

[wersja z 5 X 2010]

Analiza Matematyczna

część 4

Konspekt wykładu dla studentów fizyki

Akademia Świętokrzyska 2010/2011

Wojciech Broniowski

Analiza funkcji wielu zmiennych

Przestrzeń wektorowa unormowana

$\|\cdot\|: X \rightarrow R$ - norma

$$1) \vec{x} \neq 0 \Rightarrow \|\vec{x}\| > 0, \quad \|\vec{0}\| = 0$$

$$2) \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$3) \|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|$$

Tw. Przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią

metryczną z metryką $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

D: $\rho: X \times X \rightarrow R_+ \cup \{0\}$

(norma indukuje metrykę, ale metryka nie indukuje normy)

$$1) \rho(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{0}\| = 0, \quad 2) \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x}),$$

$$3) \rho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$$

Przykład: $X = R^n$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (długość wektora)

Pochodna cząstkowa

$$f : R^n \rightarrow R, \quad y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pochodna cząstkowa po x_k w punkcie \vec{x} :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\delta}$$

Inna notacja: $f_{x_k}(\vec{x}), f_k(\vec{x})$

Pochodną funkcją cząstkową po x_k nazywamy funkcję

przyporządkowującą każdemu \vec{x} wartość $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})$

Pochodną cząstkową po x_k wyliczamy tak samo, jak zwykłą pochodną, traktując pozostałe zmienne jako stałe

$$f(x, y, z) = z \sin(xy)$$

$$f_x(x, y, z) = zy \cos(xy), \quad f_y(x, y, z) = zx \cos(xy), \quad f_z(x, y, z) = \sin(xy)$$

Gradient

$$f : R^n \rightarrow R$$

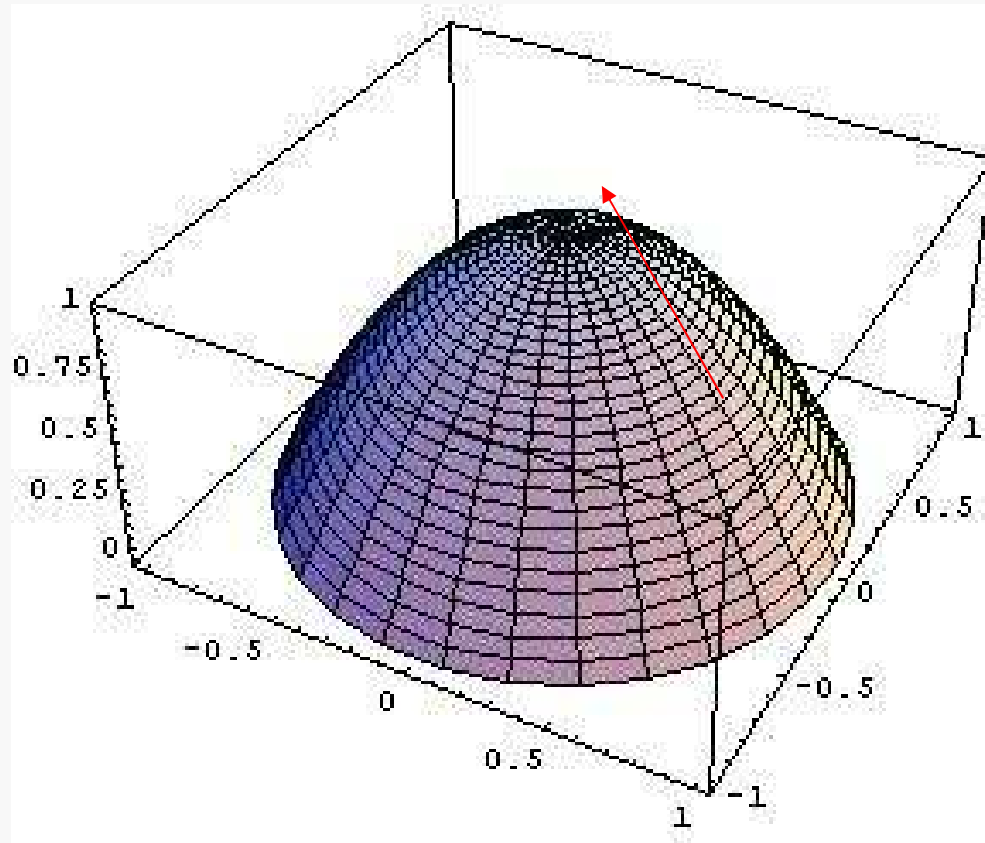
Gradientem funkcji f nazywamy wektor pochodnych cząstkowych, tj.

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)$$

$$\text{Operator Nabla } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \vec{\nabla}f(\vec{x}) = (2x, 2y)$$

Interpretacja geometryczna gradientu



Kierunek najszybszego
wzrostu

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (-2x, -2y)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

Pochodna funkcji złożonej

$f : R^k \rightarrow R$, $g_i : R^m \rightarrow R$, $i = 1, \dots, k$, posiadające pochodne cząstkowe w punkcie \vec{x} i $y_k = g_k(x)$.

Oznaczamy $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$

Tw. Pochodna cząstkowa funkcji $f \circ g$ wynosi

$$\frac{\partial (f \circ g)(\vec{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_i} \frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, k$$

Przykład:

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2 + 2y_1, \quad g_1(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma, \quad g_2(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2$$

$$\frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y_2} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = (y_2 + 2)1 + y_1 2\alpha = \alpha^2 + 2\alpha(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \beta} = \dots, \quad \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial \gamma} = \dots$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t), \beta(s,t), \gamma(s,t))}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h(\alpha(s,t), \beta(s,t), \gamma(s,t))}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x, y), y)}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \kappa(f(x, y), y)}{\partial y} = \frac{\partial \kappa}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ różniczkowalna

Pochodna cząstkowa drugiego rzędu: $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f_{x_j x_i} = f_{ji}$

Tw. W U istnieją pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, ciągłe w \vec{x} . Wtedy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

D: $\Phi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h) + f(x, y)$

$\varphi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$, $\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y)$

Z Tw. Lagrange'a o wartości średniej $\exists \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$:

$\Phi(x, y) = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y) = k\varphi_y(x, y + \theta_1 k)$

$\varphi_y(x, y + \theta_1 k) = f(x+h, y + \theta_1 k) - f(x, y + \theta_1 k) = hf_{xy}(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k)$

$\Phi(x, y) = hkf_{xy}(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k)$

Podobnie $\Phi(x, y) = \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \dots$

$\Phi(x, y) = hkf_{yx}(x + \eta_2 h, y + \eta_1 k)$

$\Rightarrow f_{xy}(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k) = f_{yx}(x + \eta_2 h, y + \eta_1 k)$. Z ciągłości $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ \square

Macierz drugich pochodnych (hessian):

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Pochodna cząstkowa rzędu trzeciego: $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{kji}$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + yx$$

$$f_x = 2x + y, f_y = x, f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 0$$

Wzór Taylora dla wielu zmiennych

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad P_0 = (x_0, y_0), \quad P(x+h, y_0+k), \quad \overline{P_0P} \subset U$$

$$d^j f(x, y)(h, k) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f(x, y)}{\partial x^{j-i} \partial y^i} h^{j-i} k^i \quad \text{– różniczka rzędu } j \text{ (dwa wymiary)}$$

