

*[wersja z 26 III 2007]*

# Analiza Matematyczna

## część 4



Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki  
Akademia Świętokrzyska 2005/2006  
**Wojciech Broniowski**

# Analiza funkcji wielu zmiennych

# Przestrzeń wektorowa (liniowa)

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$  - wektory,  $a, b$  - skalary, tj. liczby pewnego ciała  $K$

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  przemienność dodawania

$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  łączność dodawania

$\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$  istnienie wektora zerowego,  $\vec{0} \in X$

$\forall \vec{x} \exists \vec{y} : \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$  istnienie wektora przeciwnego,  $\vec{y} = -\vec{x}$

$1\vec{x} = \vec{x}$

$a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$

$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$

Inna notacja:  $\vec{x} = \mathbf{x}$

$(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

$X$  nazywamy przestrzenią wektorową (lub liniową) nad ciałem  $K$

## Przykład: wektory na płaszczyźnie

$$X = R^2, K = R$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i - \text{kombinacja liniowa}$$

$$\text{Jeżeli } \sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

to wektory  $\vec{x}_i, i = 1, \dots, n$  nazywamy liniowo niezależnymi

$A \subset X$  **napina**  $X$  jeżeli każdy wektor z  $X$  można zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów z  $A$ . Jeżeli ponadto wektory z  $A$  są liniowo niezależne, to  $A$  nazywamy **bazą** przestrzeni  $X$ .

# Przestrzeń wektorowa unormowana

$\|\cdot\|: X \rightarrow R$  - norma

$$1) \vec{x} \neq 0 \Rightarrow \|\vec{x}\| > 0, \quad \|\vec{0}\| = 0$$

$$2) \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$3) \|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|$$

Tw. Przestrzeń unormowana  $(X, \|\cdot\|)$  jest przestrzenią

metryczną z metryką  $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ .

D:  $\rho: X \times X \rightarrow R_+ \cup \{0\}$

(norma indukuje metrykę, ale metryka nie indukuje normy)

$$1) \rho(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{0}\| = 0, \quad 2) \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x}),$$

$$3) \rho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$$

Przykład:  $X = R^n$ ,  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  (długość wektora)

# Baza kanoniczna: Iloczyn skalarny wektorów

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n$$

$$\text{Iloczyn skalarny: } \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\text{Tw. } \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \text{ dla normy euklidesowej}$$

$$\text{Tw. Z nierówności Schwarza } |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

$$\text{Ponadto } \vec{x} \cdot \vec{y} = \pm \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \text{ dla } x_i = \alpha y_i, \alpha > 0 \text{ - równoległe, } \alpha < 0 \text{ - antyrównoległe}$$

$$\text{Przykład: } \mathbb{R}^2, \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} r' \cos \phi' \\ r' \sin \phi' \end{pmatrix}, \|\vec{x}\| = r, \|\vec{y}\| = r'$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = rr'(\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') = rr' \cos(\phi - \phi')$$

Przykłady:

1)  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $K = \mathbb{C}^n$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$ ,  $\|\vec{x}\| = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$

2)  $X$  – przestrzeń funkcji rzeczywistych całkowalnych na przedziale  $[a, b]$

Iloczyn skalarny:  $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$ ,  $\|f\|^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$

3)  $X$  - przestrzeń ciągów o wyrazach rzeczywistych,  $(a_n)$

$$a \cdot b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad ((a_n) \text{ takie, że wyrażenia mają sens})$$

# Odwzorowanie liniowe

$X, Y$  - przestrzenie wektorowe nad ciałem  $K$

Odwzorowanie liniowe  $L: X \rightarrow Y$ :

$$\forall x, y \in X \quad \forall a, b \in K: L(a\vec{x} + b\vec{y}) = aL(\vec{x}) + bL(\vec{y})$$

Odwzorowanie  $L: R^n \rightarrow R^k$  można przedstawić w postaci macierzy o  $n$  kolumnach i  $k$  wierszach

$$L\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Tw. Odwzorowanie liniowe  $R^n \rightarrow R^k$  jest ciągłe



# Konwencja Einsteina o sumowaniu (fiz.)

$$\sum_{m=k}^n A_{\dots m \dots} B_{\dots m \dots} = A_{\dots m \dots} B_{\dots m \dots}$$

(sumujemy po powtarzających się wskaźnikach)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{m=1}^n a_m b_m = a_m b_m$$

$$\vec{y} = M\vec{x} \rightarrow y_k = M_{kl} x_l$$

$$(AB)_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta} \text{ - iloczyn macierzy}$$

$$M_{kk} = \sum_{k=1}^n M_{kk} = \text{Tr}M \text{ - ślad macierzy}$$

# Pochodna cząstkowa

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pochodna cząstkowa po  $x_k$  w punkcie  $\vec{x}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\delta}$$

Inna notacja:  $f_{x_k}(\vec{x}), f_k(\vec{x})$

Pochodną funkcją cząstkową po  $x_k$  nazywamy funkcję

przyporządkowującą każdemu  $\vec{x}$  wartość  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})$

Pochodną cząstkową po  $x_k$  wyliczamy tak samo, jak zwykłą pochodną, traktując pozostałe zmienne jako stałe

$$f(x, y, z) = z \sin(xy)$$

$$f_x(x, y, z) = zy \cos(xy), \quad f_y(x, y, z) = zx \cos(xy), \quad f_z(x, y, z) = \sin(xy)$$

# Pochodna Fréchet

Rozważmy  $f : R^n \rightarrow R^k$ . Pochodna Fréchet zdefiniowana jest jako odwzorowanie liniowe  $A : R^n \rightarrow R^k$  takie, że

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) - A\vec{h}\|_2}{\|\vec{h}\|_1} = 0 \text{ (uwaga, } f(\vec{x}) \text{ jest wektorem o } k \text{ składowych!)}$$

$$\text{Tw. } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Wiersze macierzy  $A$  stanowią pochodne cząstkowe kolejnych składowych funkcji  $f$ . Wierszy jest  $k$  (wymiar przeciwdziedziny), a kolumn  $n$  (wymiar dziedziny).

$$k = 3, n = 2, \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}, \vec{f}'(x, y) = A = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Gradient

$$f : R^n \rightarrow R$$

Gradientem nazywamy pochodną Frécheta funkcji  $f$ , tj.

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) = \left( \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)$$

$$\text{Operator Nabla } \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \vec{\nabla}f(\vec{x}) = (2x, 2y)$$

# Pochodna kierunkowa

$f : R^n \rightarrow R^k$ ,  $u \in R^n$ ,  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $h \in R$ . Pochodna kierunkowa w kierunku  $\vec{u}$  :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}(\vec{x}) = \partial \vec{f}_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + \delta \vec{u}) - \vec{f}(\vec{x})}{\delta}$$

Tw. Jeżeli  $A$  jest pochodną Fréchet'a w punkcie  $\vec{x}$ , to  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}(\vec{x}) = A\vec{u}$

$$D: \vec{h} = \delta \vec{u}, \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) - A\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

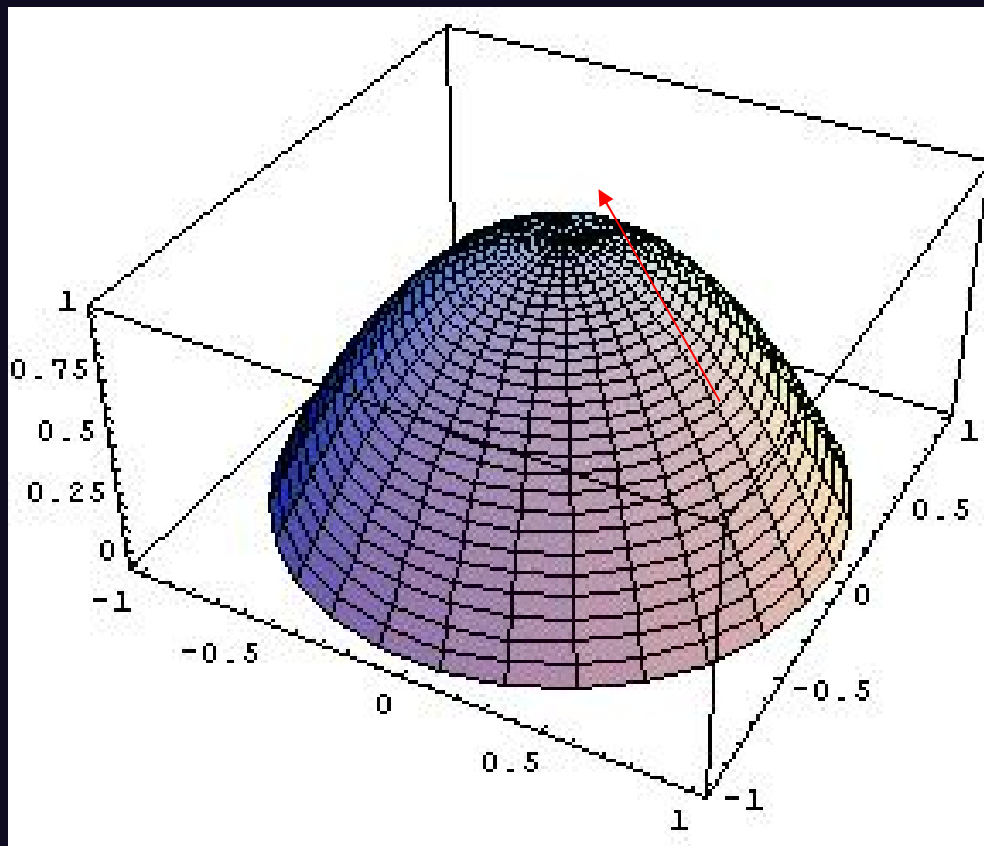
$$\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\|\vec{f}(\vec{x} + \delta \vec{u}) - \vec{f}(\vec{x}) - \delta A\vec{u}\|}{\delta} = 0 \Rightarrow \partial \vec{f}_{\vec{u}}(\vec{x}) - A\vec{u} = 0$$

Pochodna kierunkowa  
jest największa w  
kierunku gradientu!

Tw. Dla  $k = 1$  mamy  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{x}) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$

$$D: \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{x}) = A\vec{u} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$$

# Interpretacja geometryczna gradientu



$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$\vec{\nabla}f(x, y) = (-2x, -2y)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

# Pochodna funkcji złożonej

$\vec{f} : R^k \rightarrow R^m$ ,  $\vec{g} : R^m \rightarrow R^n$ , posiadające pochodne Frécheta w punkcie  $\vec{x}$  i  $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ .

Tw. Pochodna Frecheta funkcji  $f \circ g$  wynosi  $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{y})\vec{g}'(\vec{x})$

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{g}(\vec{x})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(\vec{g}(\vec{x})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

notacja tensorowa:  $\frac{\partial (\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{x})}{\partial x_l} = \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x_l} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}(\vec{x})$

$$m=1, k=n=3, f(\vec{y}) = \frac{y_2}{y_1} + y_3, \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \\ \sin x \end{pmatrix}, f(\vec{g}(x)) = \frac{x}{2} + \sin x$$

$$f'(\vec{y}) = \left( -\frac{y_2}{y_1^2}, \frac{1}{y_1}, 1 \right), \vec{g}'(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \\ \cos x \end{pmatrix}, (f \circ \vec{g})'(x) = \left( -\frac{1}{4}, \frac{1}{2x}, 1 \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \\ \cos x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \cos x$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t), \beta(s,t), \gamma(s,t))}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t), \beta(s,t), \gamma(s,t))}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x, y), y)}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x, y), y)}{\partial y} = \frac{\partial \kappa}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}$$



# Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

$U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$  różniczkowalna

Pochodna cząstkowa drugiego rzędu:  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f_{x_j x_i} = f_{ji}$

Tw. W  $U$  istnieją pochodne  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , ciągle w  $\vec{x}$ . Wtedy  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ .

D:  $\Phi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)$

$\varphi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ ,  $\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y)$

Z Tw. Lagrange'a o wartości średniej  $\exists \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ :

$\Phi(x, y) = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y) = k\varphi_y(x, y+\theta_1 k)$

$\varphi_y(x, y+\theta_1 k) = f(x+h, y+\theta_1 k) - f(x, y+\theta_1 k) = hf_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)$

$\Phi(x, y) = hkf_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k)$

Podobnie  $\Phi(x, y) = \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \dots$

$\Phi(x, y) = hkf_{yx}(x+\eta_2 h, y+\eta_1 k)$

$\Rightarrow f_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = f_{yx}(x+\eta_2 h, y+\eta_1 k)$ . Z ciągłości  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$   $\square$  17

Pochodna cząstkowa rzędu trzeciego:  $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{kji}$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + yx$$

$$f_x = 2x + y, f_y = x, f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 0$$

$$\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{g}(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 \\ ab \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_a = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}, \vec{g}_b = \begin{pmatrix} -2b \\ a \end{pmatrix}, \vec{g}_{aa} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g}_{bb} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Operator Laplace'a i dywergencja (fiz.)

Operator to funkcja, która funkcji przyporządkowuje funkcję.

