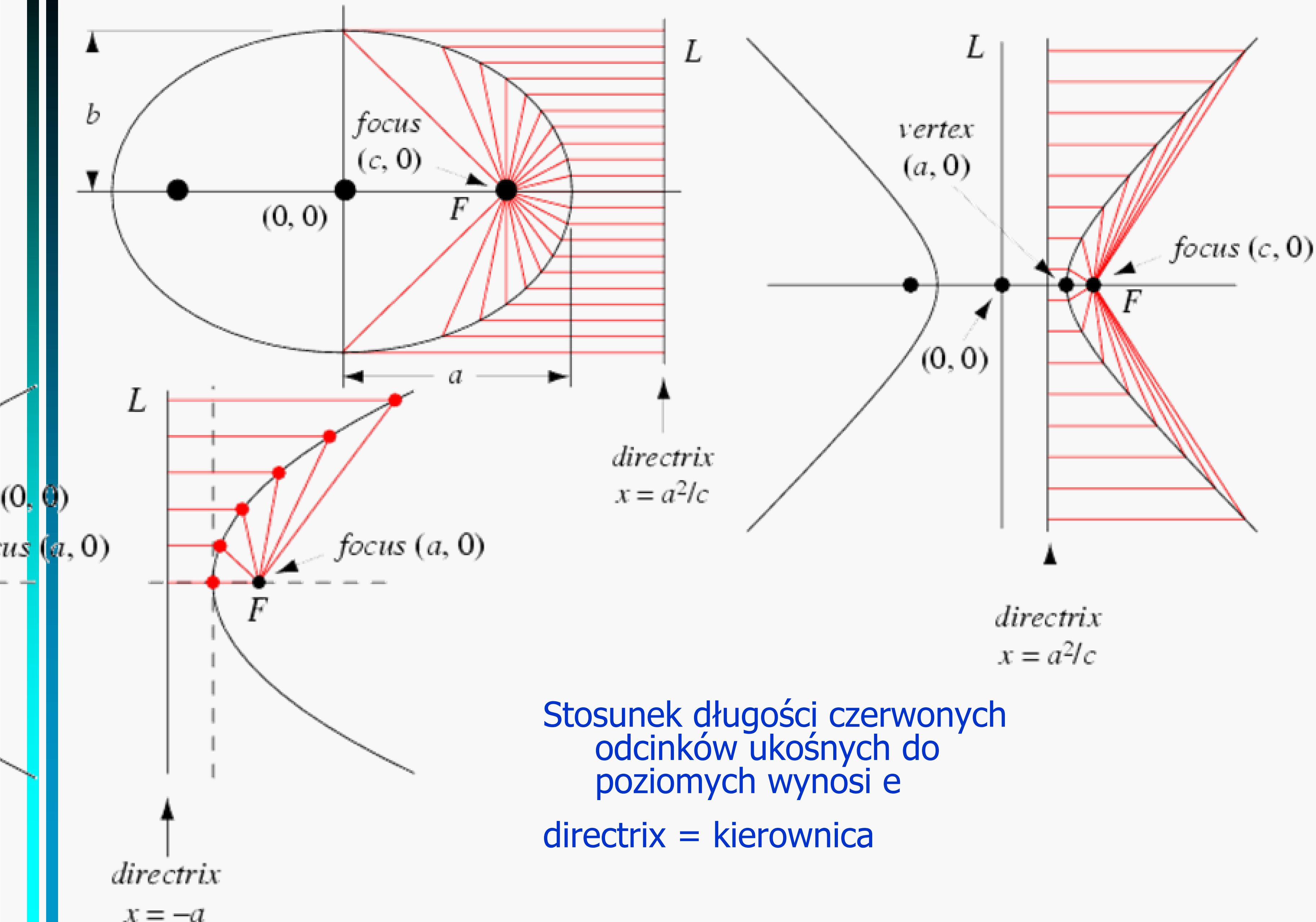
$$x = 4ay^2$$

$$e = 1$$









Stosunek długości czerwonych odcinków ukośnych do poziomych wynosi e

directrix = kierownica

Krzywizna krzywej płaskiej

Krzywa $y = y(x)$

równanie stycznej w (x_0, y_0): $\quad y - y_0 = y'(x)(x - x_0)$

równanie normalnej w (x_0, y_0) (prostopadla do stycznej): $\quad y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

(jest tak dlatego, bo $y'(x) = tg\alpha$, więc $tg(\alpha + \dfrac{\pi}{2}) = -ctg\alpha = -\dfrac{1}{y'(x)}$)

Rozważmy 2 punkty na krzywej, (x_0, y_0) i (x_1, y_1), oraz normalne w tych punktach:

$y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$, $y - y_1 = -\dfrac{1}{y'(x_1)}(x - x_1)$. Ich punkt wspólny to

$$x^* = x_0 - \frac{1 + \dfrac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} y'(x_1)}{\dfrac{y'(x_1) - y'(x_0)}{x_1 - x_0}} y'(x_0), \; y^* = y_0 + \frac{1 + \dfrac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} y'(x_1)}{\dfrac{y'(x_1) - y'(x_0)}{x_1 - x_0}}.$$

W granicy $x_1 \to x_0$ dostajemy $x^* = x_0 - \dfrac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)} y'(x_0)$, $y^* = y_0 + \dfrac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)}$.