Tw. f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu n w $U \Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$f(P) = f(P_0) + \frac{d^1 f(P_0)(h, k)}{1!} + \dots + \frac{d^{n-1} f(P_0)(h, k)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)(h, k)}{n!}$$

Dla d wymiarów i $n = 2$ członów, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, mamy

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f(\vec{x} + \theta \vec{h})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

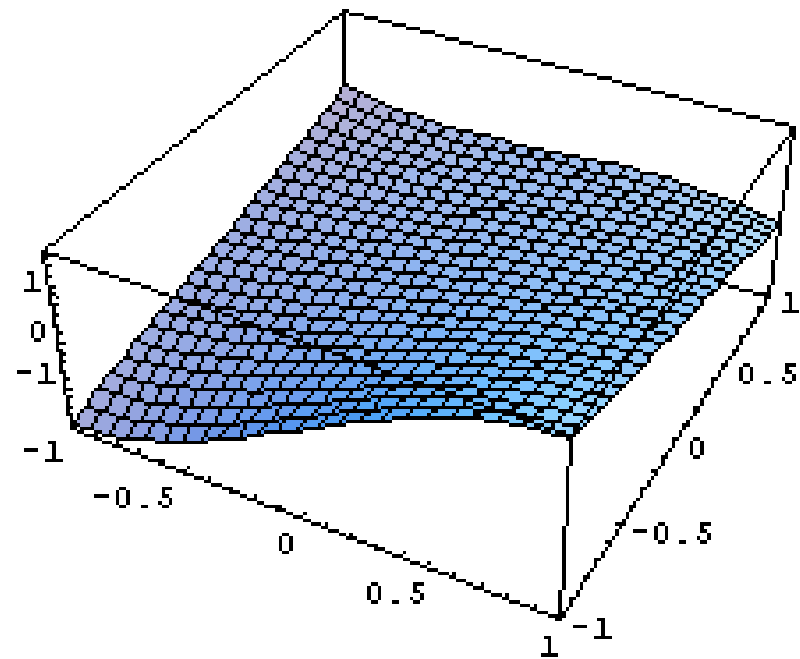
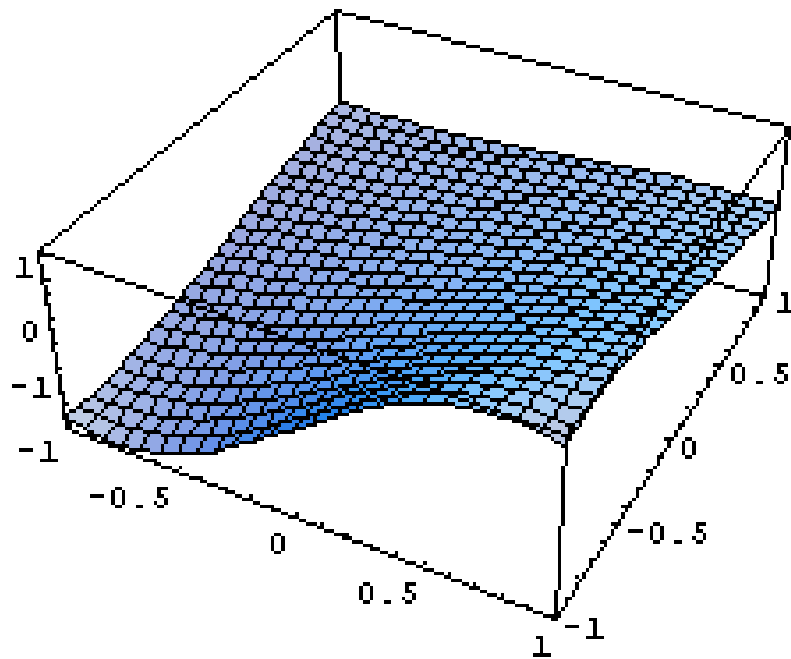
$f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – d -wymiarów

$$d^j f(\vec{x})(\vec{h}) = \sum_{i_1, \dots, i_d=0}^j \frac{j!}{i_1! \dots i_d!} \frac{\partial^j f(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_d^{i_d}} h_1^{i_1} \dots h_d^{i_d}, \quad i_1 + \dots + i_d = j$$

(wzór Taylora taki sam, jak wyżej)

Przykład:

$$f(x) = \sin(x) \cos(xy) e^{-y} \approx x - xy - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6} - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{xy^4}{24} - \frac{7x^3 y^2}{12}$$



Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Tw. (warunek konieczny ekstremum lokalnego)

Jeżeli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie \vec{x}_0 i ma w tym

pochodne cząstkowe, to $\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0$.

Dowód: Ustalmy i , następnie rozważmy $g(x) = f(\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots)$.

Funkcja $g(x)$ ma ekstremum dla $x = x_{0,i}$, a zatem z tw. o warunku

koniecznym ekstremum dla funkcji jednej zmiennej mamy $\frac{dg(x)}{dx} = 0$,

co oznacza $\frac{\partial f(\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots)}{\partial x} = 0$. \square

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Forma kwadratowa to wyrażenie postaci

$$g(\vec{h}) = \sum_{i,j=1}^n h_i a_{ij} h_j \quad (\text{np. dla } n = 3: x^2 + y^2 - z^2 - 10zx + 2xy)$$

Forma kwadratowa jest dodatnio określona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) > 0$$

a ujemnie określona, jeżeli

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} : g(\vec{h}) < 0.$$

Jeżeli nie zachodzi żaden z tych przypadków, to forma jest nieokreślona.

Tw. Rozważmy formę $d^2 f(\vec{x})(\vec{h}) = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ i niech $f(x)$ ma ciągle pierwsze

i drugie pochodne w okolicy x_0 , oraz $\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = 0$. Wtedy jeżeli

a) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest dodatnio określona to f ma w x_0 minimum lokalne

b) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest ujemnie określona to f ma w x_0 maksimum lokalne

c) $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$ jest nieokreślona to f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego

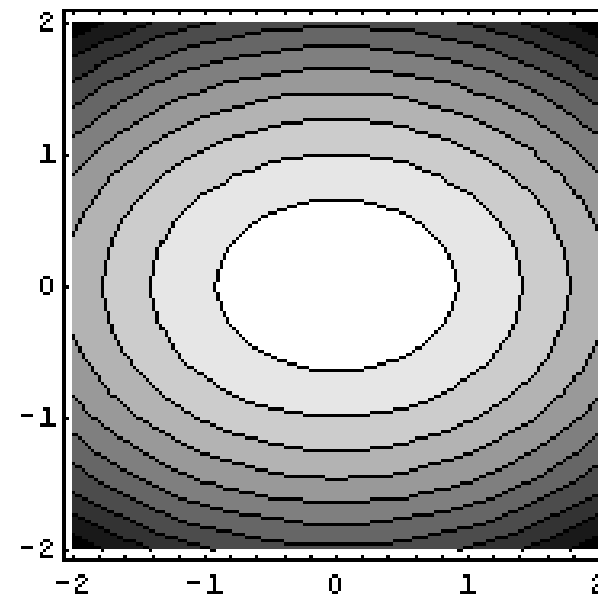
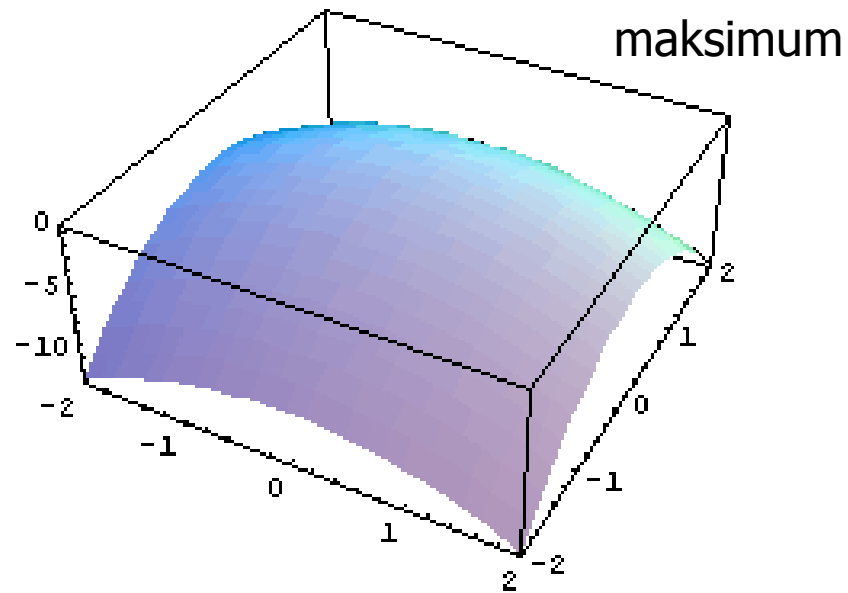
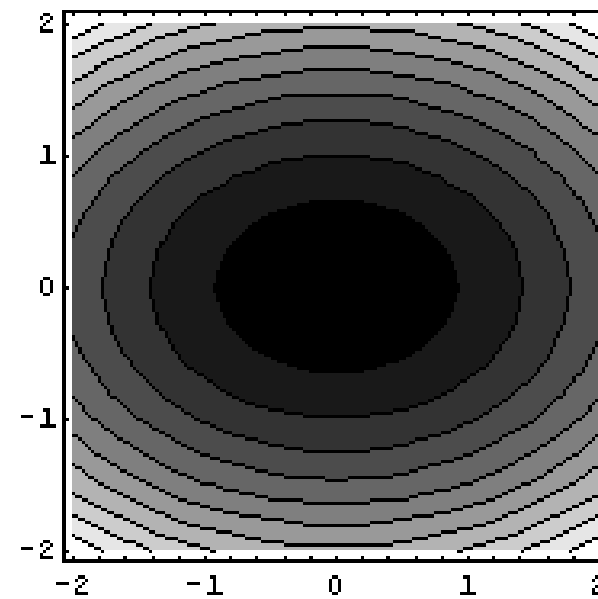
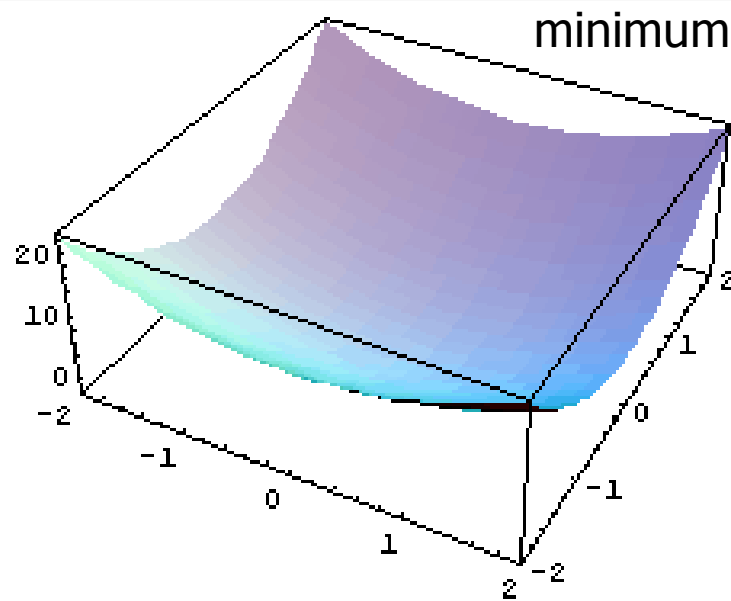
Minorem rzędu k macierzy a rzędu m nazywamy wyznacznik utworzony z pierwszych k rzędów i pierwszych k kolumn tej macierzy:

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

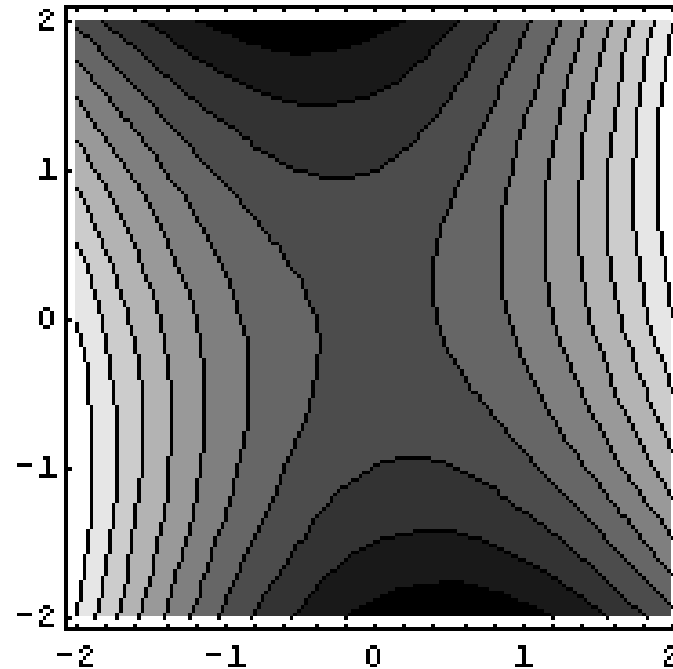
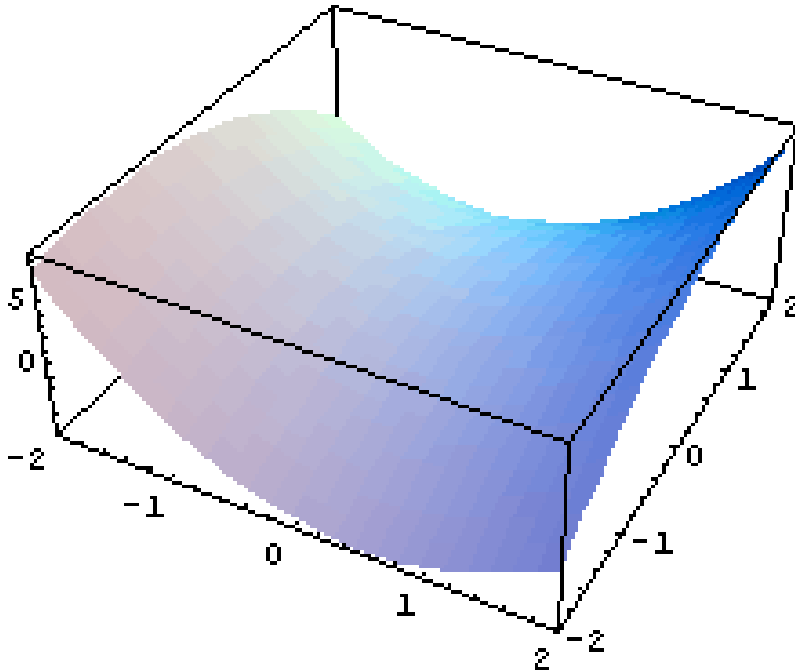
Tw. Forma $g(h) = h_i a_{ij} h_j$ jest dodatnio określona, jeżeli wszystkie jej minory są dodatnie, $A_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, a ujemnie określona, jeżeli $(-1)^k A_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. Jeżeli nie zachodzi żadna z tych dwóch sytuacji, to forma jest nieokreślona.