Operator Laplace'a (laplasjan)

$$\Delta = \partial_i \partial_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad \Delta f = 4 + 6x$$

Dywergencja:  $\vec{g}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (pole wektorowe)

$$\operatorname{div} \vec{g} = \partial_i g_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}$$

$$\vec{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ z^2 y \\ xyz \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 1 + z^2 + xy$$

# Elementy rachunku tensorowego (fiz.)

Delta Kroneckera:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$

tensor symetryczny :  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ,  $\delta_{ii} = n$  (wymiar przestrzeni)

$$\delta_{ij} A_{\dots j \dots} = A_{\dots i \dots}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

Pseudotensor Levi-Civity (w 3 wymiarach):  $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \quad \text{pozostale} = 0$$

tensor calkowicie (we wszystkich wskaźnikach) antysymetryczny

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

Iloczyn wektorowy  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

równoważny zapis:  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m = a_j c_j b_k d_k - b_j c_j a_k d_k$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

# Rotacja (fiz.)

$$\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f}, \quad (\operatorname{rot} \vec{f})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k$$

$$\partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j f_k = -\varepsilon_{jik} \partial_i \partial_j f_k = (i \leftrightarrow j) = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i f = -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j f$$

$$\partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = 0$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{f}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

$$\partial_i (u(\vec{x}) f_i(\vec{x})) = f_i \partial_i u + u \partial_i f_i$$

$$\operatorname{div} (u\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla} u + u \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \vec{f}$$

# Wzór Taylora dla wielu zmiennych (fiz.)

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad P_0 = (x_0, y_0), \quad P(x+h, y_0+k), \quad \overline{P_0P} \subset U$$

$$d^j f(x, y) = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \frac{\partial^j f(x, y)}{\partial x^{j-l} \partial y^l} h^{j-l} k^l \quad - \text{ dwa wymiary, } n \text{ członów}$$

Tw.  $f$  ma ciągle pochodne cząstkowe rzędu  $n$  w  $U \Rightarrow \exists \theta \in (0,1)$ :

$$f(P) = f(P_0) + \frac{d^1 f(P_0)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1} f(P_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)}{n!}$$

Dla  $d$  wymiarów i  $n = 2$  członów,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , mamy

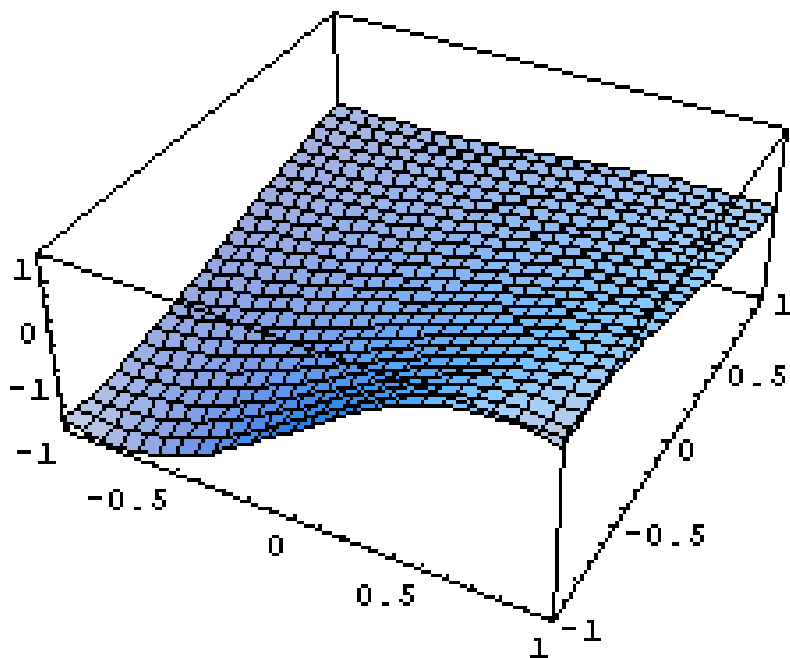
$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f(\vec{x} + \theta \vec{h})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} - d\text{-wymiarów} = f(\vec{x}) + \partial_i f(\vec{x}) h_i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(\vec{x} + \theta \vec{h}) h_i h_j$$

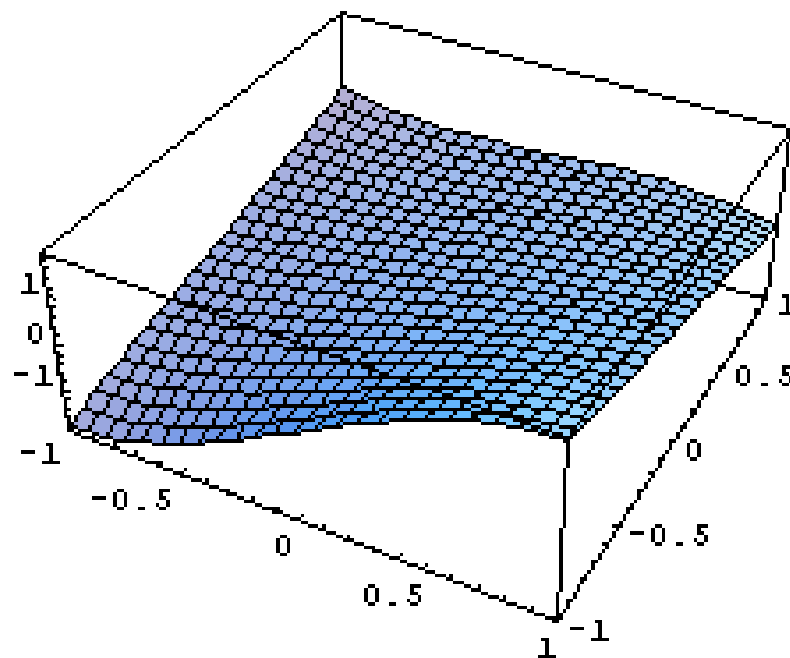
$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_d=0}^{\infty} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_d}}{\partial x^{i_d}} \frac{f(a_1, \dots, a_d)}{i_1! \dots i_d!} (x_1 - a_1)^{i_1} \dots (x_d - a_d)^{i_d} - (\text{szereg})$$

Przykład:

$$f(x) = \sin(x) \cos(xy) e^{-y} \approx x - xy - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6} - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{xy^4}{24} - \frac{7x^3 y^2}{12}$$



dokładna



przybliżona wielomianem



# Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Tw. (warunek konieczny ekstremum lokalnego)

Jeżeli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie  $\vec{x}_0$  i ma w tym

pochodne cząstkowe, to  $\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0$ .

Dowód: Ustalmy  $i$ , następnie rozważmy  $g(x) = f(\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots)$ .

Funkcja  $g(x)$  ma ekstremum dla  $x = x_{0,i}$ , a zatem z tw. o warunku

koniecznym ekstremum dla funkcji jednej zmiennej mamy  $\frac{dg(x)}{dx} = 0$ ,

co oznacza  $\frac{\partial f(\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots)}{\partial x} = 0$ .  $\square$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Forma kwadratowa to wyrażenie postaci (konwencja Einsteina o sumowaniu!)

$$g(\vec{h}) = h_i a_{ij} h_j \quad (\text{np. } x^2 + y^2 - z^2 - 10zx + 2xy)$$

Forma kwadratowa jest dodatnio określona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) > 0$$

a ujemnie określona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) < 0.$$

Jeżeli nie zachodzi żaden z tych przypadków, to forma jest nieokreślona.

Tw. Rozważmy formę  $d^2 f(\vec{x})(\vec{h}) = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$  i niech  $f(x)$  ma ciągłe pierwsze

i drugie pochodne w okolicy  $x_0$ , oraz  $\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0$ . Wtedy jeżeli

a)  $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$  jest dodatnio określona to  $f$  ma w  $x_0$  minimum lokalne

b)  $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$  jest ujemnie określona to  $f$  ma w  $x_0$  maksimum lokalne

c)  $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$  jest nieokreślona to  $f$  nie ma w  $x_0$  ekstremum lokalnego

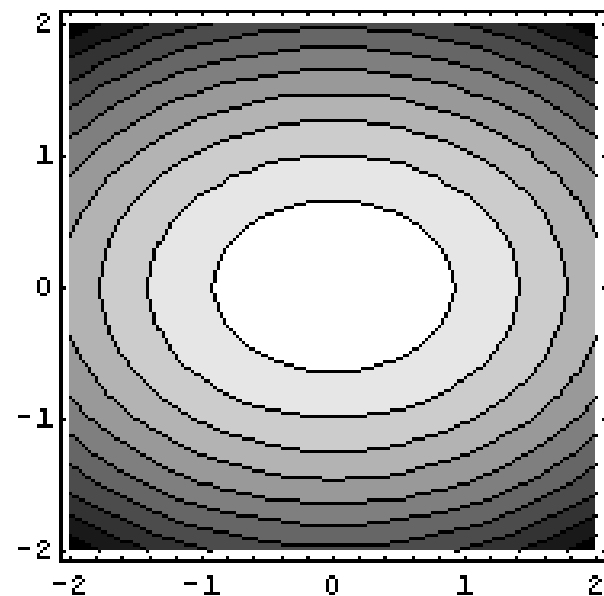
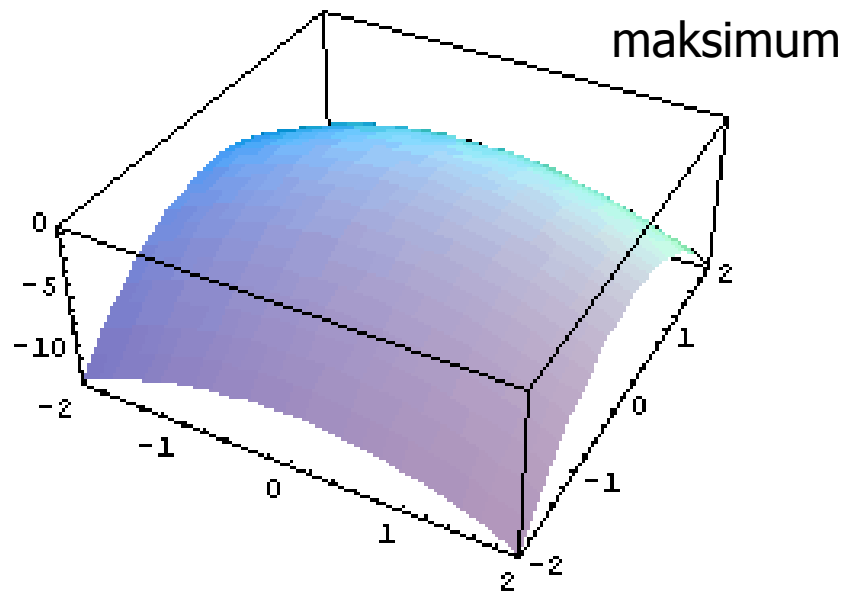
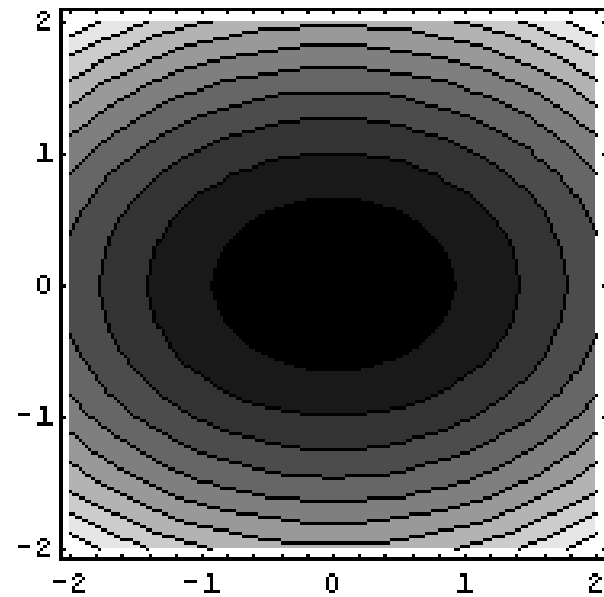
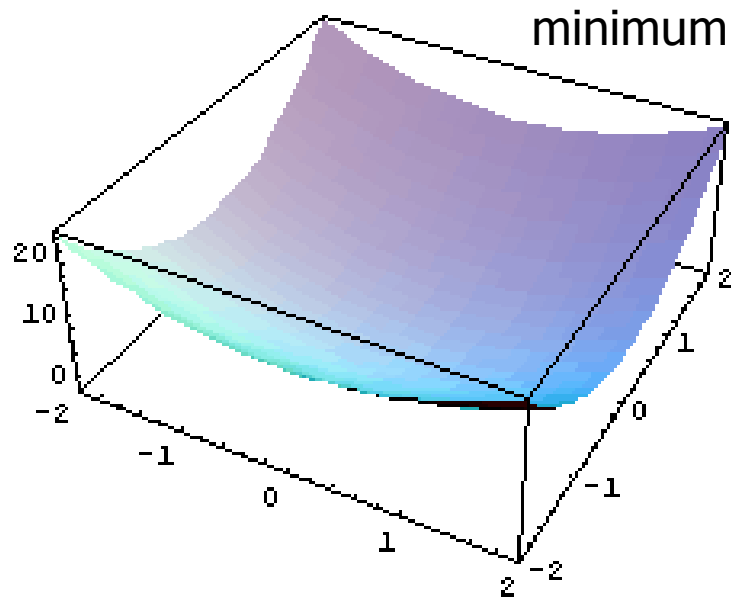
Minorem rzędu  $k$  macierzy  $a$  rzędu  $m$  nazywamy wyznacznik utworzony z pierwszych  $k$  rzędów i pierwszych  $k$  kolumn tej macierzy:

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

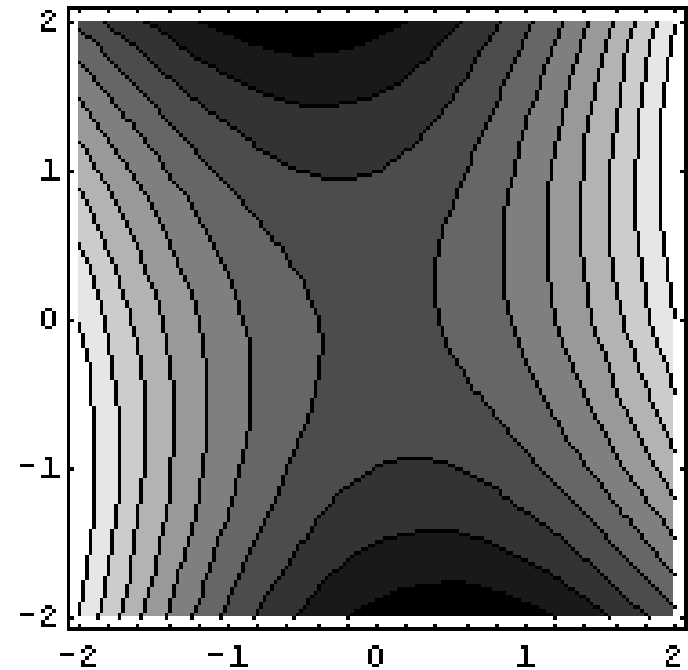
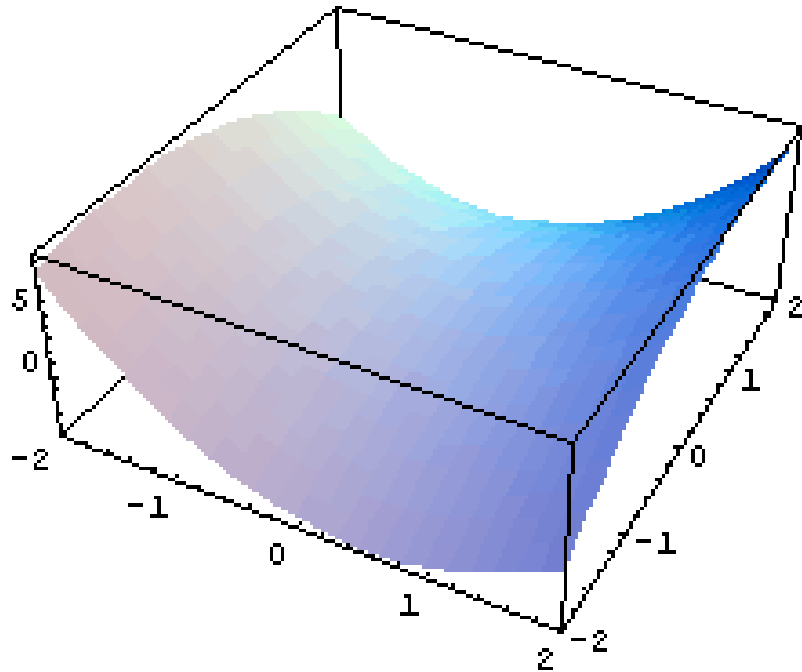
Tw. Forma  $g(h) = h_i a_{ij} h_j$  jest dodatnio określona, jeżeli wszystkie jej minory są dodatnie,  $A_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , a ujemnie określona, jeżeli  $(-1)^k A_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Jeżeli nie zachodzi żadna z tych dwóch sytuacji, to forma jest nieokreślona.