Odleglosć tego punktu od (x_0, y_0) to $\rho = \dfrac{(1 + y'(x_0)^2)^{3/2}}{|\, y''(x_0) \,|}$, a krzywizna to z def. $\dfrac{1}{\rho}$

Dla krzywej parametrycznej $(x(t), y(t))$ mamy $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t}{x_t}, \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}\frac{y_t}{x_t}}{x_t} = \dfrac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{(x_t)^3},$

r. stycznej $\quad - \; y_t(x - x(t)) - x_t(y - y(t)) = 0$

r. normalnej $\; - \; x_t(x - x(t)) + y_t(y - y(t)) = 0$

wsp. srodka krzywizny $- \; x^* = x(t) - \dfrac{x_t^{\,2} + y_t^{\,2}}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} y_t, \; \mathrm{y}^* = y(t) + \dfrac{x_t^{\,2} + y_t^{\,2}}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} x_t$

krzywizna $- \quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{|\, x_t y_{tt} - y_t x_{tt} \,|}{\left(x_t^{\,2} + y_t^{\,2}\right)^{3/2}}$

Krzywizna nie zależy od układu współrzędnych (translacje, obroty).

Parametryzacja kanoniczna krzywej (*)

$(x(t), y(t), z(t))$

$s(t) = \int_{s_0}^{t} dt' \sqrt{x_{t'}^2 + y_{t'}^2 + z_{t'}^2}$ – dlugość krzywej mierzona od s_0

$s_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} > 0 \Rightarrow \exists t(s)$

$(x[t(s)], y[t(s), z[t(s)])$ – krzywa sparametryzowana kanonicznie

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x_t}{s_t} = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \ldots, \quad \frac{dz}{ds} = \ldots$$

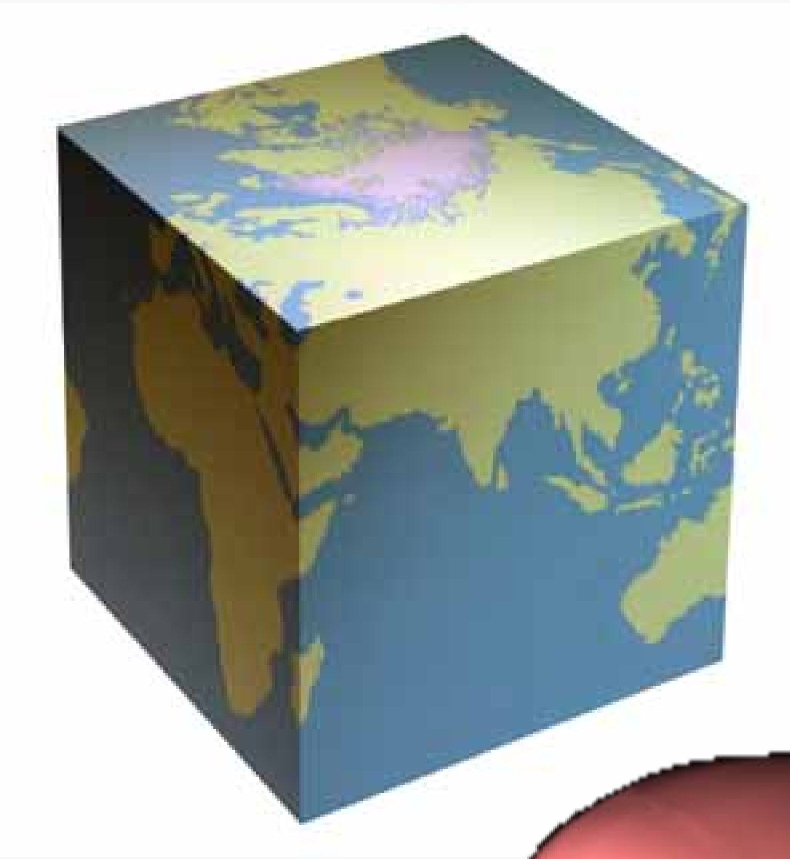
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