$$\text{Przypadek } m = 2: W = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

- 1) $W > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ - minimum
- 2) $W > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ - maksimum
- 3) $W < 0$ - punkt siodłowy
- 4) $W = 0$ - brak rozstrzygnięcia



Siodło: $f(x)=2x^2-y^2+xy$



Poszukiwanie ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

- 1) znalezienie ekstremów lokalnych we wnętrzu
- 2) inspekcja brzegu i "rogów"

Funkcje uwikłane

$F(x, y)$ - ciągła, $F(x, y) = 0 \rightarrow y = y(x)$ - funkcja uwikłana

Tw: $F(x_0, y_0) = 0$, F_x, F_y - ciągłe w otoczeniu (x_0, y_0) , $F_y(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists$ jedyne $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, y) = 0$

$$2) y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ - równanie okręgu i punkt doń należący

$F_x = 2x$, $F_y = 2y \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y}$, $y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1$ - mamy "bez wysilku"

$F(x, y) = 2^y x - x^2 y^2 + (1 - x^2) \sin y$, $x_0 = y_0 = 0$ - nie da się odwikłać!

$$F_y(0, 0) = 1 \neq 0$$

$$y'(x) = -\frac{2^y - 2xy^2 - 2x \sin y}{2^y x \ln 2 - 2x^2 y + (1 - x^2) \cos y}, y'(0) = -1$$

Wyprowadzenie 2): $F(x, y(x)) = 0$,

Z tw. o pochodnej funkcji złożonej:

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x(x, y) + y'(x)F_y(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ponadto } \frac{d^2}{dx^2} F(x, y(x)) &= \frac{d}{dx} \left(F_x(x, y) + y'(x)F_y(x, y) \right) = \\ &= F_{xx} + 2y'(x)F_{xy} + y''(x)F_y + (y'(x))^2 F_{yy} = 0 \end{aligned}$$

$$F_{xx} - 2 \frac{F_x}{F_y} F_{xy} + y''(x)F_y + \left(\frac{F_x}{F_y} \right)^2 F_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow y''(x) = - \frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}$$

$$\text{Ekstremum } y(x): y'(x) = 0 \Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow y''(x) = - \frac{F_{xx}}{F_y}$$

Przykład krzywej trzeciego stopnia: Lisć Kartezjusza

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$F_y = 3y^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow y^6 + y^3 - 3y^3 \neq 0 \Rightarrow y \neq \sqrt[3]{2}$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \wedge (x, y) \neq (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$

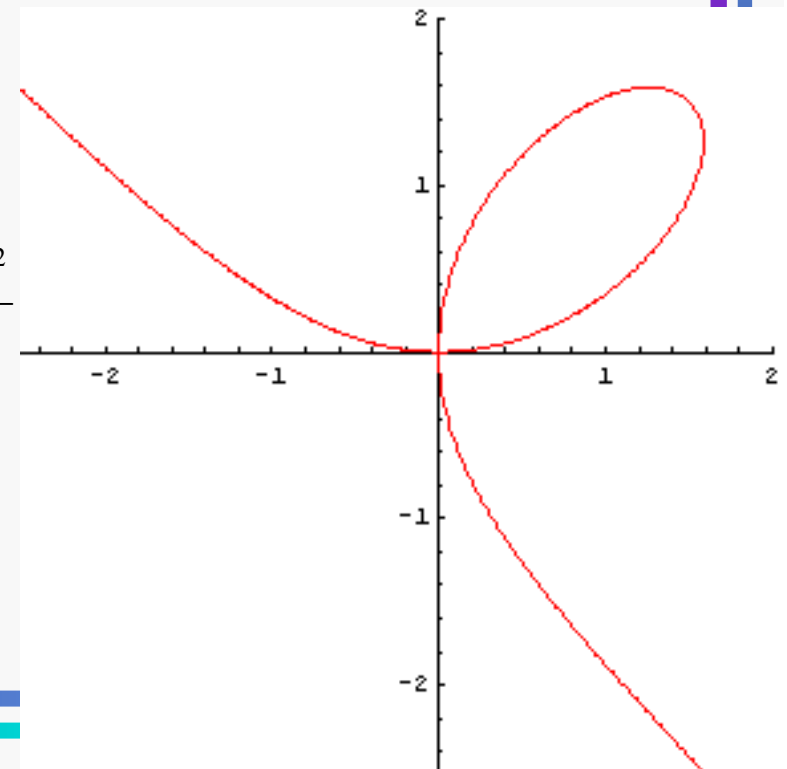
$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} \Rightarrow y' = 0 \text{ dla } y = x^2 \Rightarrow x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{2}, y_0 = \sqrt[3]{4},$$

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} =$$

$$= \frac{6x(3y^2 - 3x)^2 + 6(3x^2 - 3y)(3y^2 - 3x) + 6y(3x^2 - 3y)^2}{(3y^2 - 3x)^3}$$

\Rightarrow (po wstawieniu) $y''(x_0, y_0) < 0$ - maksimum



Ekstrema warunkowe

$$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum warunkowe, jeżeli

$$\exists \delta > 0 \forall x, y: |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2| < \delta \wedge g(x, y) = 0 \Rightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

analogicznie: minimum ... $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x), y' = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$\text{Rozważmy } F(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow F'(x) = f_x + f_y y' = f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y}$$

\Rightarrow funkcja może mieć ekstremum gdy $f_x g_y = f_y g_x$

$$\text{Przykład: } f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\text{warunek: } 2y = 2x, \Rightarrow x_0 = y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Metoda mnożników Lagrange'a

Tworzymy pomocniczą funkcję $\Phi(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, gdzie λ nazywa się mnożnikiem Lagrange'a lub czynnikiem nieoznaczonym Lagrange'a. Następnie znajdujemy ekstrema funkcji Φ tak, jakby zmienne x i y były niezależne.

Rozwiązujemy układ równań $\Phi_x = 0$, $\Phi_y = 0$, $g(x, y) = 0$.

Dowód: $\Phi_x = f_x + \lambda g_x = 0$, $\Phi_y = f_y + \lambda g_y = 0$. Eliminując λ dostajemy $f_x g_y = f_y g_x$.

Dla n zmiennych i k warunków mamy następujące uogólnienie:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Szukamy ekstremum

$$\partial_j \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \partial_j f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \partial_j g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \partial_j g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Ponadto $g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $r = 1, \dots, k$, co łącznie daje $n + k$ równań na $n + k$ niewiadomych (n zmiennych x i k czynników λ).