Przypadek  $m = 2$ :  $W = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ ,  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$

- 1)  $W > 0$ ,  $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$  - minimum
- 2)  $W > 0$ ,  $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$  - maksimum
- 3)  $W < 0$  - punkt siodłowy
- 4)  $W = 0$  - brak rozstrzygnięcia



Siodło:  $f(x,y)=2x^2-y^2+xy$



Poszukiwanie ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

- 1) znalezienie ekstremów lokalnych we wnętrzu
- 2) inspekcja brzegu i "rogów"

# Funkcje uwikłane (fiz.)

$F(x, y)$  - ciągła,  $F(x, y) = 0 \rightarrow y = y(x)$  - funkcja uwikłana

Tw:  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F_x, F_y$  - ciągle w otoczeniu  $(x_0, y_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow$

1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists$  **jedyne**  $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, y) = 0$

$$2) y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ,  $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  - równanie okręgu i punkt doń należący

$F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y}$ ,  $y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1$  - mamy "bez wysiłku"

$F(x, y) = 2^y x - x^2 y^2 + (1 - x^2) \sin y$ ,  $x_0 = y_0 = 0$  - **nie da się odwikłać!**

$$F_y(0, 0) = 1 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{2^y - 2xy^2 - 2x \sin y}{2^y x \ln 2 - 2x^2 y + (1 - x^2) \cos y}, y'(0) = -1$$

Wyprowadzenie 2):  $F(x, y(x)) = 0$ ,

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y) + y'(x)F_y(x, y) = 0$$

Ponadto  $F_{xx} + 2y'(x)F_{xy} + y''(x)F_y + (y'(x))^2 F_{yy} = 0$

$$F_{xx} - 2\frac{F_x}{F_y} F_{xy} + y''(x)F_y + \left(\frac{F_x}{F_y}\right)^2 F_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow y''(x) = -\frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}$$

Ekstremum  $y(x)$ :  $y'(x) = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow y''(x) = -\frac{F_{xx}}{F_y}$



## Przykład krzywej trzeciego stopnia: Lisć Kartezjusza

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$F_y = 3y^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow y^6 + y^3 - 3y^3 \neq 0 \Rightarrow y \neq \sqrt[3]{2}$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \wedge (x, y) \neq (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$

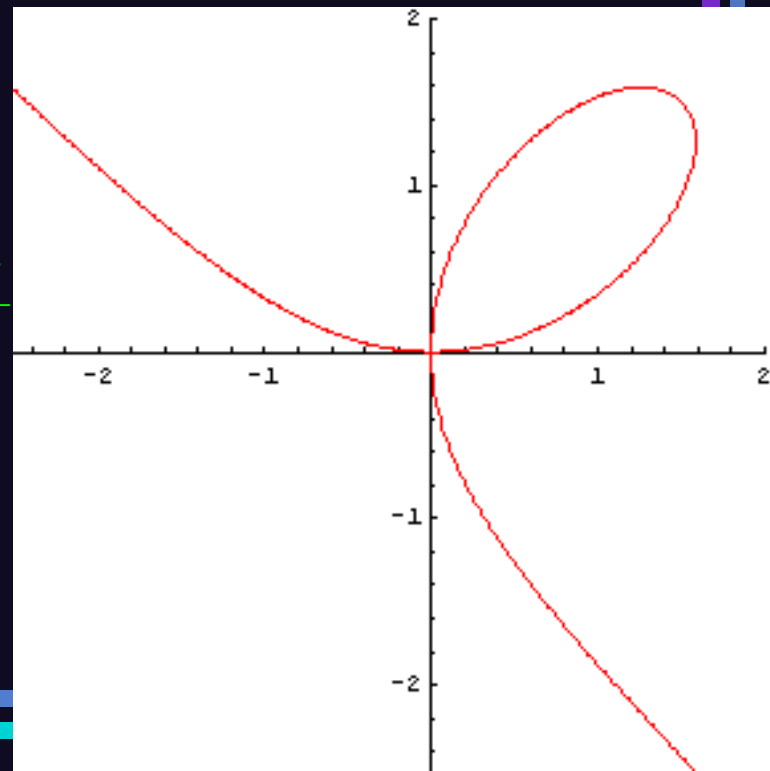
$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} \Rightarrow y' = 0 \text{ dla } y = x^2 \Rightarrow x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{2}, y_0 = \sqrt[3]{4},$$

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} =$$

$$= \frac{6x(3y^2 - 3x)^2 + 6(3x^2 - 3y)(3y^2 - 3x) + 6y(3x^2 - 3y)^2}{(3y^2 - 3x)^3}$$

$\Rightarrow$  (po wstawieniu)  $y''(x_0, y_0) < 0$  - maksimum



# Ekstrema warunkowe (fiz.)

$$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Funkcja  $f$  ma w punkcie  $(x_0, y_0)$  maksimum warunkowe, jeżeli

$$\exists \delta > 0 \forall x, y : |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2| < \delta \wedge g(x, y) = 0 \Rightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

analogicznie: minimum ...  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x), y' = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$\text{Rozważmy } F(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow F'(x) = f_x + f_y y' = f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y}$$

$\Rightarrow$  funkcja może mieć ekstremum gdy  $f_x g_y = f_y g_x$

$$\text{Przykład: } f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\text{warunek: } 2y = 2x, \Rightarrow x_0 = y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Metoda mnożników Lagrange'a (fiz.)

Tworzymy pomocniczą funkcję  $\Phi(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ , gdzie  $\lambda$  nazywa się mnożnikiem Lagrange'a lub czynnikiem nieoznaczonym Lagrange'a. Następnie znajdujemy ekstrema funkcji  $\Phi$  tak, jakby zmienne  $x$  i  $y$  były niezależne.

Rozwiązujemy układ równań  $\Phi_x = 0$ ,  $\Phi_y = 0$ ,  $g(x, y) = 0$ .

Dowód:  $\Phi_x = f_x + \lambda g_x = 0$ ,  $\Phi_y = f_y + \lambda g_y = 0$ . Eliminując  $\lambda$  dostajemy  $f_x g_y = f_y g_x$ .

Dla  $n$  zmiennych i  $k$  warunków mamy następujące uogólnienie:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Szukamy ekstremum

$$\partial_j \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \partial_j f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \partial_j g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \partial_j g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Ponadto  $g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $r = 1, \dots, k$ , co łącznie daje  $n + k$  równań na  $n + k$  niewiadomych ( $n$  zmiennych  $x$  i  $k$  czynników  $\lambda$ ).

Przykład: znajdź największą i najmniejszą wartość formy kwadratowej w trzech wymiarach,  $f = x_i a_{ij} x_j$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ , przy warunku

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

$$\Phi_x / 2 = (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$\Phi_y / 2 = a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad (*)$$

$$\Phi_z / 2 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

co daje 3 pierwiastki  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Ponadto, mnożąc (\*) przez  $x_i$  i dodając stronami dostajemy  $f(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . Wniosek: maksimum i minimum warunkowe funkcji  $f$  pokrywa się z maksymalną i minimalną wartością  $\lambda_i$ .

# Krzywe i rozciągłości wielowymiarowe

$\Phi : V \subset R^k \rightarrow U \subset R^n, k \leq n$  – homeomorfizm ( $1-1, \Phi$  i  $\Phi^{-1}$  ciągłe),

$U, V$  – otwarte. Wtedy  $U$  nazywamy  $k$ -wymiarową powierzchnią

(hiperpowierzchnią, rozciągłością, rozmaitością)

Jeżeli  $\Phi$  jest homeomorfizmem regularnym ( $\forall x \in V$  rząd  $\Phi'(x) = k$ ) to  $U$

nazywamy  $k$ -wymiarową powierzchnią gładką

$k=0$  - zerowymiarowa powierzchnia (punkty izolowane)

$k=1$  - krzywa, linia

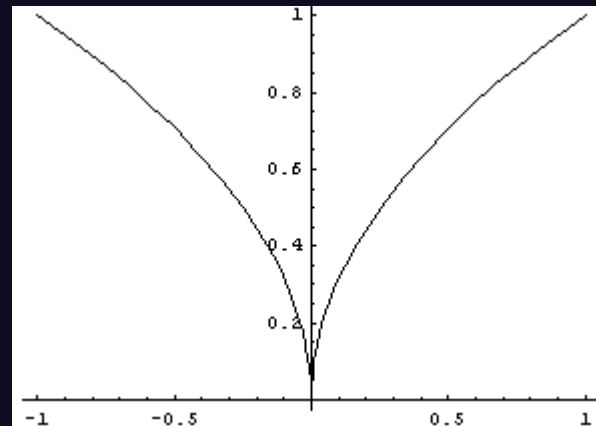
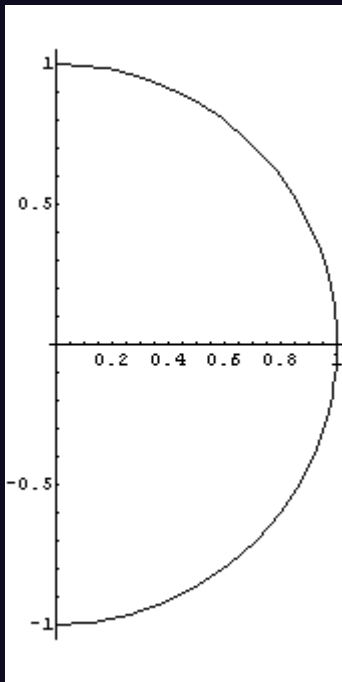
$k=2$  - powierzchnia

$k>2$  - hiperpowierzchnia

Przykład:

$k=1, n=2, U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \Phi = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \Phi' = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \forall t \in U : \exists \Phi' \wedge r_z \Phi' = 1$  – łuk gładki

$k=1, n=2, U = (-1, 1), \Phi = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{|t|} \end{pmatrix}, \forall t \neq 0 : \Phi' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\text{sgn}(t)}{2\sqrt{|t|}} \end{pmatrix}$  – w  $t=0$  szpic



Parametr  $t$  numeruje punkty wzdłuż krzywej

Krzywa domknięta:

$$\Phi : [a, b] \rightarrow R^n$$

$\Phi(a)$  – początek,  $\Phi(b)$  – koniec

$\Phi(a) \neq \Phi(b)$  – homeomorficzna z przedziałem

$\Phi(a) = \Phi(b)$  – homeomorficzna z okręgiem

RYS., str. 221

# Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)

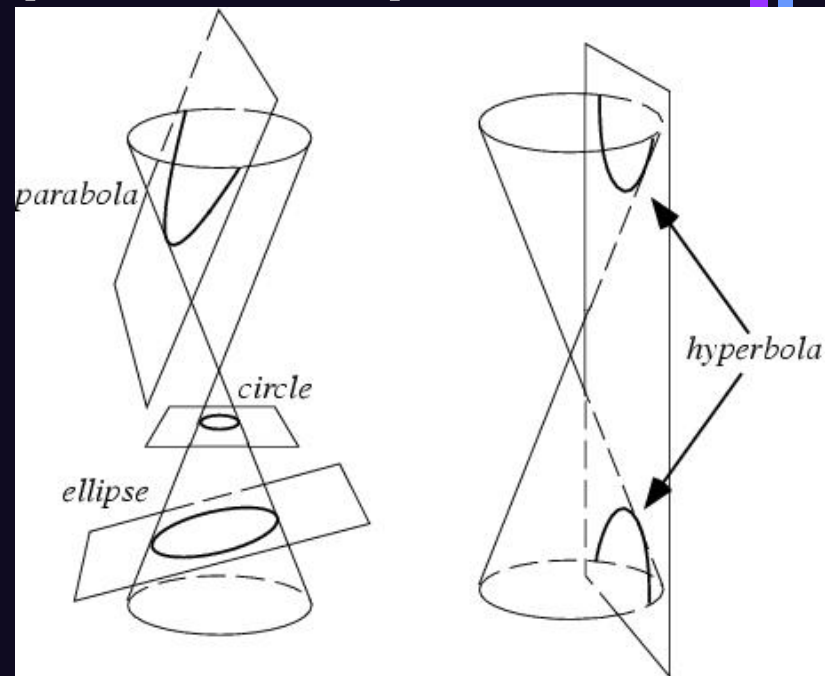
Powstają z przecięcia stożka płaszczyzną:

Okrąg, elipsa, parabola, hiperbola

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix}, J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$I = a + c, K = \begin{vmatrix} a & d \\ d & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & f \\ f & g \end{vmatrix}$$



krzywa	$\Delta$	$J$	$\Delta/I$	$K$
elipsa	$\neq 0$	$> 0$	$< 0$	
parabola	$\neq 0$	$0$		
hiperbola	$\neq 0$	$< 0$		
linie przecinające się	$0$	$0$		$< 0$
linie przekrywające się	$0$	$0$		$0$

okrąg=elipsa,  $a = c$



Redukcja do prostszej postaci:

Przez obrót możemy się pozbyć czlonu mieszanego

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

Czlon mieszany wynosi wtedy  $2x'y'[(a-c)\cos\phi\sin\phi + b(\cos^2\phi - \sin^2\phi)]$

i znika dla  $\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{2b}{c-a}$  dla  $c \neq a$  oraz  $\phi = \frac{\pi}{4}$  dla  $c = a$ . Po takim obrocie

mamy  $Ax'^2 + Cy'^2 + 2Dx' + 2Fy' + G = 0$ .