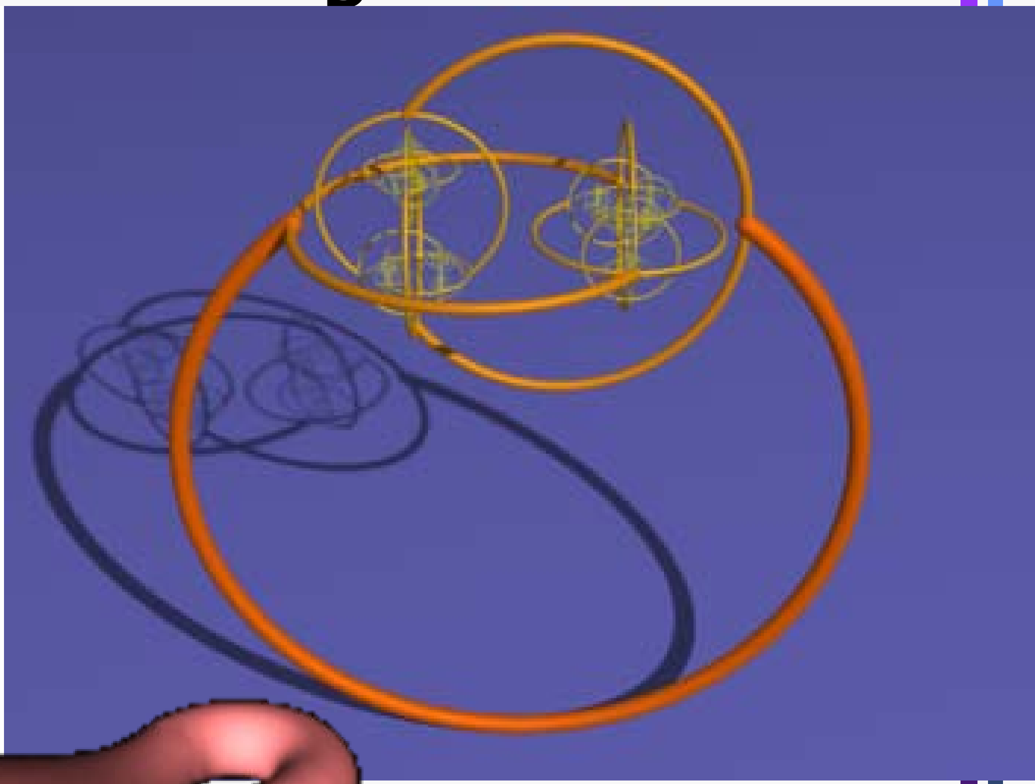
Dla $d = 2$ $y = f(x)$

kąt stycznej do Ox: $\alpha = arctg\ f' \Rightarrow \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{ds}\right| = \frac{|f_{xx}|}{1+f_x^2}\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} = \frac{1}{\rho}$

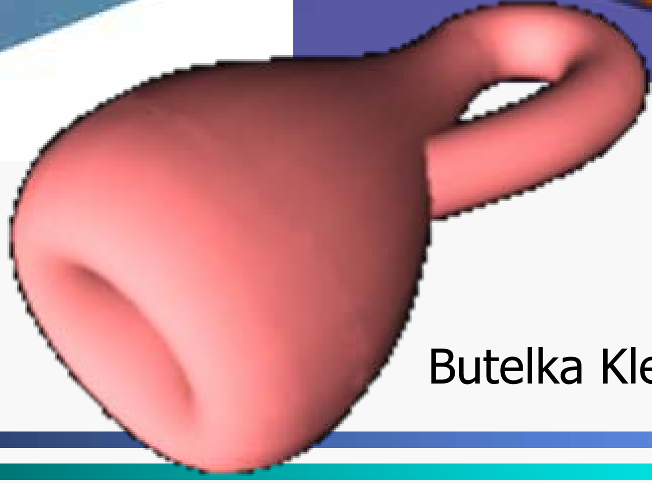
Interpretacja: krzywizna jest pochodną tangensa nachylenia krzywej po parametrze kanonicznym

Powierzchnie kawałkami gładkie

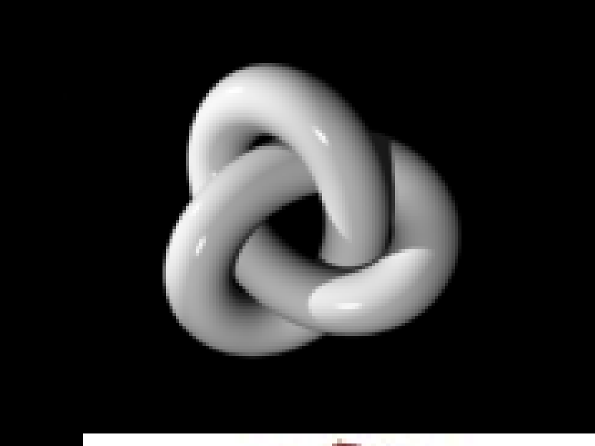
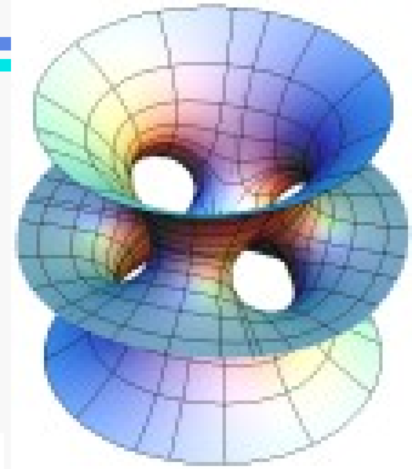


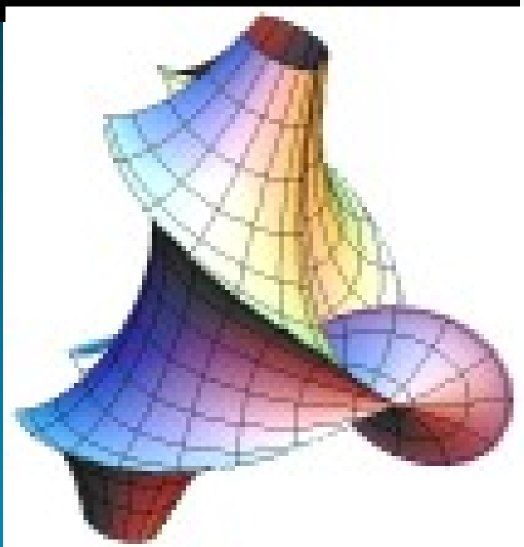
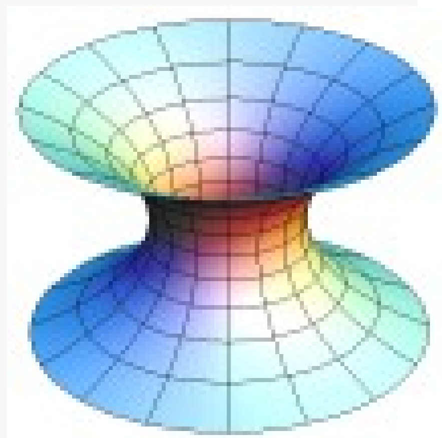