Krzywe i rozciągłości wielowymiarowe

$\Phi : V \subset R^k \rightarrow U \subset R^n, k \leq n$ – homeomorfizm (1-1, Φ i Φ^{-1} ciągłe),
 U, V – otwarte. Wtedy U nazywamy k -wymiarową powierzchnią
(hiperpowierzchnią, rozciągłością, rozmaitością)

Φ ma n składowych, Φ_n . Układamy gradienty Φ_n w macierz: $\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \dots \\ \nabla\Phi_n \end{pmatrix}$

Φ jest homeomorfizmem regularnym, jeżeli $\forall x \in V$ rząd $\Phi'(x) = k$.

Wtedy U nazywamy k -wymiarową powierzchnią gładką

$k=0$ - zerowymiarowa powierzchnia (punkty izolowane)

$k=1$ - krzywa, linia

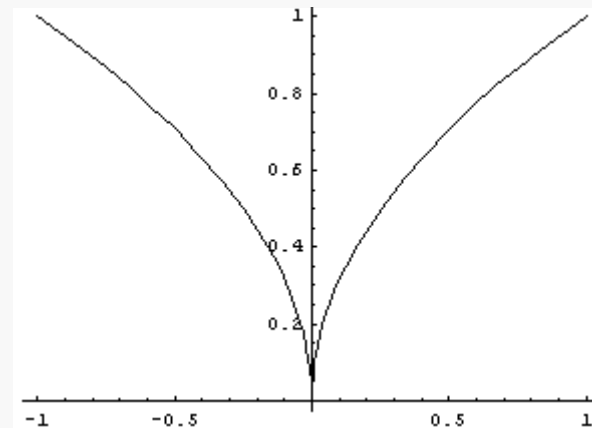
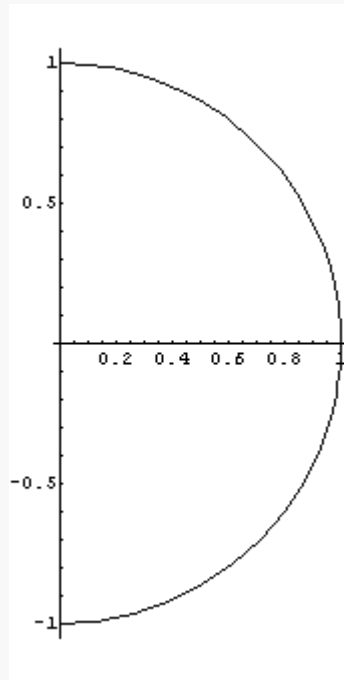
$k=2$ - powierzchnia

$k>2$ - hiperpowierzchnia

Przykład:

$k=1, n=2, U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \Phi = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \Phi' = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \forall t \in U : \exists \Phi' \wedge r_z \Phi' = 1$ – luk gładki

$k=1, n=2, U = (-1, 1), \Phi = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{|t|} \end{pmatrix}, \forall t \neq 0 : \Phi' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\text{sgn}(t)}{2\sqrt{|t|}} \end{pmatrix}$ – w $t=0$ Φ' nie istnieje (szpic)



Krzywa domknięta gładka:

$$\Phi : [a, b] \rightarrow R^n$$

$\Phi(a)$ – początek, $\Phi(b)$ – koniec

$\Phi(a) \neq \Phi(b)$ – homeomorficzna z przedziałem

$\Phi(a) = \Phi(b)$ – homeomorficzna z okręgiem

RYS., str. 221

Krzywe stopnia drugiego (stożkowe)

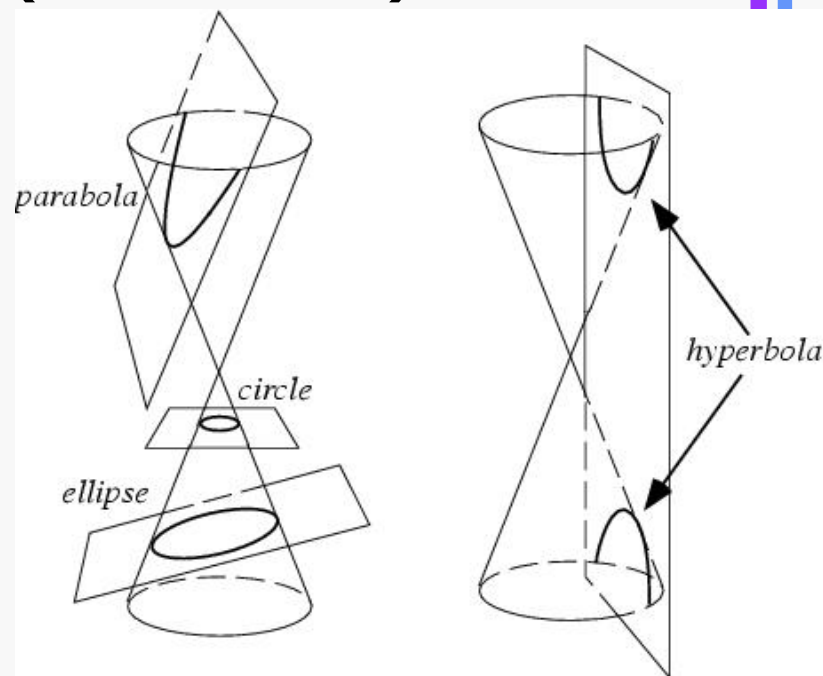
Powstają z przecięcia stożka płaszczyzną:

Okrąg, elipsa, parabola, hiperbola

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix}, J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$I = a + c, K = \begin{vmatrix} a & d \\ d & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & f \\ f & g \end{vmatrix}$$



krzywa	Δ	J	Δ/I	K
elipsa	$\neq 0$	> 0	< 0	
parabola	$\neq 0$	0		
hiperbola	$\neq 0$	< 0		
okrąg=elipsa, $a = c$				
linie przecinające się	0	0		< 0
linie przekrywające się	0	0		0

Redukcja do prostszej postaci:

Przez obrót możemy się pozbyć czlonu mieszanego

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

Czlon mieszany wynosi wtedy $2x' y' [(a - c) \cos \phi \sin \phi + b(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)]$

i znika dla $\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{2b}{c-a}$ dla $c \neq a$ oraz $\phi = \frac{\pi}{4}$ dla $c = a$. Po takim obrocie

mamy $Ax'^2 + Cy'^2 + 2Dx' + 2Fy' + G = 0$.