Czlonow liniowych pozbywamy się przez transformację

$$x'' = x' + D/A$$

$$y'' = y' + F/C$$

Wtedy  $Ax''^2 + Cy''^2 + G'' = 0$ .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} \quad \text{mimosród}$$

$$a = b = r, \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{okrąg}$$

$$y = ax^2, \quad x = ay^2 \quad \text{parabola}$$

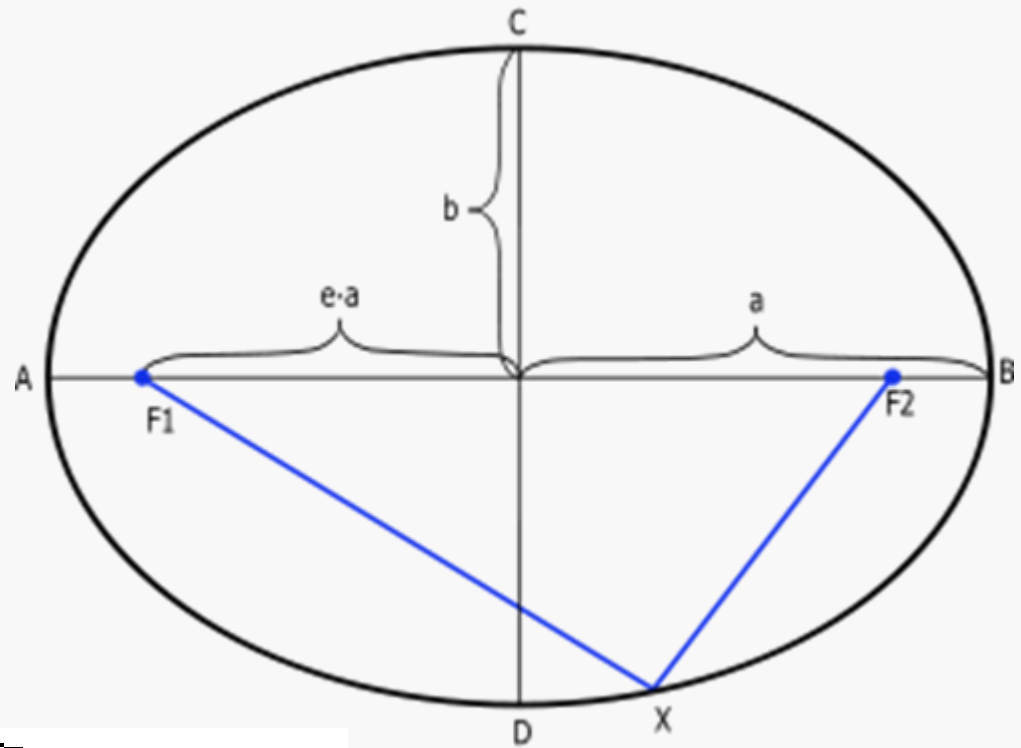
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy = c \quad \text{hiperbola}$$

# Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (a \geq b)$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{mimośród}$$

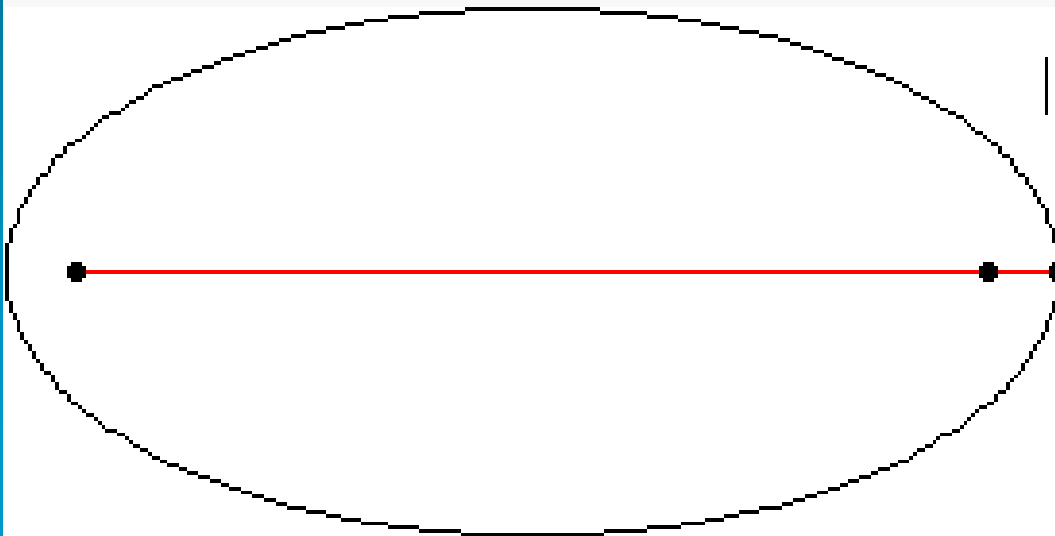


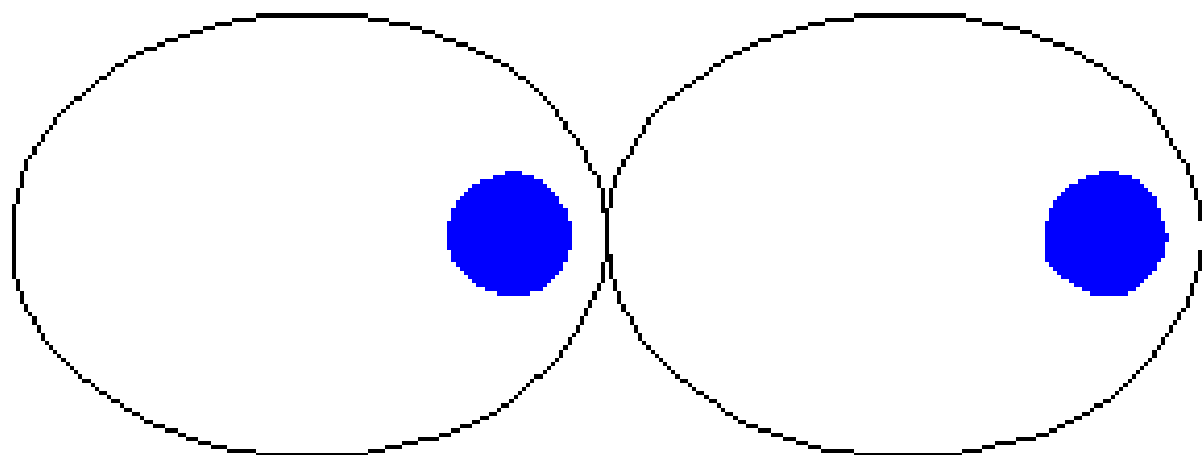
$$|XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{const.}$$

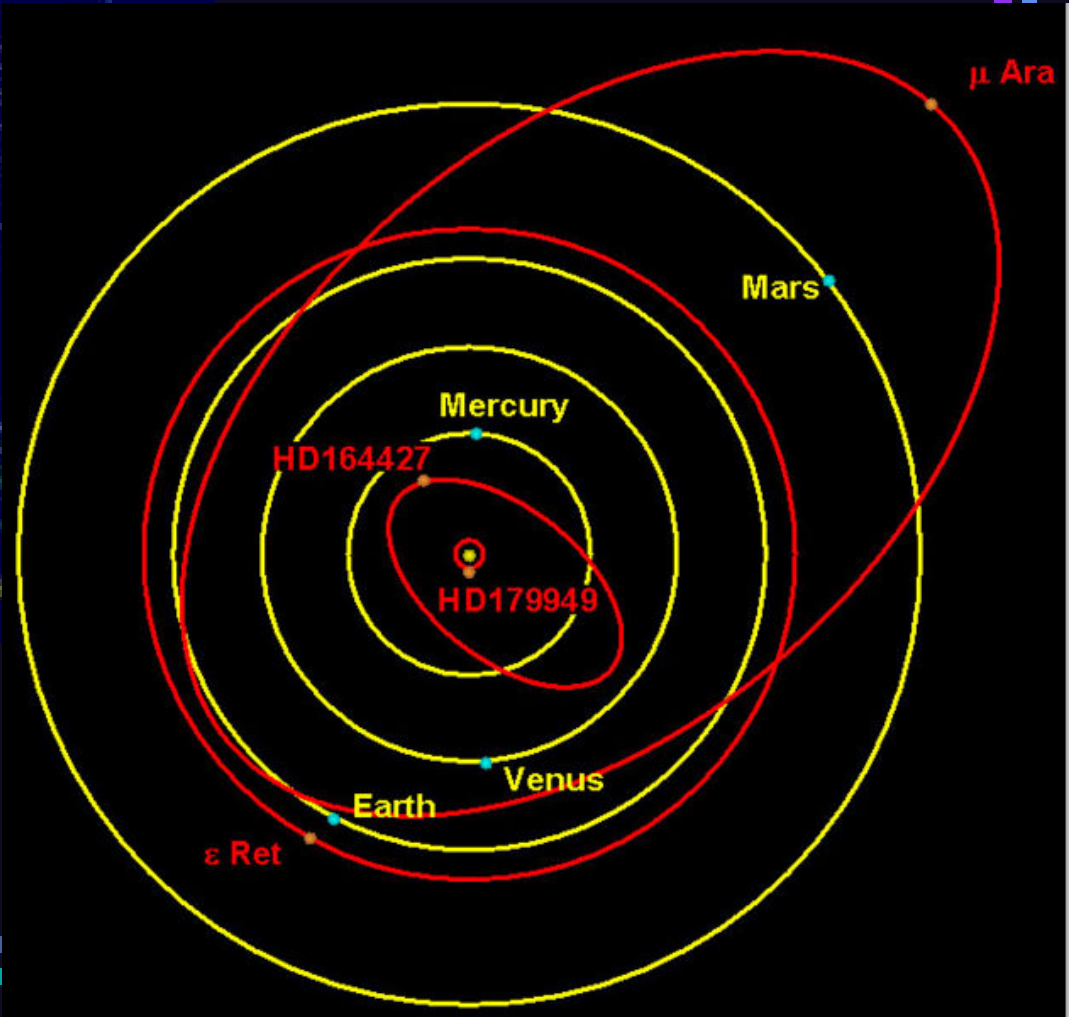
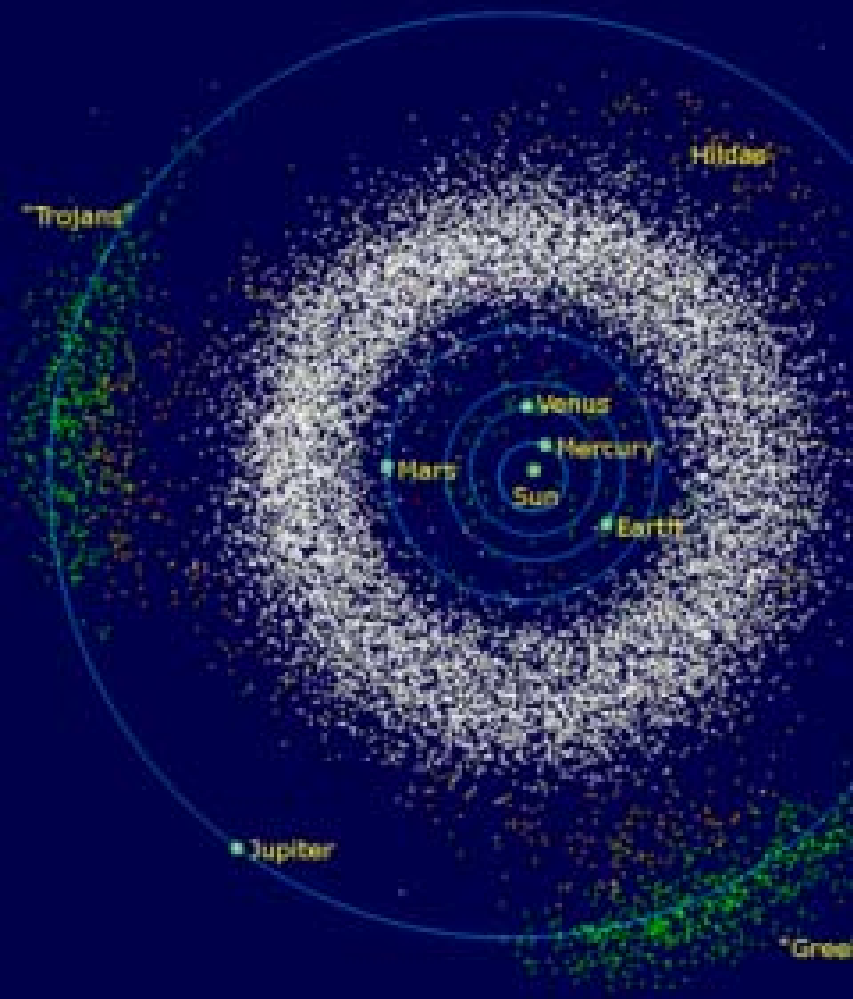
$F_1, F_2$  - ogniska

$a$  - półoś wielka

$b$  - półoś mała







# Całki eliptyczne (fiz.)

długość łuku elipsy

$$x = a \sin \phi, \quad y = b \cos \phi$$

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} d\phi = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} d\phi =$$

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + (a^2 - c^2) \sin^2 \phi} d\phi = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \phi} d\phi = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$L(\Phi) = a \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(k, \Psi), \quad k < 1, \quad F(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Całka eliptyczna: I rodzaju}$$

$$\int_0^{\Psi} d\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = E(k, \Psi), \quad k < 1, \quad E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{II rodzaju}$$

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\phi}{(1 + h \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = K(h, k, \Psi) \quad \text{III rodzaju}$$

$$\int R(x, \sqrt{W(x)}) dx, \quad (1)$$

W – wielomian stopnia 3 lub 4

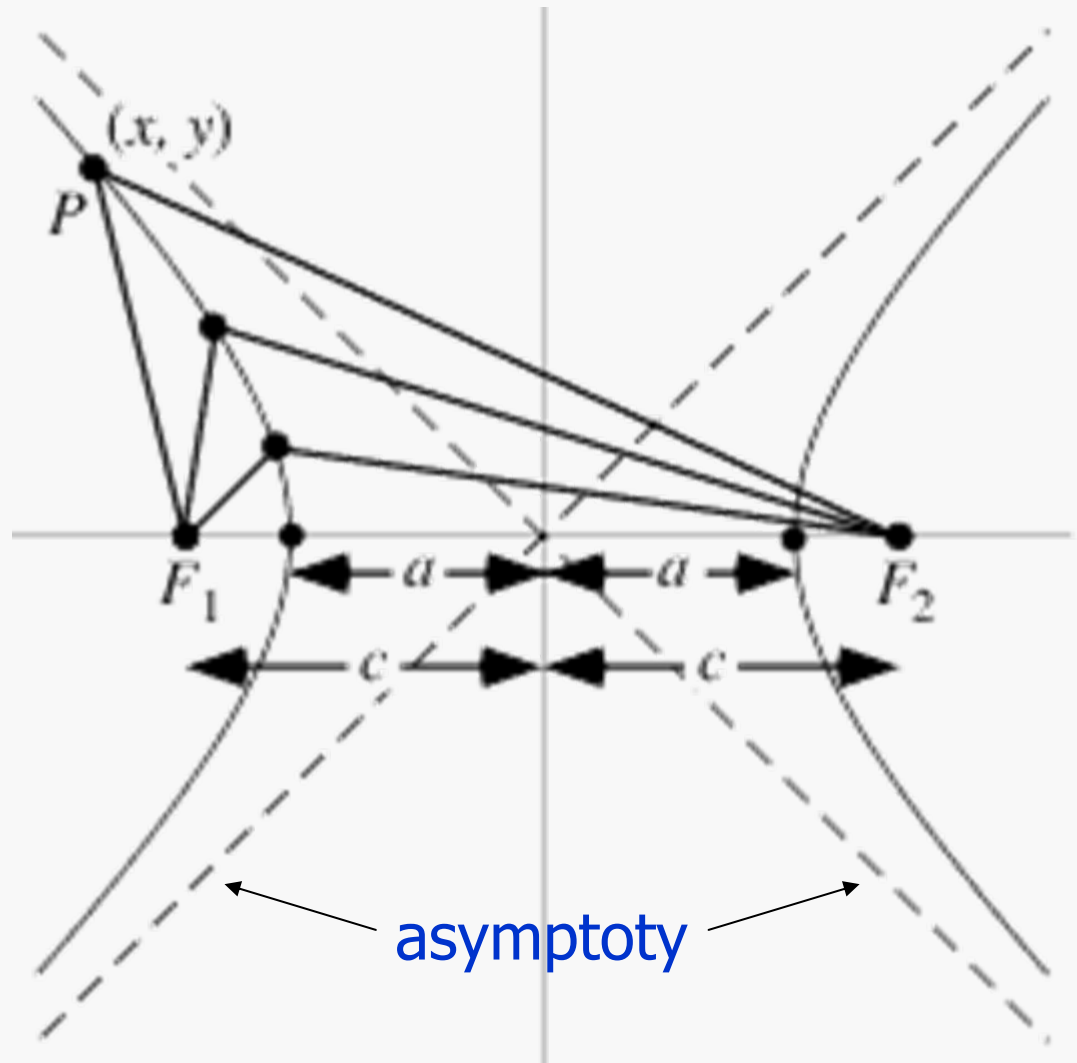
# Hiperbola

$$\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a = \text{const.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