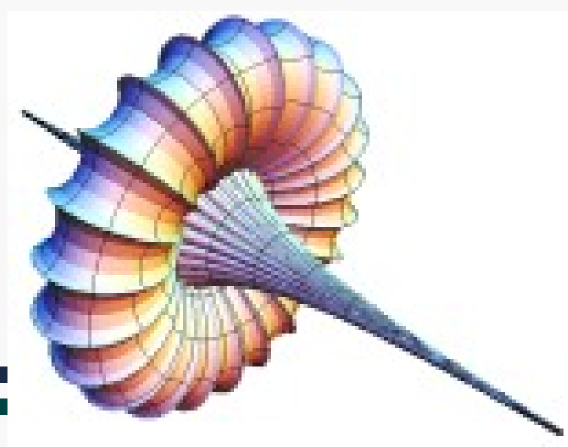
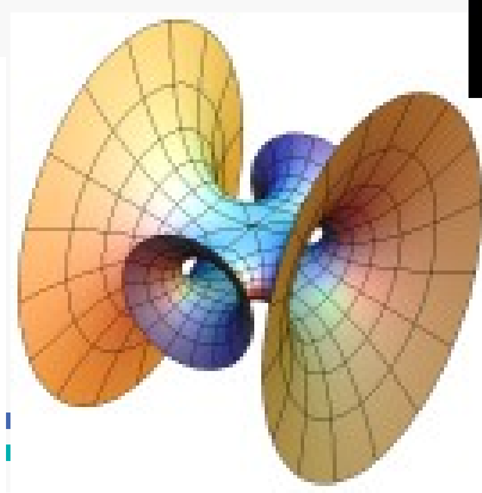
Sfera Alexandra



Butelka Kleina

Całki wielowymiarowe

Definicja całki wielowymiarowe

Uogólnienie jednowymiarowej calki Riemanna na n wymiarów:

$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$

Dokonujemy podzialu n-wymiarowego prostokąta

$m_i = \inf\{f(x) : x \in P_i\},\ \mathrm{M}_i = \sup\{f(x) : x \in P_i\}$

$s = m_1 |P_1| + \ldots + m_k \| P_k |,\ \mathrm{S} = M_1 |P_1| + \ldots + M_k |P_k|$

Rozważamy normalny $(\delta_n \to 0)$ ciąg podzialów

$s^* = \lim_{n\to\infty} s_n -$ calka dolna, $\mathrm{S}^* = \lim_{n\to\infty} S_n -$ calka górna funkcji f na prostokącie P

Jeżeli $\mathrm{s}^* = S^*$ to wielkosć tę nazywamy wielokrotną calka Riemanna

Notacja: $\iint\limits_{\mathrm{P}} dxdy\ f(x,y),\quad \iiint\limits_{P} dxdydz\ g(x,y,z)$

Całka iterowana

$P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

$\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\, f(x,y)\right),\ \int\limits_{a_1}^{b_1} dx\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\, f(x,y)\right)-$ calki iterowane

Tw. Fubiniego: Jeżeli $f:P\to R$ jest ciągla, to obie calki iterowane są równe calce Riemanna $\iint\limits_P dxdy\, f(x,y)$.

(analogicznie dla większej liczby wymiarów)

Przyklad: $P=[0,1]\times[0,2]$

$$\iint\limits_P dxdy\ (\mathrm{x}^2 y+2)=\int\limits_0^1 dx\left(\int\limits_0^2 dy\ (\mathrm{x}^2 y+2)\right)=\int\limits_0^1 dx\left(\frac{x^2y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{y=0}^{2}=\int\limits_0^1 dx(2x^2+4)=\frac{2}{3}+4$$

$$=\int\limits_0^2 dy\left(\int\limits_0^1 dx\ (\mathrm{x}^2 y+2)\right)=\int\limits_0^2 dy\left(\frac{x^3y}{3}+2x\right)\Bigg|_{x=0}^{1}=\int\limits_0^2 dx\left(\frac{y}{3}+2\right)=\frac{2}{3}+4$$

Całki po dowolnym obszarze

$A \subset R^n$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ dla } x \in A \\ 0 \text{ dla } x \in P \setminus A \end{cases}$$

$\varphi, \psi : [a,b] \to R$

$A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\} -$ zbiór normalny względem Ox

Tw. Jeżeli $f : A \to R$ jest ciągla, to jest calkowalna, oraz

$$\iint\limits_{A} dxdy\ f(x,y) = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\ f(x,y)$$

Przyklad:

A=$\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\} -$ trójkąt

$$\iint\limits_{A} dxdy \text{ xy} = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \text{ xy} = \int\limits_{0}^{1} dx \frac{1}{2}(1-x)^2 x = \frac{1}{24}$$