Dla $A \neq 0$, $C \neq 0$, czlonow liniowych pozbywamy się przez transformację

$$x'' = x' + D/A$$

$$y'' = y' + F/C$$

Wtedy $Ax''^2 + Cy''^2 + G'' = 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} - \text{mimosród}$$

$$a = b = r, \quad x^2 + y^2 = r^2 - \text{okrąg}$$

$$y = ax^2, \quad x = ay^2 - \text{parabola}$$

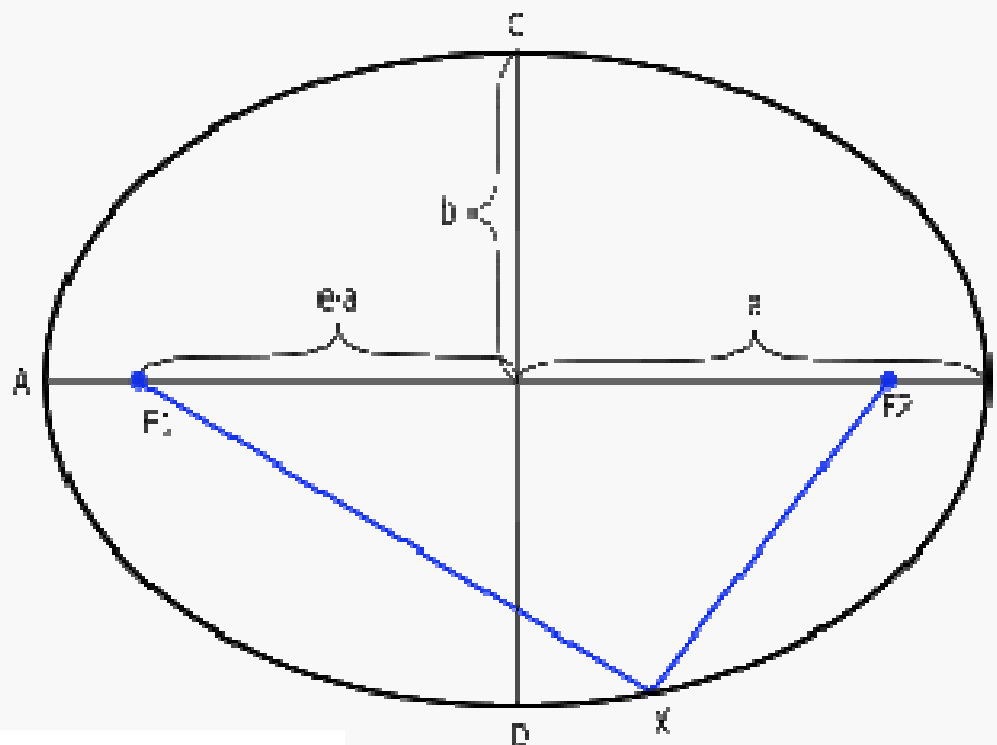
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy = c - \text{hiperbola}$$

Elipsa

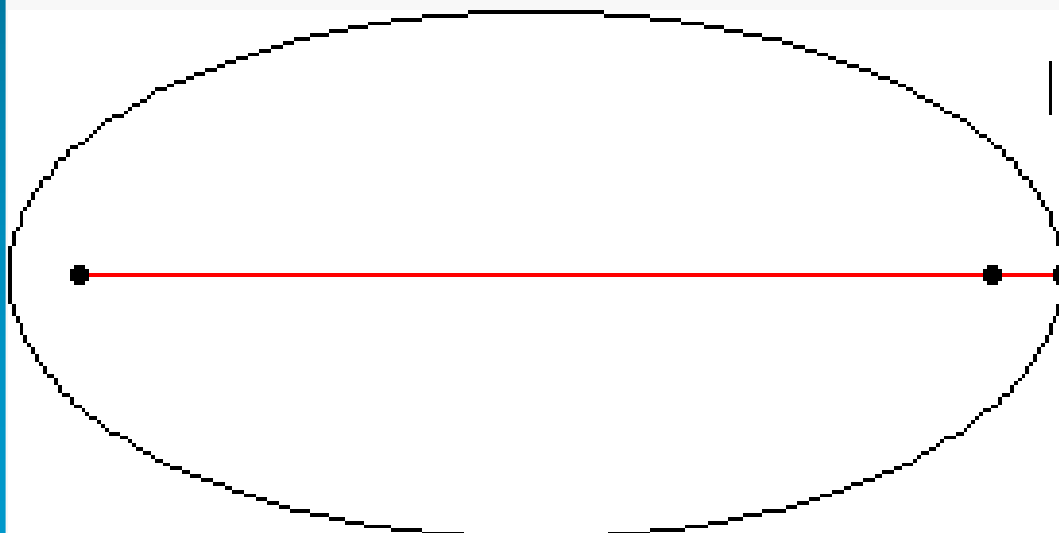
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (a \geq b)$$

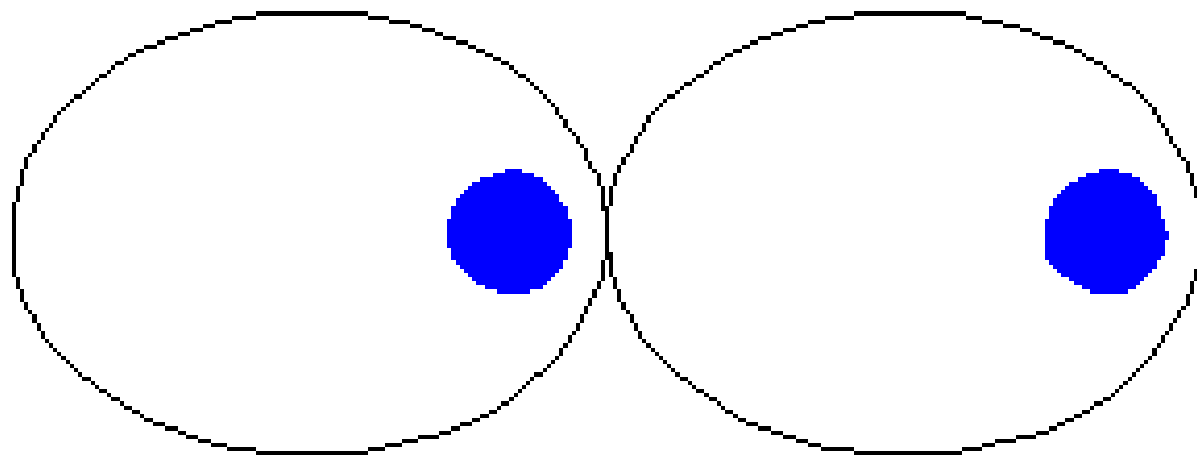
$$e = \frac{c}{a} \quad \text{mimośród}$$