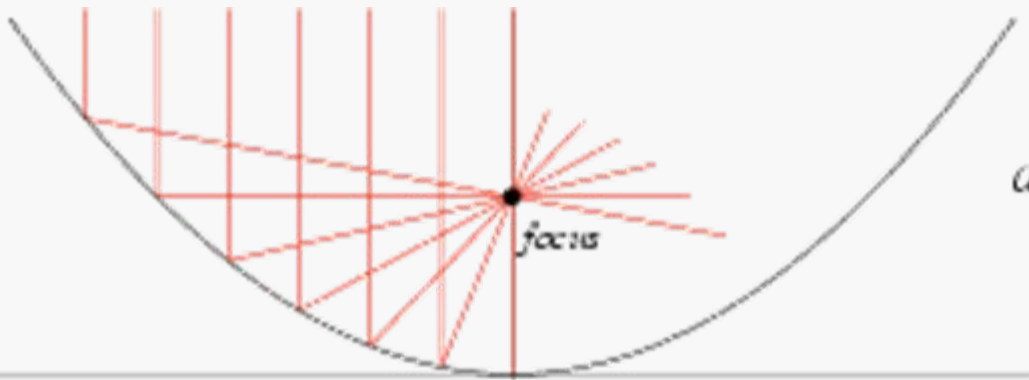
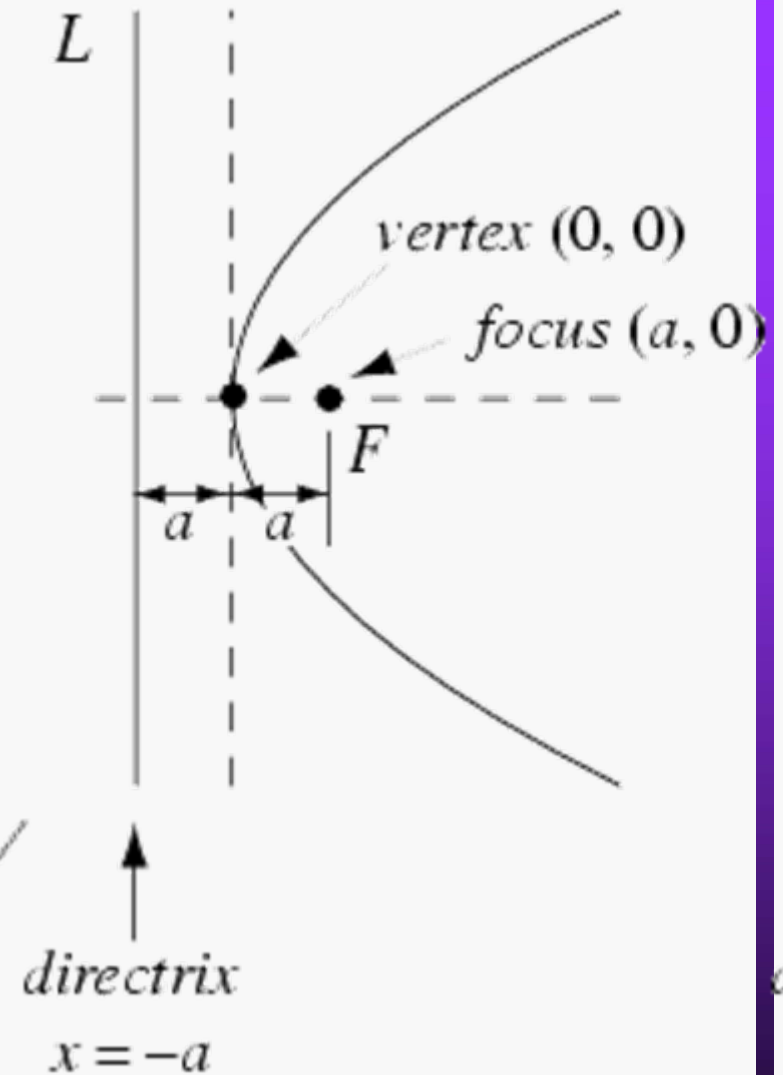
$$e = \frac{c}{a} > 1$$

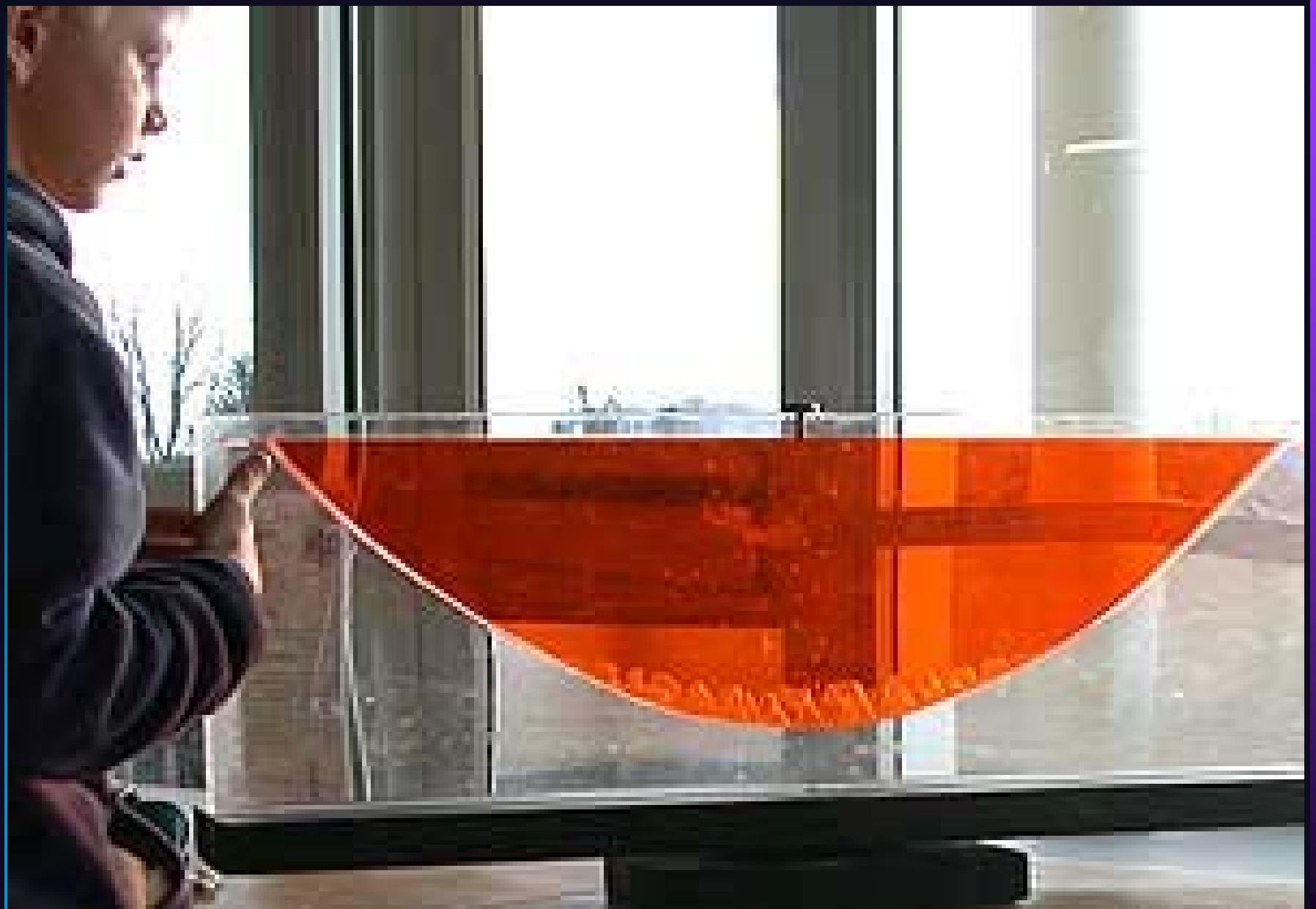


# Parabola

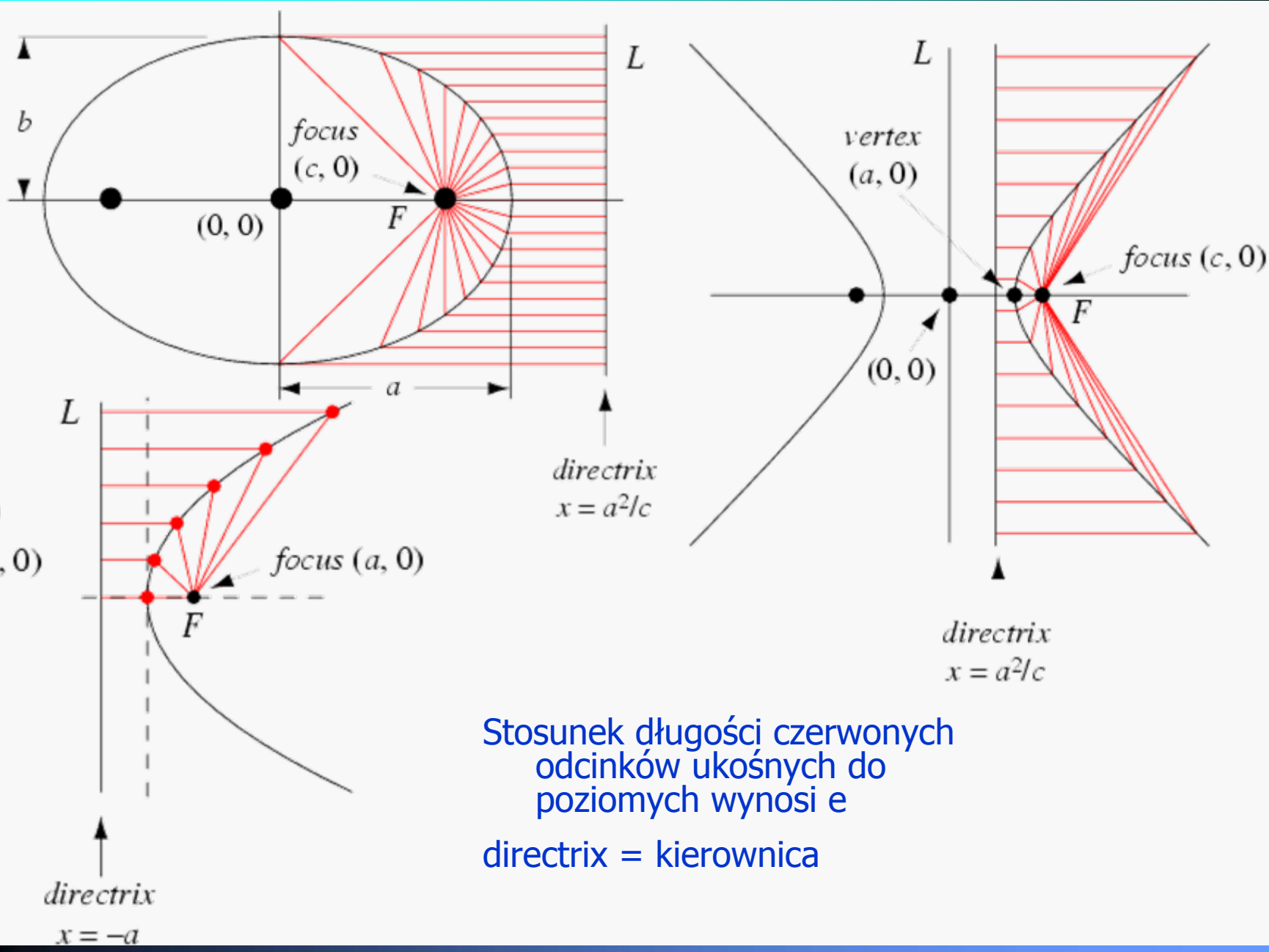
$$x = 4ay^2$$

$$e = 1$$









Stosunek długości czerwonych odcinków ukośnych do poziomych wynosi  $e$

directrix = kierownica

# Krzywizna krzywej płaskiej (fiz.)

Krzywa  $y = y(x)$

równanie stycznej w  $(x_0, y_0)$ :  $y - y_0 = y'(x)(x - x_0)$

równanie normalnej w  $(x_0, y_0)$  (prostopadła do stycznej):  $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

(jest tak dlatego, bo  $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ , więc  $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{y'(x)}$ )

Rozważmy 2 punkty na krzywej,  $(x_0, y_0)$  i  $(x_1, y_1)$ , oraz normalne w tych punktach:

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ ,  $y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1)$ . Ich punkt wspólny to

$$x^* = x_0 - \frac{1 + \frac{(y_1 - y_0)}{y'(x_1)} y'(x_1)}{y'(x_1) - y'(x_0)} y'(x_0), \quad y^* = y_0 + \frac{1 + \frac{(y_1 - y_0)}{y'(x_1)} y'(x_1)}{y'(x_1) - y'(x_0)}.$$

W granicy  $x_1 \rightarrow x_0$  dostajemy  $x^* = x_0 - \frac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)} y'(x_0)$ ,  $y^* = y_0 + \frac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)}$ .