Zastosowania całek wielokrotnych

$$V=\iiint\limits_A dxdydz$$

$A=\{(x,y,z):x,y,x\geq 0, x+y+z\leq 1\}$

$x,y-$ ustalone $\Rightarrow z\leq 1-x-y$

$x-$ ustalone, szukamy największego możliwego y: $y\leq 1-x-z,$

ponieważ najmniejsze $z=0 \;\Rightarrow y\leq 1-x$

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy(1-x-y)=\int_0^1 dx\left[(1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right]=\frac{1}{6}$$

Jest to tzw. objetosć sympleksu. W n wymiarach $V=\dfrac{1}{n!}$

Środek ciężkości

$$\overline{x} = \frac{1}{|A|}\iint_A x\,dxdy \quad \overline{y} = \frac{1}{|A|}\iint_A y\,dxdy - \text{ figura 2-wym.}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{|V|}\iiint_V x\,dxdydz, \quad \overline{z} = \frac{1}{|V|}\iiint_V z\,dxdydz - \text{ bryla}$$

Objętosć bryly obrotowej powstalej w wyniku obrotu regularnego zbioru A wokól Ox: $|V| = 2\pi\iint_A y\,dxdy$

Reguly Guldina: $|V| = 2\pi\eta\,|A|,\ \eta = \frac{1}{|A|}\iint_A y\,dxdy,$

Dla torusa $|V| = 2\pi a\ \pi r^2$

Podobnie dla powierzchni powstalej w wyniku obrotu luku mamy

$|S| = 2\pi\xi\,|L|,\quad \xi = \frac{1}{|L|}\int_\alpha^\beta y\,dt$ - odleglosc srodka ciężkoci luku od osi obrotu

Dla torusa $|S| = 2\pi a\ 2\pi r$

Pole powierzchni

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in A$$

$$|S| = \iint_A dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Wzór wynika z konstrukcji przybliżającej powierzchnię równoleglobokami

Przyklad:

$$f(x,y) = 1 - x - y$$

$$A = \{(x,y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_A dxdy \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zamiana zmiennych - dyfeomorfizm

$f \in C^1 : R^n \supset U \to V \subset R^n$, homeomorfizm rzędu n

(bijekcja, pochodna odwracalna, f i f^{-1} ciągle)

Pamiętamy, że dla jednej zmiennej $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy\ f(y) = \int_a^b dx\ f[\varphi(x)]\varphi'(x), \quad y = \varphi(x)$

Tw. $\varphi : X \subset R^n \to Y \subset R^n$ klasy C^1

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \quad \text{jakobian przekształcenia } \varphi$$

Wtedy

$$\int_Y \ldots \int f(y) dy_1 .. dy_n = \int_X \ldots \int f[\varphi(x)] \, | J(x) | \, dx_1 .. dx_n, \quad y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Podstawowe układy współrzędnych

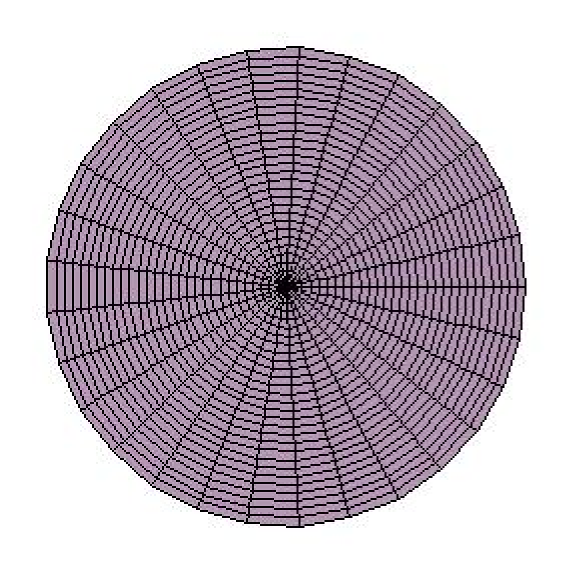
Współrzędne biegunowe (osiowe)

$$\Phi : R^2 \to R^2$$

$$\Phi(r,\phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\phi) \\ y(r,\phi) \end{pmatrix}, \quad x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$$

$$\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r(x,y) \\ \phi(x,y) \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \phi\text{=arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$\Phi'(r,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$$



$$J = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \qquad\qquad \int dxdy\, f(x,y) = \int rdrd\phi\, f(x(x,\phi), y(r,\phi))$$

Homeomorfizm regularny dla $r \neq 0$, rząd $\Phi' = 2$. Dla $r = 0$ jest osobliwosć, bo w tym punkcie nie można okreslić kąta

Przyklady:

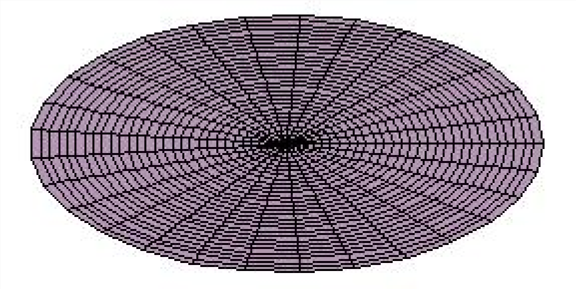
$$\int\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_{r^2\le R^2} \frac{rdrd\phi}{r} = \int_0^r dr \int_0^{2\pi} d\phi = R2\pi$$

$$I_R = \int\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{r^2\le R^2} e^{-r^2} rdrd\phi = 2\pi \int\limits_0^R rdre^{-r^2} = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{R} = \pi - \pi e^{-R^2}$$

$$I_\infty = \lim_{R\to\infty} I_R = \pi$$

$$I_\infty = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \right)^2 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Współrzędne eliptyczne