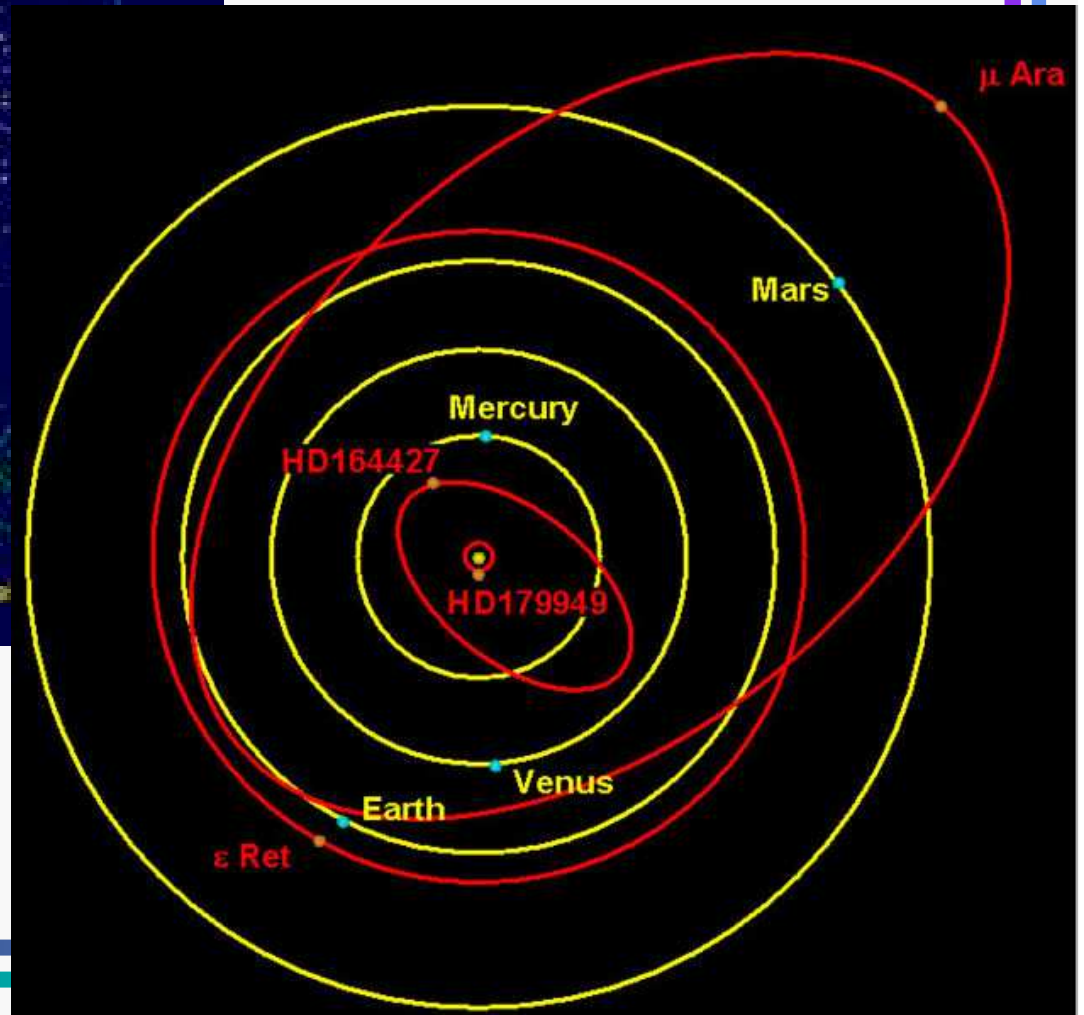
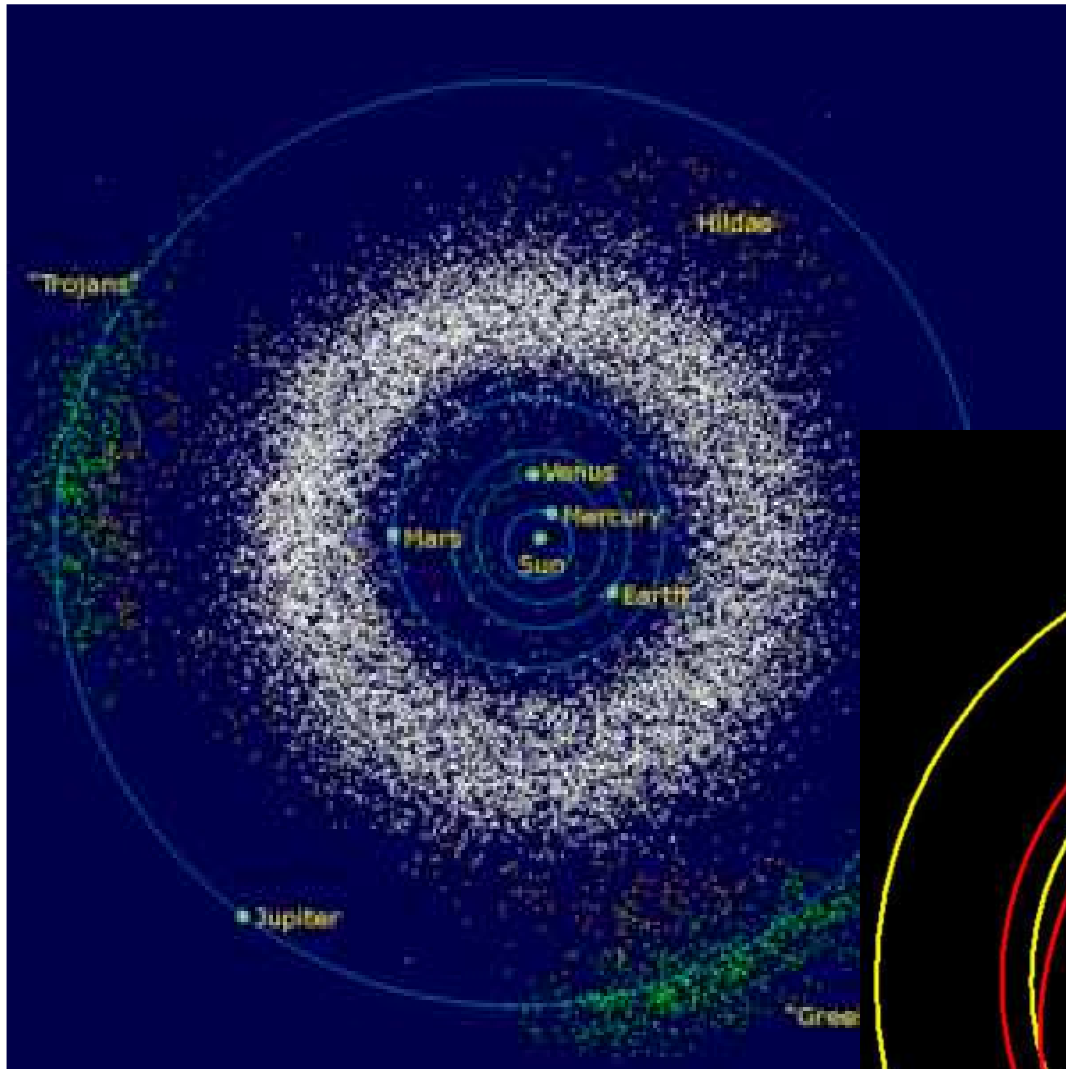


$$|XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{const.}$$



F₁, F₂ - ogniska
a - półoś wielka
b - półoś mała





Całki eliptyczne (*)

długość łuku elipsy

$$x = a \sin \phi, \quad y = b \cos \phi$$

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} d\phi = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} d\phi =$$

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + (a^2 - c^2) \sin^2 \phi} d\phi = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \phi} d\phi = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$L(\Phi) = a \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(k, \Psi), \quad k < 1, \quad F(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Całka eliptyczna: I rodzaju}$$

$$\int_0^{\Psi} d\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = E(k, \Psi), \quad k < 1, \quad E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{II rodzaju}$$

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\phi}{(1 + h \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = K(h, k, \Psi) \quad \text{III rodzaju}$$

$$\int R(x, \sqrt{W(x)}) dx, \quad (1) \quad W - \text{wielomian stopnia 3 lub 4}$$