Odległość tego punktu od  $(x_0, y_0)$  to  $\rho = \frac{(1 + y'(x_0)^2)^{3/2}}{|y''(x_0)|}$ , a krzywizna to z def.  $\frac{1}{\rho}$

Dla krzywej parametrycznej  $(x(t), y(t))$  mamy  $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{y_t}{x_t}}{x_t} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{(x_t)^3}$ ,

r. stycznej  $- y_t(x - x(t)) - x_t(y - y(t)) = 0$

r. normalnej  $- x_t(x - x(t)) + y_t(y - y(t)) = 0$

wsp. srodka krzywizny  $- x^* = x(t) - \frac{x_t^2 + y_t^2}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} y_t$ ,  $y^* = y(t) + \frac{x_t^2 + y_t^2}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} x_t$

krzywizna  $- \frac{1}{\rho} = \frac{|x_t y_{tt} - y_t x_{tt}|}{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}$

Krzywizna nie zależy od układu współrzędnych (translacje, obroty).

# Parametryzacja kanoniczna krzywej (fiz.)

$(x(t), y(t), z(t))$

$$s(t) = \int_{s_0}^t dt' \sqrt{x_{t'}^2 + y_{t'}^2 + z_{t'}^2} \quad - \text{ długość krzywej mierzona od } s_0$$

$$s_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} > 0 \Rightarrow \exists t(s)$$

$(x[t(s)], y[t(s)], z[t(s)])$  – krzywa sparametryzowana kanonicznie

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x_t}{s_t} = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \dots, \quad \frac{dz}{ds} = \dots$$

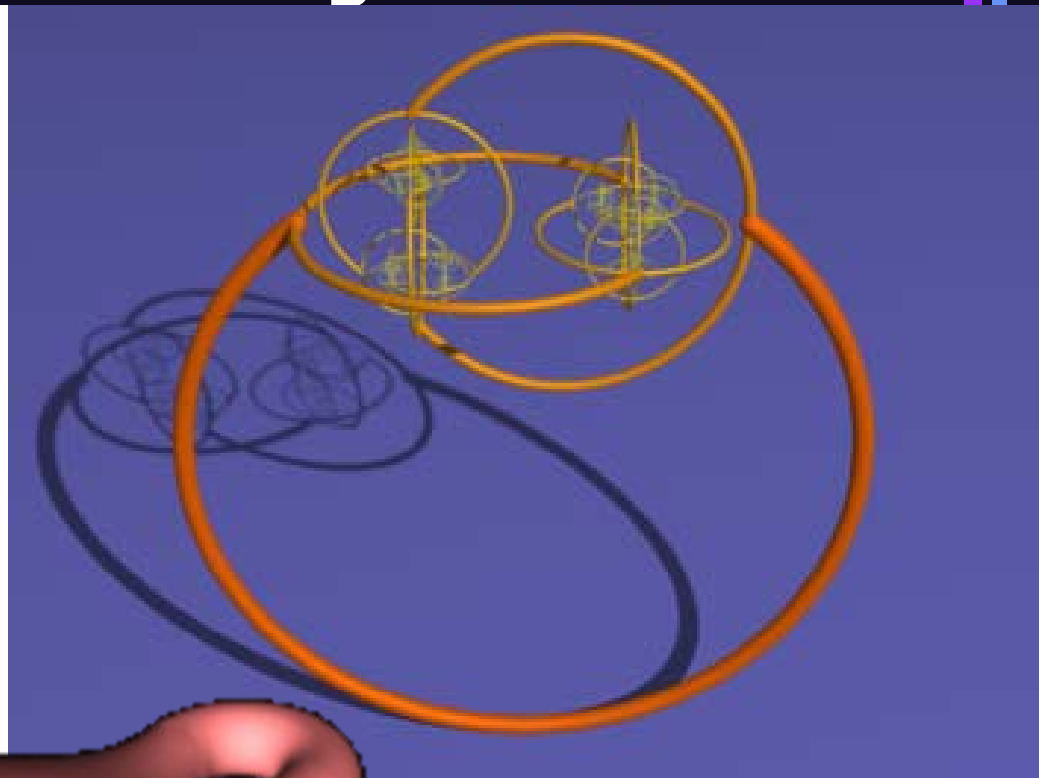
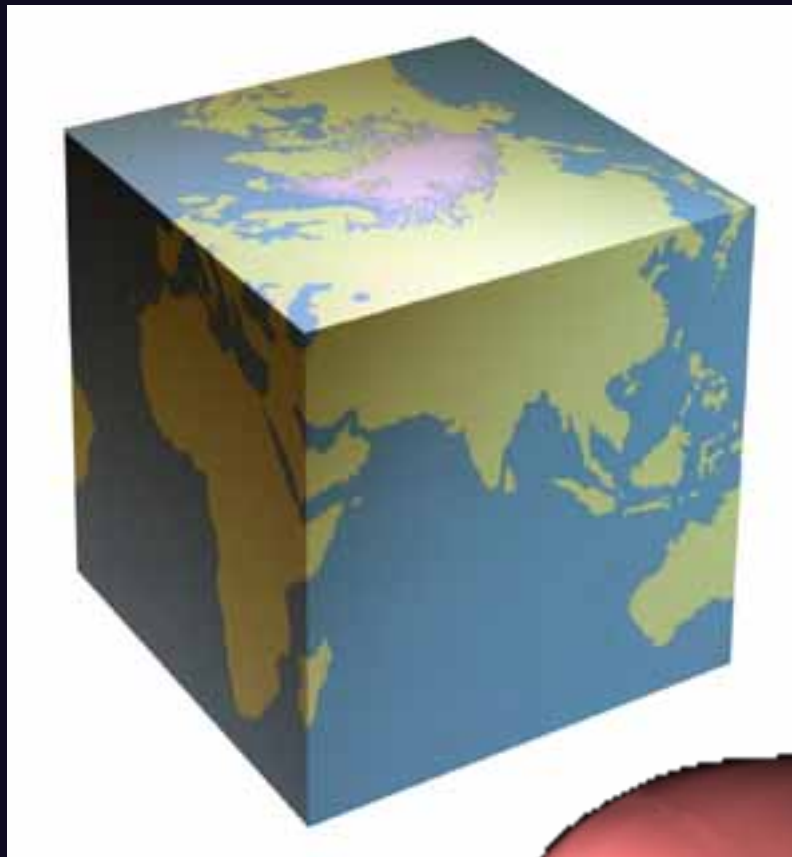
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

Dla  $d = 2$   $y = f(x)$

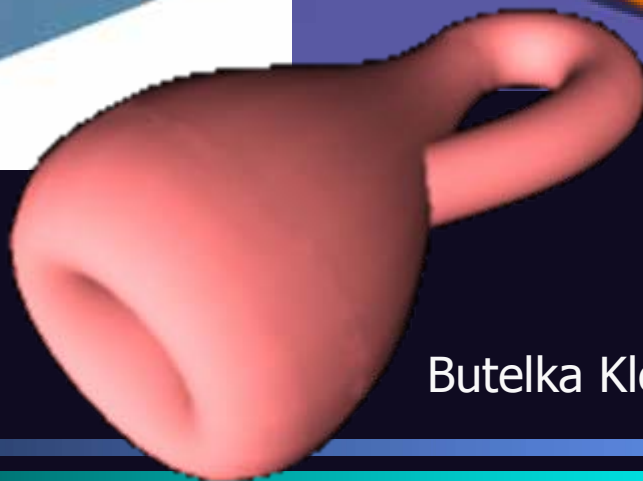
$$\text{kąt stycznej do Ox: } \alpha = \text{arctg } f' \Rightarrow \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{ds}\right| = \frac{|f_{xx}|}{1 + f_x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} = \frac{1}{\rho}$$

Interpretacja: krzywizna jest pochodną tangensa nachylenia krzywej po parametrze kanonicznym

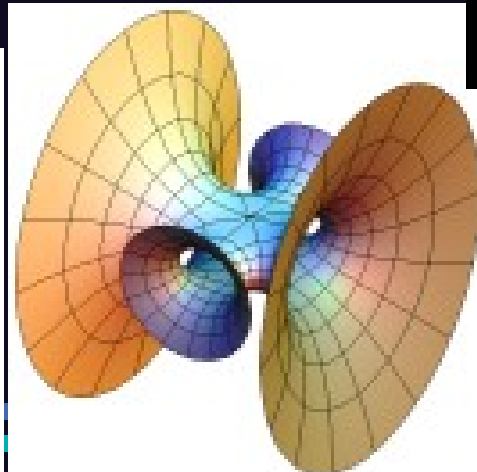
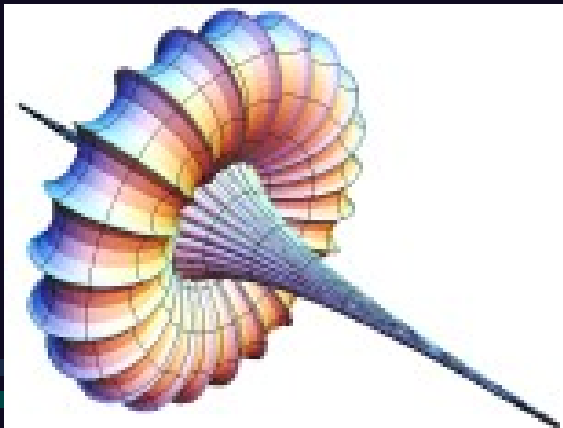
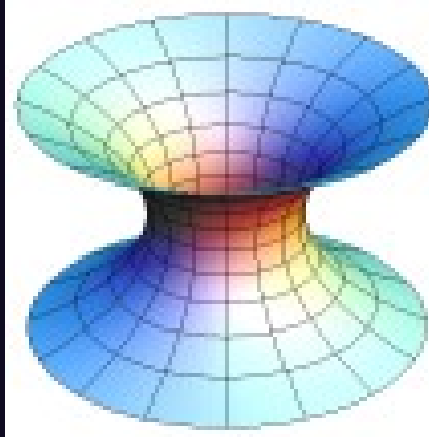
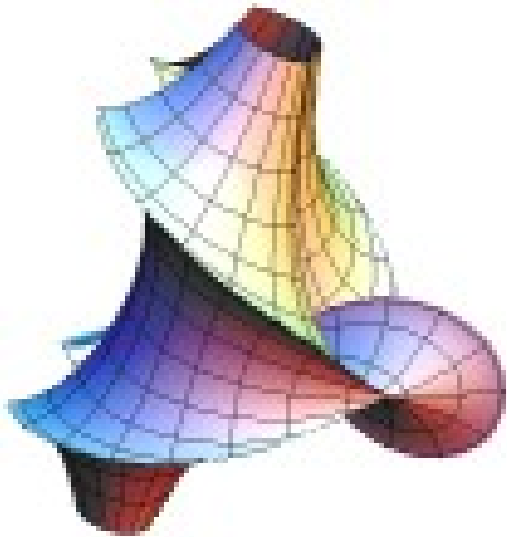
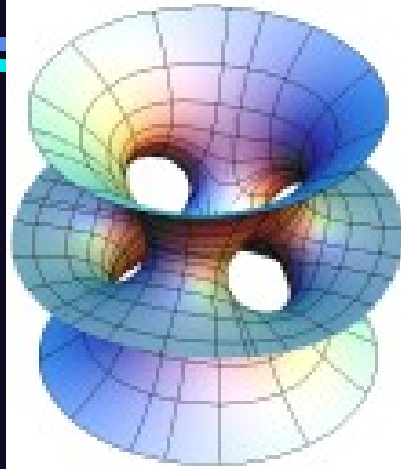
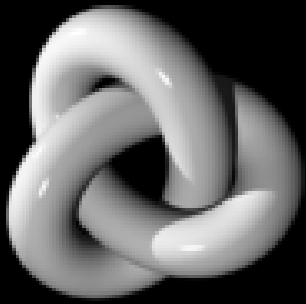
# Powierzchnie kawałkami gładkie



Sfera Alexandra



Butelka Kleina



# Całki wielowymiarowe

Uogólnienie całki Riemanna:

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Dokonyjemy podziału prostokąta

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in P_i\}, M_i = \sup\{f(x) : x \in P_i\}$$

$$s = m_1 |P_1| + \dots + m_k |P_k|, S = M_1 |P_1| + \dots + M_k |P_k|$$

Rozważamy normalny ( $\delta_n \rightarrow 0$ ) ciąg podziałów

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \text{całka dolna}, S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \text{całka górna funkcji } f \text{ na prostokącie } P$$

Jeżeli  $s^* = S^*$  to wielkość tę nazywamy wielokrotną całką Riemanna

$$\text{Notacja: } \iint_P dx dy f(x, y), \iiint_P dx dy dz g(x, y, z)$$

# Całka iterowana

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \left( \int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y) \right), \int_{a_1}^{b_1} dx \left( \int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y) \right) - \text{całki iterowane}$$

Tw. Fubniego: Jeżeli  $f : P \rightarrow R$  jest ciągła, to obie całki iterowane są równe całce Riemanna  $\iint_P dx dy f(x, y)$ .

(analogicznie dla większej liczby wymiarów)

Przykład:  $P = [0, 1] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_P dx dy (x^2 y + 2) &= \int_0^1 dx \left( \int_0^2 dy (x^2 y + 2) \right) = \int_0^1 dx \left( \frac{x^2 y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{y=0}^2 = \int_0^1 dx (2x^2 + 4) = \frac{2}{3} + 4 \\ &= \int_0^2 dy \left( \int_0^1 dx (x^2 y + 2) \right) = \int_0^2 dy \left( \frac{x^3 y}{3} + 2x \right) \Big|_{x=0}^1 = \int_0^2 dx \left( \frac{y}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} + 4 \end{aligned}$$



# Całki po dowolnym obszarze

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \in P \setminus A \end{cases}$$

$$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  – zbiór normalny względem O<sub>x</sub>

Tw. Jeżeli  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to jest całkowalna, oraz

$$\iint_A dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$$

Przykład:

$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$  – trójkąt

$$\iint_A dx dy xy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy = \int_0^1 dx \frac{1}{2} (1-x)^2 x = \frac{1}{24}$$

# Zastosowania całek wielokrotnych

$$V = \iiint_A dx dy dz$$

$$A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$x, y - \text{ustalone} \Rightarrow z \leq 1 - x - y$$

$$x - \text{ustalone, szukamy największego możliwego } y: y \leq 1 - x - z,$$

$$\text{ponieważ najmniejsze } z = 0 \Rightarrow y \leq 1 - x$$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \int_0^1 dx \left[ (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

Jest to tzw. objętość sympleksu. W  $n$  wymiarach  $V = \frac{1}{n!}$

# Środek ciężkości

$$\bar{x} = \frac{1}{|A|} \iint_A x \, dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy - \text{figura 2-wym.}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|V|} \iiint_V x \, dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{|V|} \iiint_V z \, dx dy dz - \text{bryła}$$

Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu

regularnego zbioru  $A$  wokół  $Ox$ :  $|V| = 2\pi \iint_A y \, dx dy$

Reguły Guldina:  $|V| = 2\pi\eta |A|$ ,  $\eta = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy$ ,