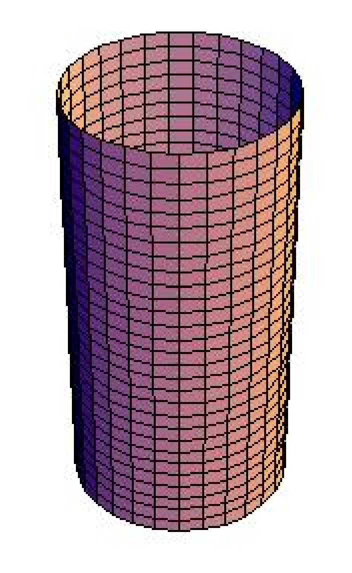


$$x = ar\cos\phi$$

$$y = br\sin\phi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \qquad J = abr$$

Współrzędne walcowe (cylindryczne)



$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

Liniowa zmiana skali

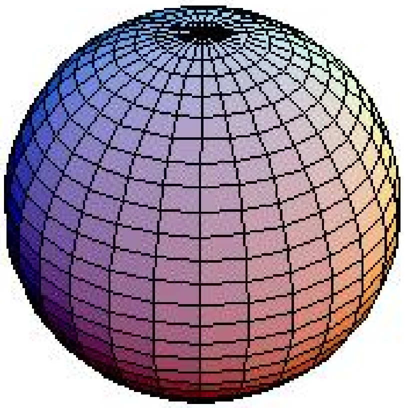
$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

$$J = abc$$

Współrzędna sferyczne (kuliste)



$$\Phi : R^3 \to R^3$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$\theta \in [0,\pi]$ - kąt osiowy(szerokość geogr.),

$\phi \in [0,2\pi)$ - kąt biegunowy (azymutalny, dlugość geogr.)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2\sin\theta$$

$r = 0 \Rightarrow \mathrm{rz}\,\Phi' = 1 -$ w srodku kuli nie można okreslić kątów

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow \mathrm{rz}\,\Phi' = 2 -$ na biegunach nie można okrelić kąta ϕ

Przyklad:

Objętosć kuli

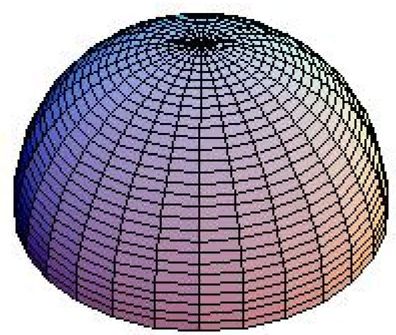
$$V=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R^2} dxdydz=\int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2\sin\theta=\int_0^R dr\int_{-1}^{1} d\cos\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2=\frac{R^3}{3}2\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$(d\cos\theta=-\sin\theta d\theta)$$

Srodek ciężkosci pólkuli:

$$\eta=\frac{\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} z\ dxdydz}{\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} dxdydz}=\frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2\sin\theta\ r\cos\theta=$$

$$=\frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R dr\int_0^1 d\cos\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ r^3\cos\theta=\frac{3}{2\pi R^3}\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}2\pi=\frac{3}{8}R$$



Równania prostej i płaszczyzny

prosta o kierunku $\vec{a}$ i należącym do niej punkcie $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$$

plaszczyzna o wektorze $\vec{a}$ do niej prostopadlym i należącym do niej punkcie $\vec{x}_0$: $(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{a} = 0$

Płaszczyzna styczna

Płaszczyzna styczna do powierzchni gładkiej o równaniu f(x,y,z)=0 dana jest równaniem

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$$

Wektor $\left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y},\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)$ jest prostopadly do powierzchni w punkcie (x_0,y_0,z_0). Prosta prostopadla do powierzchni w tym punkcie ma więc równanie parametryczne

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}t+x_0,\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}t+y_0,\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}t+z_0\right)$$

Dla sfery $f=x^2+y^2+z^2-R^2$, więc prosta prostopadla ma równanie

$$\left(2x_0t+x_0,\ 2y_0t+y_0,\ 2z_0t+z_0\right)$$

Elementy analizy fourierowskiej

Szereg Fouriera

$f:[-\pi,\pi]\rightarrow C$

funkcja calkowalna z kwadratem modulu: $\exists\int_{-\pi}^{\pi} dx\left|f(x)\right|^2$ (przestrzeń L_2)

1) uklad ortonormalny funkcji: $\phi_n:[-\pi,\pi]\rightarrow C$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\phi_m^{\ *}(x)\phi_n(x) \ = \delta_{mn}$$

2) uklad $\phi_n(x)$ jest zupelny, tj. kazda funkcje z L_2 mozna zapisac jako szereg $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\phi_n(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\phi_m^{\ *}(x)f(x)=\int_{-\pi}^{\pi} dx\phi_m^{\ *}(x)\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\phi_n(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\int_{-\pi}^{\pi} dx\phi_m^{\ *}(x)\phi_n(x)$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\delta_{mn}=c_m$$