Dla torusa  $|V| = 2\pi a \pi r^2$

Podobnie dla powierzchni powstałej w wyniku obrotu łuku mamy

$|S| = 2\pi\xi |L|$ ,  $\xi = \frac{1}{|L|} \int_{\alpha}^{\beta} y dt$  - odległość środka ciężkości łuku od osi obrotu

Dla torusa  $|S| = 2\pi a 2\pi r$



# Pole powierzchni

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Wzór wynika z konstrukcji przybliżającej powierzchnię równoległobokami

Przykład:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

$$A = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

# Zamiana zmiennych - dyfeomorfizm

$f \in C^1 : R^n \supset U \rightarrow V \subset R^n$ , homeomorfizm rzędu  $n$

(bijekcja, pochodna Frecheta odwracalna,  $f$  i  $f^{-1}$  ciągle)

Pamiętamy, że dla jednej zmiennej  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y) = \int_a^b dx f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ ,  $y = \varphi(x)$

Tw.  $\varphi : X \subset R^n \rightarrow Y \subset R^n$  klasy  $C^1$

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \quad \text{jakobian przekształcenia } \varphi$$

Wtedy

$$\int_Y \dots \int f(y) dy_1 \dots dy_n = \int_X \dots \int f[\varphi(x)] |J(x)| dx_1 \dots dx_n, \quad y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

# Podstawowe układy współrzędnych

Współrzędne biegunowe (osiowe)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix}, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

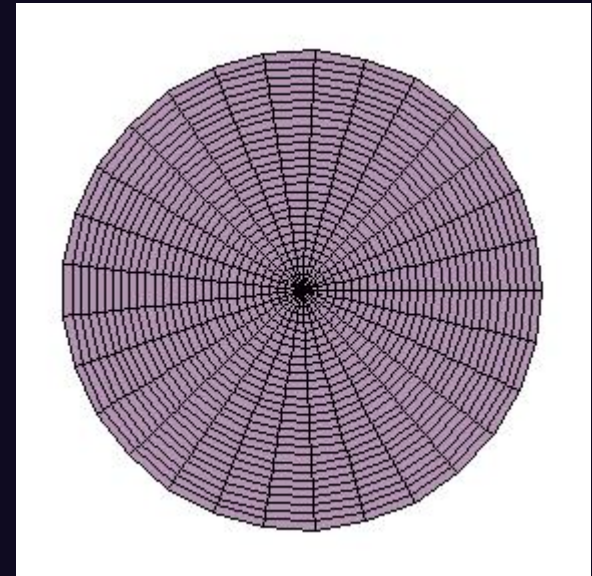
$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\Phi'(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

$$\int dx dy f(x, y) = \int r dr d\phi f(x(r, \phi), y(r, \phi))$$

Homeomorfizm regularny dla  $r \neq 0$ , rząd  $\Phi' = 2$ . Dla  $r = 0$  jest osobliwość, bo w tym punkcie nie można określić kąta



Przykłady:

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{r^2 \leq R^2} \frac{r dr d\phi}{r} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi = R 2\pi$$

$$I_R = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{r^2 \leq R^2} e^{-r^2} r dr d\phi = 2\pi \int_0^R r dr e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^R = \pi - \pi e^{-R^2}$$

$$I_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi$$

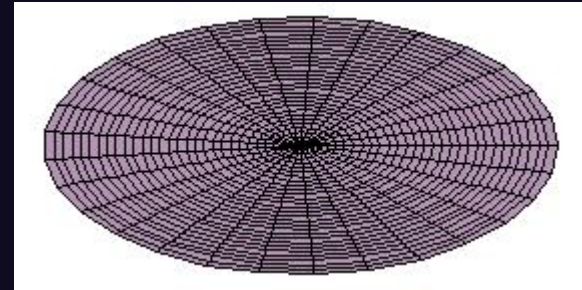
$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

## Współrzędne eliptyczne

$$x = ar \cos \phi$$

$$y = br \sin \phi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad J = abr$$



## Współrzędne walcowe (cylindryczne)

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

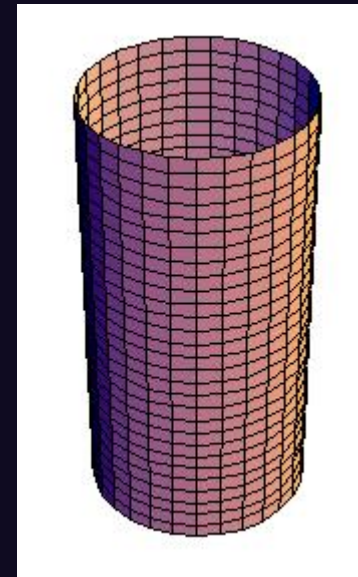
## Liniowa zmiana skali

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

$$J = abc$$





## Współrzędna sferyczne (kuliste)

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$\theta \in [0, \pi]$  - kąt osiowy (szerokość geogr.),

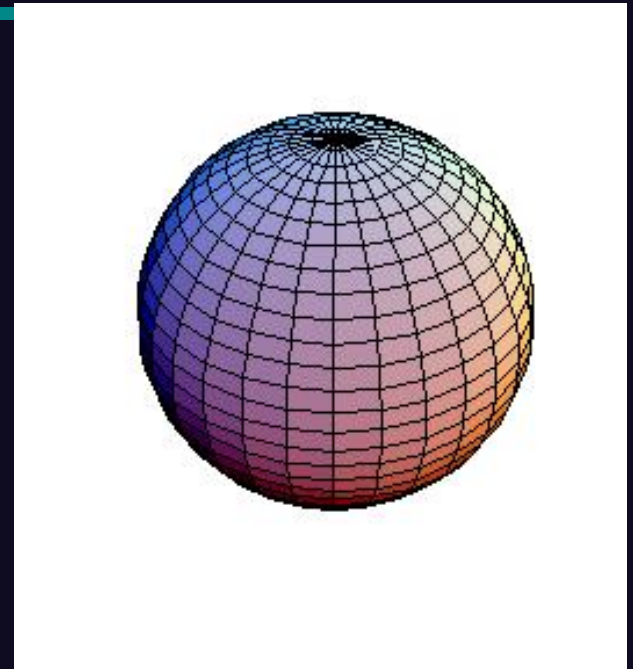
$\phi \in [0, 2\pi)$  - kąt biegunowy (azymutalny, długość geogr.)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$r = 0 \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 1$  - w środku kuli nie można określić kątów

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow \text{rz } \Phi' = 2$  - na biegunach nie można określić kąta  $\phi$



Przykład:

## Objętość kuli

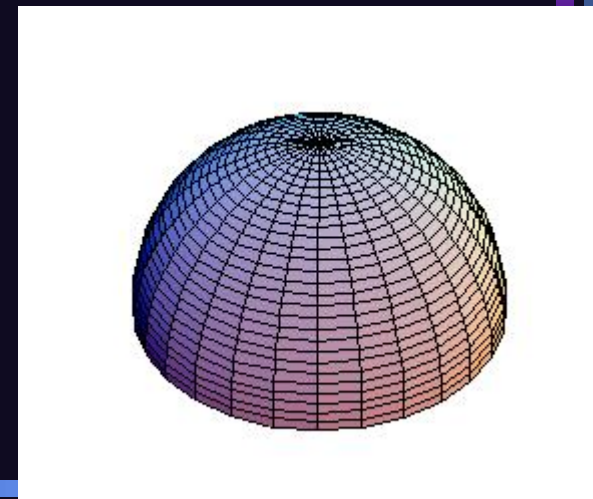
$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} dx dy dz = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \int_0^R dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$(d \cos \theta = -\sin \theta d\theta)$$

Srodek ciężkości półkuli:

$$\eta = \frac{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} z dx dy dz}{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} dx dy dz} = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta r \cos \theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R dr \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^3 \cos \theta = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{3}{8} R$$



# Płaszczyzna styczna

Płaszczyzna styczna do powierzchni gładkiej o równaniu  $f(x,y,z)=0$  dana jest równaniem

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (z - z_0) = 0$$

Wektor  $\left( \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \right)$  jest prostopadły do

powierzchni w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ . Prosta prostopadła do powierzchni w tym punkcie ma więc równanie parametryczne

$$\left( \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} t + x_0, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} t + y_0, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} t + z_0 \right)$$

Dla sfery  $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ , więc prosta prostopadła ma równanie  $(2x_0t + x_0, 2y_0t + y_0, 2z_0t + z_0)$

Plaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie  $x$  jest przestrzenią liniową.

Niech  $\Phi : V \subset R^k \rightarrow R^n$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_k$  tworzą bazę w  $R^k$ , oraz  $y = \Phi(x)$ .

Wtedy  $u_i = \Phi'(x)e_i$  tworzą bazę w przestrzeni stycznej.

Przykład:

Dla powierzchni danej jako  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  mamy  $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$ ,

$$u = \Phi' e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad v = \Phi' e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

# Orientacja

Rozważmy bazy w przestrzeni  $R^k$  :  $(v_1, \dots, v_k)$  oraz  $(w_1, \dots, w_k)$ . Bazy te powiazane są przekształceniem liniowym  $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ , przy czym musi zachodzić warunek  $|a| \neq 0$  aby zachować liniową niezależność. Jeżeli  $|a| > 0$ , to mówimy, że bazy są zgodnie zorientowane, a gdy  $|a| < 0$ , to mówimy, że są zorientowane przeciwnie.

Dla  $k = 1$  mamy jedną bazę jednoelementową  $v_1 = 1$  i drugą  $w_1 = -1$ .

Dla  $k = 2$  przykładowe bazy  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  i baza  $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  są

powiązane przekształceniem o macierzy  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , zatem  $|a| = 1 > 0$  i bazy są

zorientowane zgodnie, natomiast dla bazy  $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |a| = -1 < 0$ ,

więc ta baza jest zorientowana przeciwnie do poprzednich. Orientację bazy kanonicznej nazywamy prawoskretną (zorientowaną dodatnio).

# Wektor normalny

Niech  $M$  będzie powierzchnią dwuwymiarową w  $R^3$ ,  $T_x$  płaszczyzną styczną do  $M$  w punkcie  $\vec{x}$ , a wektory  $(\vec{u}, \vec{v})$  bazą na płaszczyźnie stycznej. Wektor normalny definiujemy jako  $\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ . Wektor ten wskazuje zewnętrzną (wewnętrzną) stronę powierzchni orientowalnej jeśli baza jest prawoskrętna (lewoskrętna).

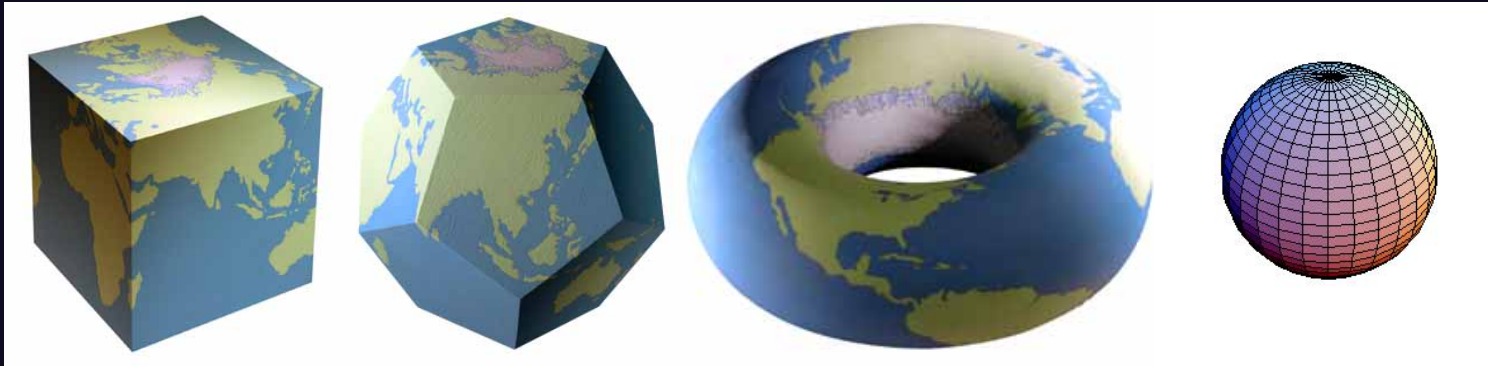
c. d. przykładu:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

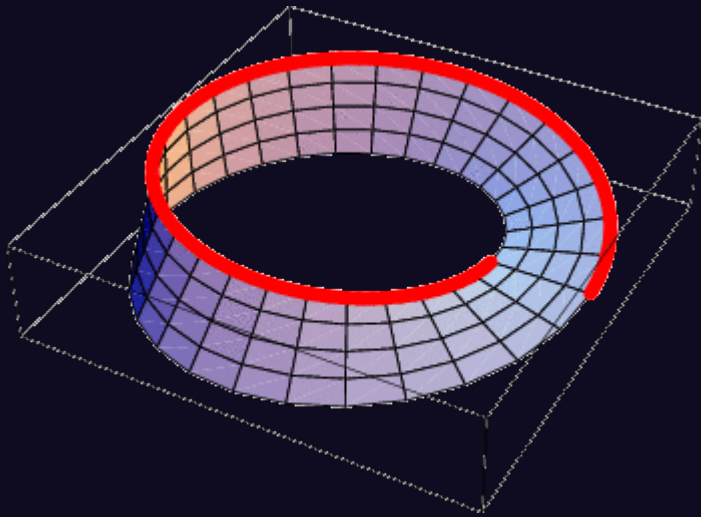
$$\text{Dla górnej półsfery } f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z, \quad f_x = -\frac{x}{z}, \quad f_y = -\frac{y}{z}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dla dolnej półsfery  $f = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z$  wynik taki sam (jeź!)