W szeregu Fouriera $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ x \in [-\pi, \pi]$ (ortonormalny).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c_0 + \sum_{1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c_0 + \sum_{1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \frac{(e^{inx} + e^{-inx})}{2} + \sum_{1}^{\infty} i(c_n - c_{-n}) \frac{(e^{inx} - e^{-inx})}{2i} \right) =$$

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(szereg F. z funkcjami sin i cos)

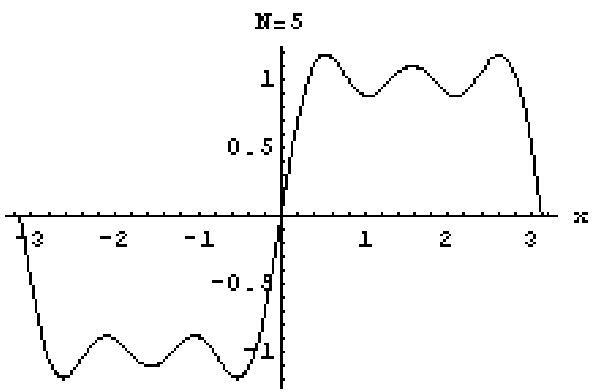
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x),\ \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos nx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \sin nx$$

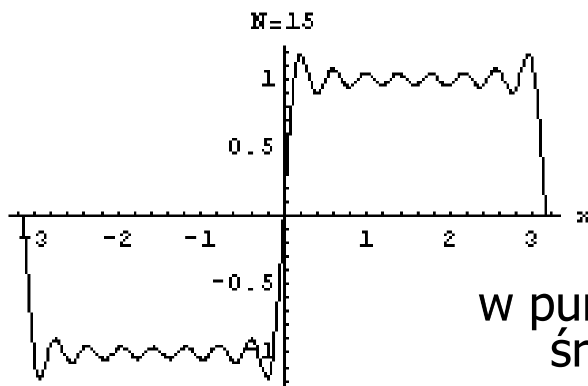
Przyklad:

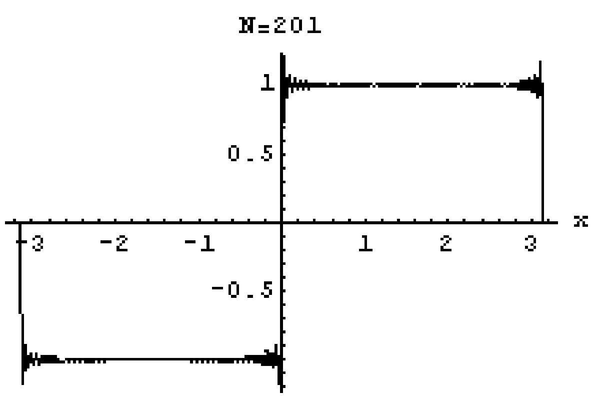
$$f(x) = \mathrm{sgn}(x), \ x \in [-\pi, \pi] \ \ \text{(nieciągla!)}$$

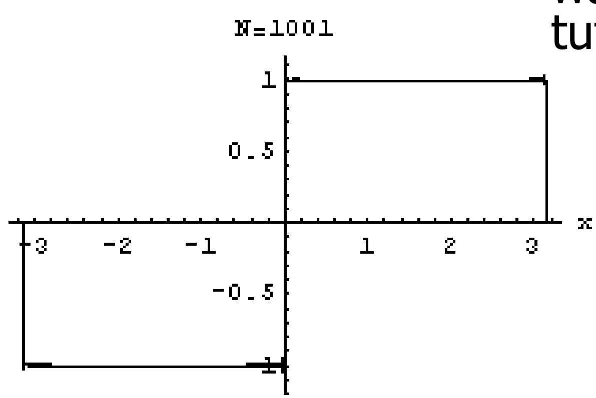
$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx \sin nx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{n - nieparzyste} \\ 0, & \text{n - parzyste} \end{cases}$$









w punktach nieciągłości średnia arytmetyczna wartości po obu stronach, tutaj (1-1)/2=0

Dla $f:[a,b]\rightarrow C$ rozwinięcie Fouriera ma postać

$$f(x)=a_0+\sum_1^\infty a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+\sum_1^\infty b_n\sin\frac{n\pi x}{T}$$

gdzie $T=\dfrac{b-a}{2}$, oraz

$$a_0=\frac{1}{2T}\int_a^b dx\, f(x),$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_a^b dx\, f(x)\cos\frac{n\pi x}{T},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^b dx\, f(x)\sin\frac{n\pi x}{T},\quad (n>0)$$

Uwagi: Podobnie jak w rozwinięciu Taylora, rozwinięcie Fouriera reprezentuje daną funkcję z pomocą (nieskończonej liczby) współczynników. Reprezentacją funkcji jest więc nieskończenie wymiarowy wektor (c_n). Każda funkcja całkowalna z kwadratem ma rozwinięcie Fouriera.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f^*(x) g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* d_n$$

Transformata Fouriera (ciągła)

Rozważmy $f : R \to C$, dla której $\exists \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| f(t) \right|$ (przestrzeń L_1).

Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-i\omega t} f(t), \quad \omega \in R$$

Wlasnosci:

1. $\hat{f}(\omega)$ jest ciagla
2. $g(t) = f(t-a) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = e^{i\omega a} \hat{f}(\omega)$
3. $g(t) = f(t/a) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = a\hat{f}(a\omega), \quad a > 0$
4. f - różniczkowalna, $f' \in L_1 \Rightarrow \widehat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$

Splotem funkcji f i g nazywamy

$$(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(y-x)g(x)$$

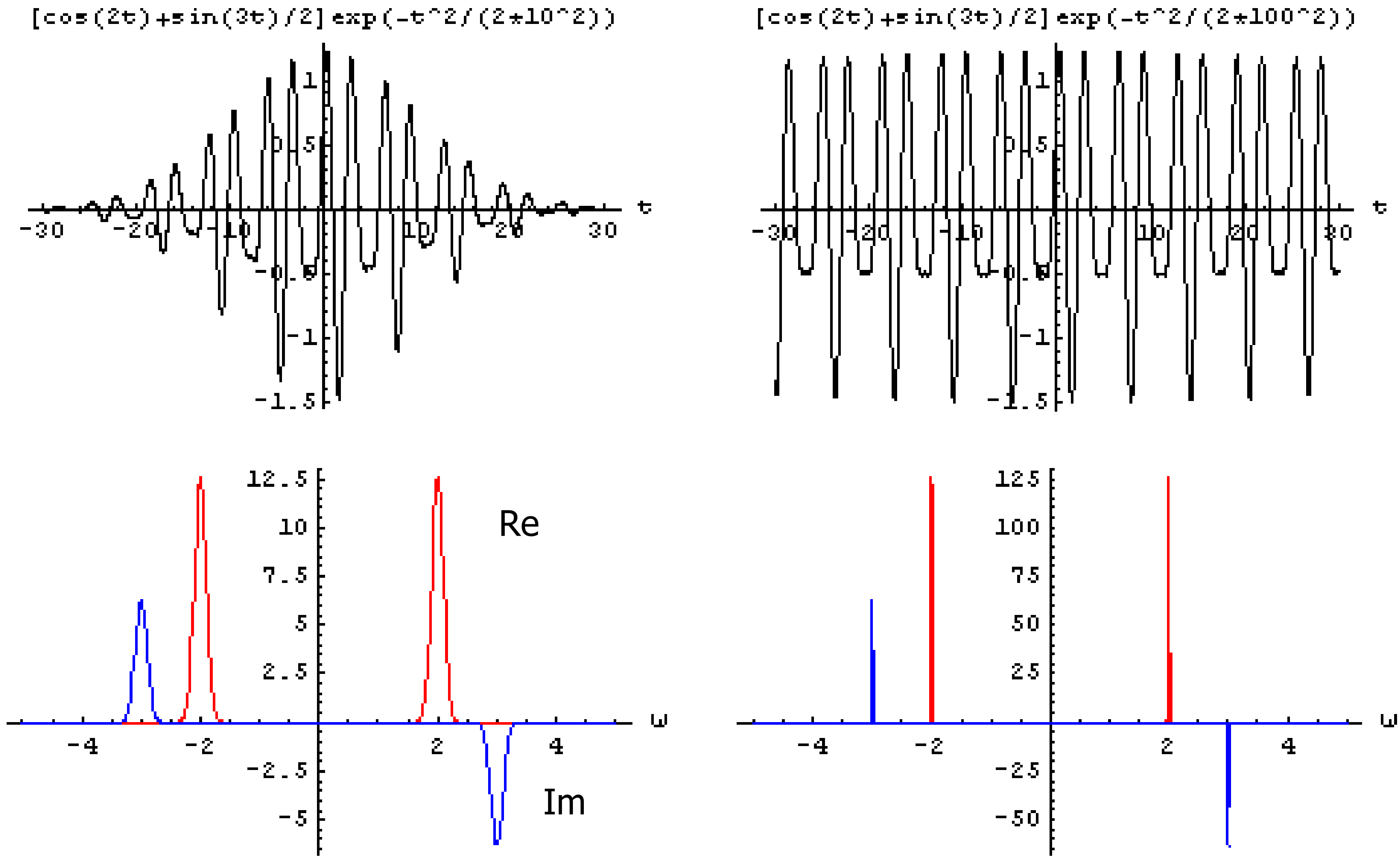
Tw. $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$

Odwrotna transformata Fouriera:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \hat{f}(\omega), \quad t \in R$$

Równosć Parsevala: $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^*(t)g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}^*(\omega)\hat{g}(\omega)$

Równosć Plancherela: $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \left| f(t) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left| \hat{f}(\omega) \right|^2$



sygnał czasowy – widmo częstości

rozmycie szerokości od skończonego zakresu w t

Transformata Fouriera funkcji Gaussa

$$f(t)=e^{-\frac{t^2}{2a^2}},\quad \hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t}=-i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} t e^{-i\omega t}=$$

$$=-i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt(-a^2)\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)e^{-i\omega t}=\frac{ia^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)e^{-i\omega t}=$$

$$=-\frac{ia^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\frac{d}{dt}e^{-i\omega t}=-a^2\omega\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t}=-a^2\omega\hat{f}(\omega)$$

Rozwiązanie: $\hat{f}(\omega)=Ce^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$ (szerszy sygnał, węższe widmo)

$$C=\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}=a\Rightarrow \hat{f}(\omega)=ae^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$$