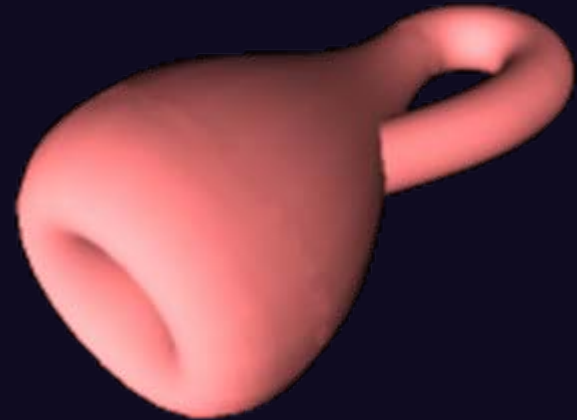
Powierzchnie orientowalne (mają stronę wewnętrzną i zewnętrzną)



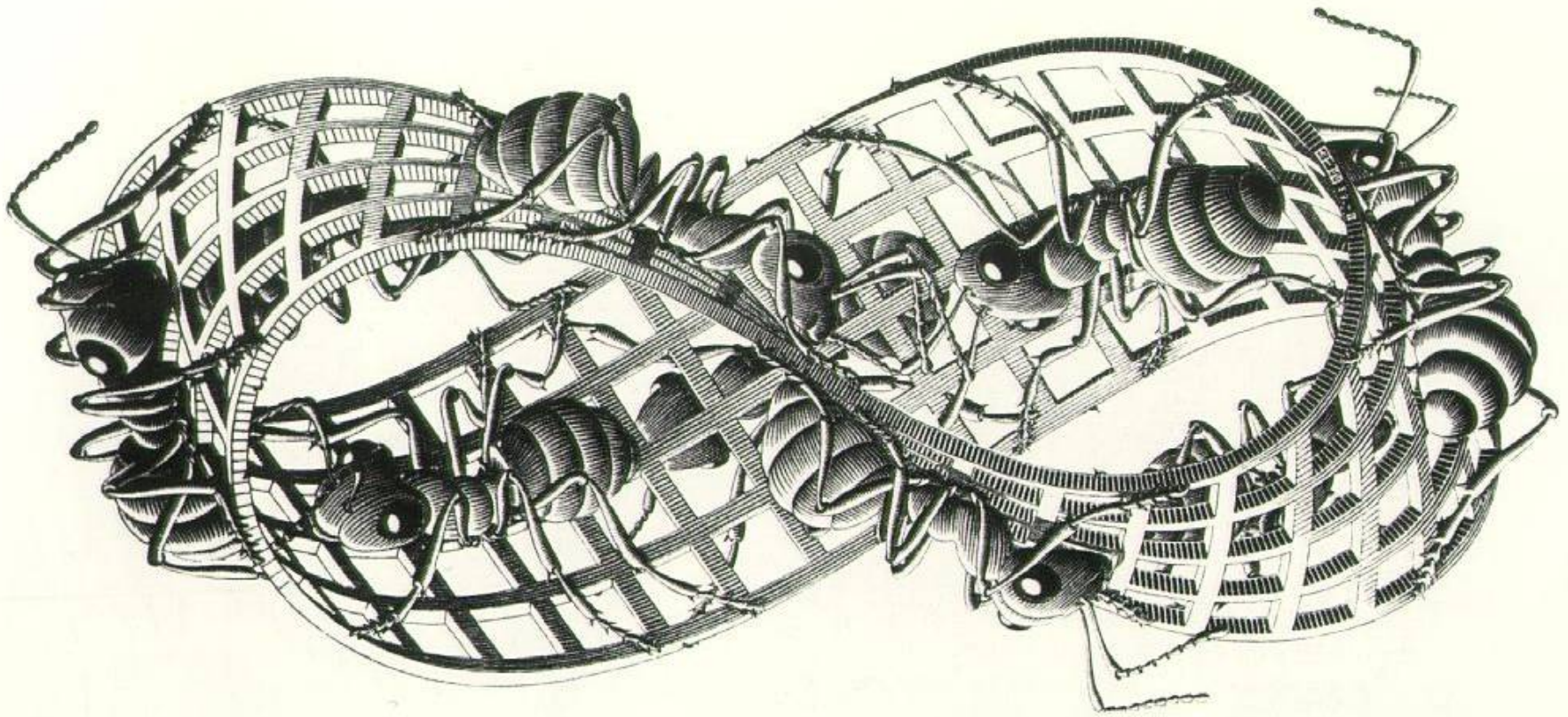
i nieorientowalne (nie można wyznaczyć strony)



Wstęga Möbiusa



Butelka Kleina

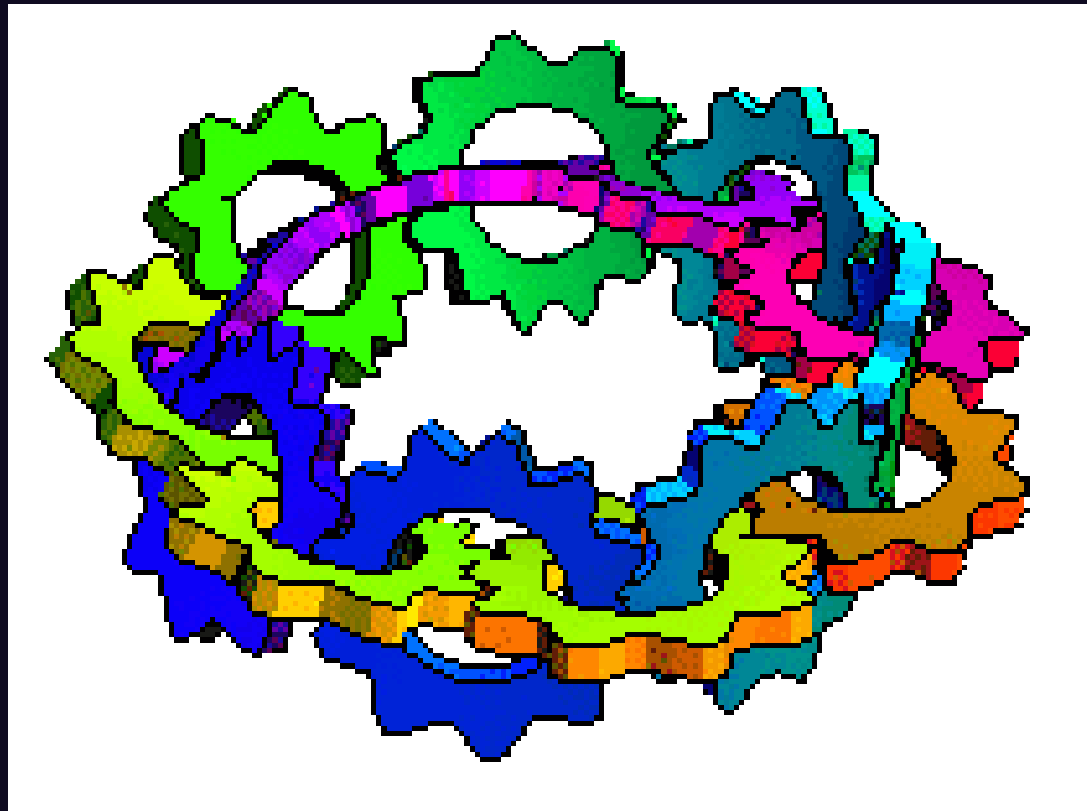


(M.C Escher)

$$x = (R + s \cos \frac{t}{2}) \cos t, \quad y = (R + s \cos \frac{t}{2}) \sin t, \quad z = s \sin \frac{t}{2}$$

$$t \in [0, 2\pi), \quad s \in [-w, w]$$





# Całka krzywoliniowa zorientowana

$F = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ ,  $C$  - krzywa gładka

$$I_C = \int_C F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_k dx_k = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dx}$$

$$I_{C_1+C_2} = I_{C_1} + I_{C_2}, \quad I_{-C} = -I_C$$

Tw. Całka  $I_C$  nie zależy od parametryzacji krzywej

$$\begin{aligned} D: \vec{y}(t) = \vec{x}(\varphi(t)) &\Rightarrow \int_C \vec{F}(\vec{y}) \cdot \vec{dy} = \int_a^b \vec{F}(\vec{y}(t)) \cdot \frac{\vec{dy}}{dt} dt = \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(\varphi(t))) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_a^\beta \vec{F}(\vec{x}(\varphi)) \cdot \frac{\vec{dx}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{dx} \end{aligned}$$

(w konkretnej parametryzacji staje się zwykłą całką Riemanna)

Przykład:  $C : x(\phi) = \cos \phi, y(\phi) = \sin \phi, \phi \in [0, \pi]$  (półokrąg o promieniu jednostkowym)

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + (x - y) dy &= \int_{\phi=0}^{\pi} [\cos^2 \phi d(\cos \phi) + \cos^2 \phi d\phi - \sin \phi d(\sin \phi)] = \\ &= \frac{\cos^3 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin^2 \phi}{3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

# Całka krzywoliniowa niezorientowana

$$J_C = \int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2} dt$$

$$J_C = J_{-C}$$

Tw. Związek z całką zorientowaną:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_C F_s ds, \quad F_s = \sqrt{F_1^2 + \dots + F_k^2} \cos \alpha, \quad \alpha - \text{kąt między } d\vec{x} \text{ i } \vec{F}$$

$$\text{Zastosowanie (fizyka): praca } W = \int_C F_s ds = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$C : x = a \cos \phi, y = b \sin \phi, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  – ćwiartka elipsy

$$F = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \end{pmatrix} - \text{sprężyna zamocowana w środku}$$

$$dx = -a \sin \phi d\phi, \quad dy = b \cos \phi d\phi, \quad F_x dx + F_y dy = -k(a^2 - b^2) \sin \phi \cos \phi d\phi$$

$$W = -k(a^2 - b^2) \int_0^{\pi/2} \cos \phi d(\cos \phi) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

# Tw. Greena

Krzywą zamkniętą nazywamy konturem. Niech kontur  $C$  będzie brzegiem zbioru  $D$ . Kontur jest zorientowany dodatnio jeśli okala zbiór  $D$  w taki sposób, że  $D$  znajduje się „po lewej stronie”.

Zbiór normalny  $D$  względem osi  $Ox$  to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\}, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow R$$

Zbiór normalny  $D$  względem osi  $Oy$  to zbiór dający się zapisać jako

$$D = \{(x, y) : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), y \in [c, d]\}, g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow R$$

Tw. Greena

$D$  - zbiór normalny ze względu na  $Ox$  i  $Oy$ ,  $C = \partial D$  – jego brzeg zorientowany dodatnio

$$\text{Wtedy } \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

$$D: \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] = \int_{C_2} P dx - \int_{C_1} P dx =$$

$$= - \int_{-C_2} P dx - \int_{C_1} P dx = - \oint_{\partial D} P dx$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d dt [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] = \int_{K_2} Q dy - \int_{-K_1} Q dy = \oint_{\partial D} Q dy$$

# Pole potencjalne (fiz.)

$V(x, y)$  – potencjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\oint_C F_x dx + F_y dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow \int_{K_1} F_x dx + F_y dy = \int_{K_2} F_x dx + F_y dy \quad (\text{rys.})$$

(Praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi - można wprowadzić energię potencjalną. W poprzednim przykładzie z pracą na ćwiartce elipsy wynik jest wtedy natychmiastowy:  $W = V_2 - V_1$ )

(w powyższym wzorze zauważamy  $\text{rot grad } V = 0$ )

# Całka powierzchniowa nieorientowana

(współrzędne kartezjańskie)

Plat regularny  $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$

Element powierzchni :  $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Pole powierzchni plata regularnego:  $|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$

Całka powierzchniowa nieorientowana:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

(współrzędne krzywoliniowe)

$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} du dv$$

$$J_1 = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_2 = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|, J_3 = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Przykład (współrzędne kuliste)

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \theta \cos \phi$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = r^2 \sin \theta$$

# Całka powierzchniowa zorientowana

$F : S \rightarrow R^3$  - pole wektorowe

$S$  – płat regularny

$n$  – zewnętrzny wektor normalny

Całka powierzchniowa zorientowana pola  $F$  lub strumień pola  $F$ :

$$I = \iint_S F(x, y, z) \cdot n(x, y, z) dS - \text{strumień}$$

Niech  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Wtedy oznaczamy  $I = \iint_S F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy$

Jeżeli  $S$  dana jest równaniem  $z = f(x, y)$ , to  $n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$

$$I = \iint_S \frac{-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dS = \iint_D (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) dxdy$$



# Tw. Gaussa (Ostrogradskiego-Gaussa)

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Słownie: całka po objętości  $V$  z dywergencji z pola  $F$  równa się strumieniowi wypływającemu przez powierzchnie  $S$  ograniczającą  $V$

$$\iiint_V \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$$

D: Niech  $V$  będzie obszarem normalnym względem płaszczyzny  $Oxy$ , ograniczonym funkcjami  $g(x, y)$  i  $d(x, y)$ . Wtedy

$$I_3 = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{d(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, d(x, y))) dx dy$$

Oznaczmy  $S = S_1 + S_2$ , gdzie  $S_1$  dana jest przez  $z = g(x, y)$  a  $S_2$  przez  $z = d(x, y)$ .

$$I_3' = \iint_S F_3 dx dy = \iint_{S_1} F_3 dx dy + \iint_{S_2} F_3 dx dy = \iint_D F_3(x, y, g(x, y)) dx dy - \iint_D F_3(x, y, d(x, y)) dx dy$$

Znak wynika z przeciwnej orientacji  $S_2$ . Zatem  $I_3 = I_3'$ . Podobnie pokazujemy, że  $I_1 = I_1'$  oraz  $I_2 = I_2'$ . Jeżeli  $V$  nie jest normalny, to dzielimy go na podzbiory normalne.

# Tw. Stokesa

Tw. Niech  $K$  będzie regularnym konturem będącym brzegiem płata regularnego  $S$ . Orientacje  $K$  i  $S$  są zgodne. Niech  $F_i$  mają ciągle pochodne. Wtedy

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Cyrkulacja pola  $F$  po krzywej zamkniętej  $K$  jest równa calce zorientowanej z rotacji pola  $F$  po płacie  $S$ .

Inna notacja:

$$\oint_K F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_S \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

# Formy różniczkowe (fiz.)

Różniczka zewnętrzna stopnia  $p$  :

$$a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad 1 \leq p \leq n, \quad \text{wszystkie } i_k \text{ różne}$$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \Rightarrow \quad dx_i \wedge dx_i = 0$$

Suma różniczek tego samego stopnia: forma różniczkowa zewnętrzna

$$\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Przykłady:  $Pdx + Qdy$ ,  $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ ,  $A dx \wedge dy \wedge dz$

Dodawanie analogiczne do dodawania wielomianów.

$$\text{Mnożenie: } \alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = (-1)^{p+q} \beta \wedge \alpha$$

$$\text{Różniczkowanie: } d\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} \left( \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$d(Pdx + Qdy) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_l \partial x_k} \Rightarrow d(da) = 0$$

$\alpha$  jest formą zupełną, jeżeli  $\exists \gamma : \alpha = d\gamma$ ,  $\alpha$  jest formą zamkniętą, jeżeli  $d\alpha = 0$

Zamiana zmiennych  $x \rightarrow t$ :

$$a = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$$

Całkowanie po hiperpowierzchni  $V$ :

$$\int_V a = \int_D A(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p = \int_D A(t) dt_1 \dots dt_p \quad (\text{zwykła całka Riemanna})$$

Ogólne Tw. Stokesa:  $V$  – hiperpowierzchnia zorientowana,  $\partial V$  – jej brzeg

Jeżeli współczynniki formy  $a = \sum_{i_1 \dots i_{p-1}} a_{i_1 \dots i_{p-1}}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$  są klasy  $C^1$  na  $V + \partial V$ ,

$$\text{to } \int_{\partial V} a = \int_V da$$

Przykłady: Tw. Greena, Gaussa, Stokesa, także  $\int_{[a,b]} f(x) dx = F(b) - F(a)$ , bo

$$dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} dx = f(x) dx, \quad \partial V = \{a, b\}$$