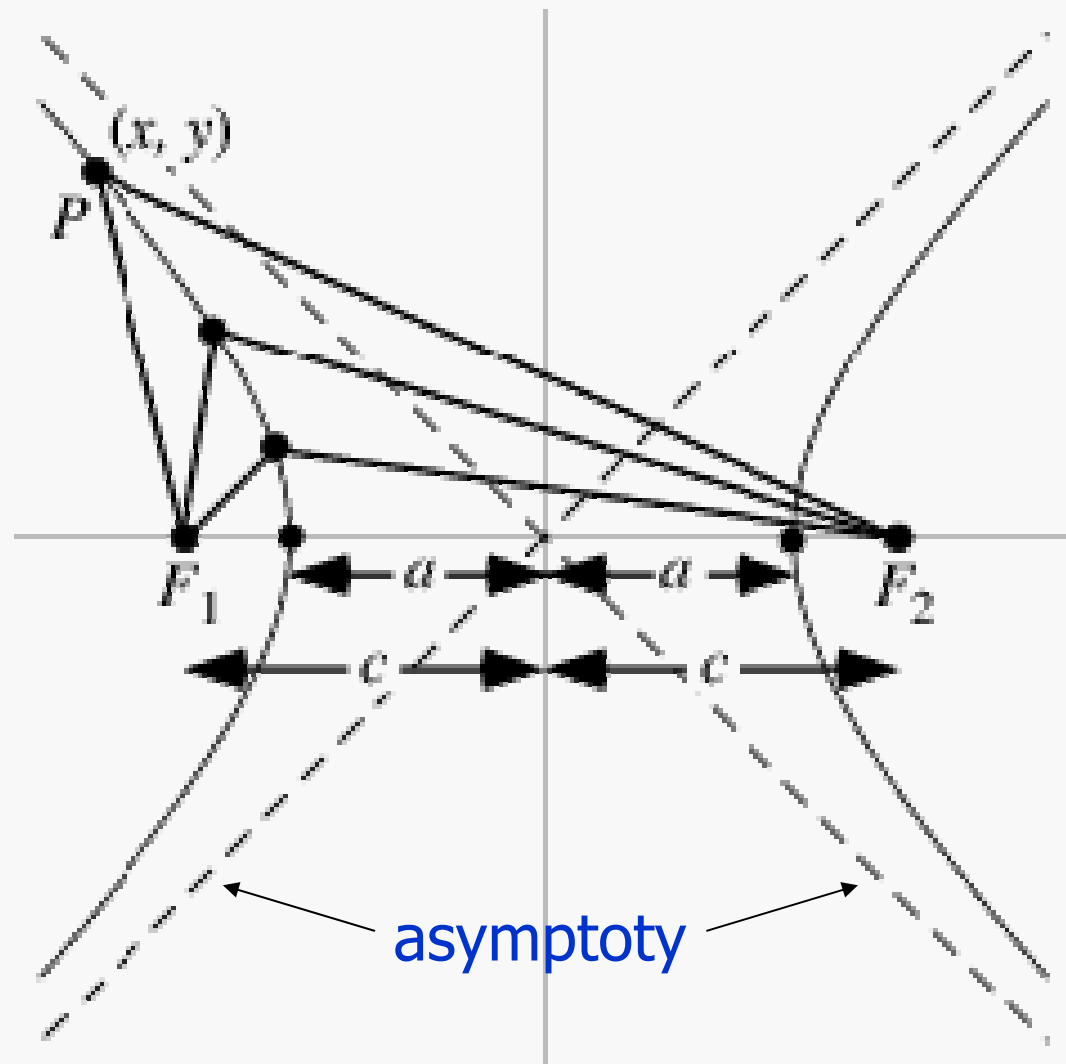
Hiperbola

$$\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a = \text{const.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

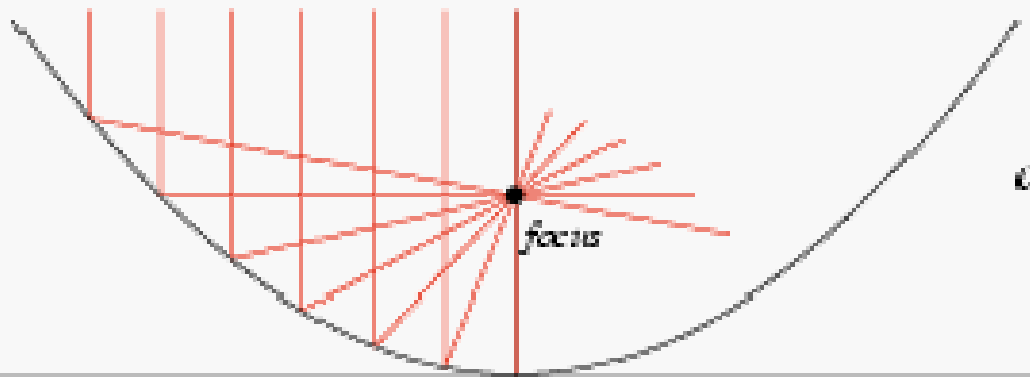
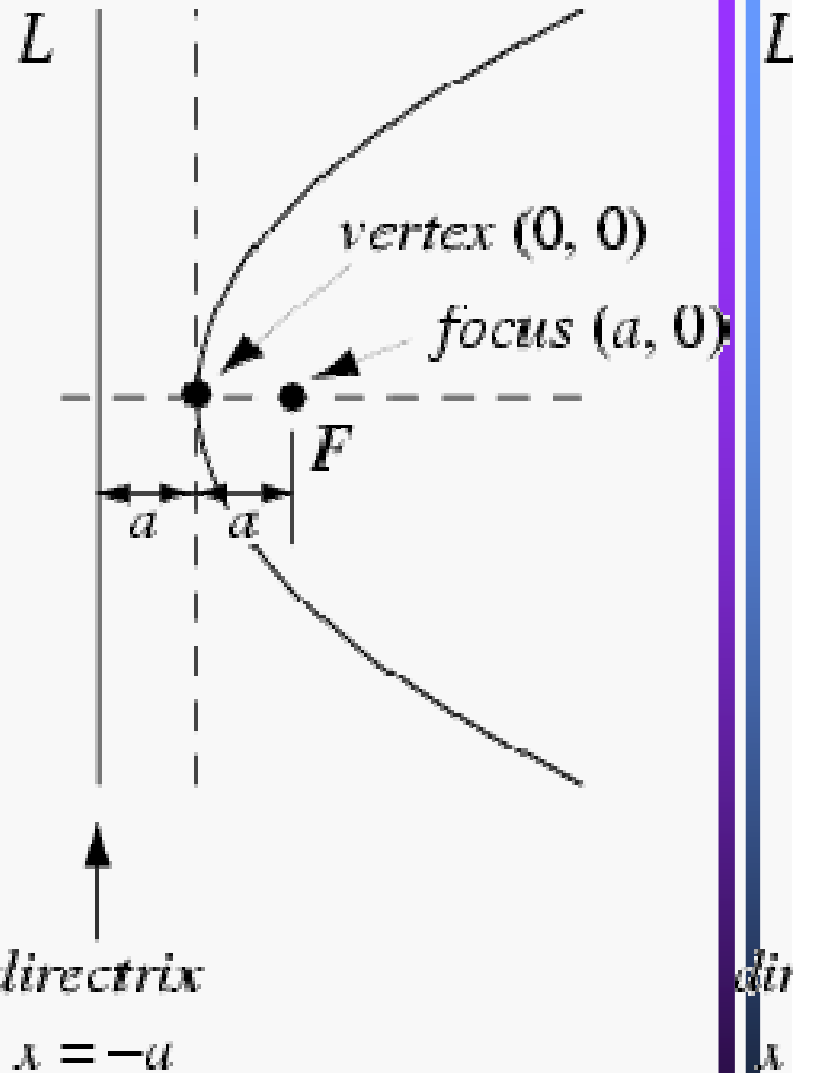


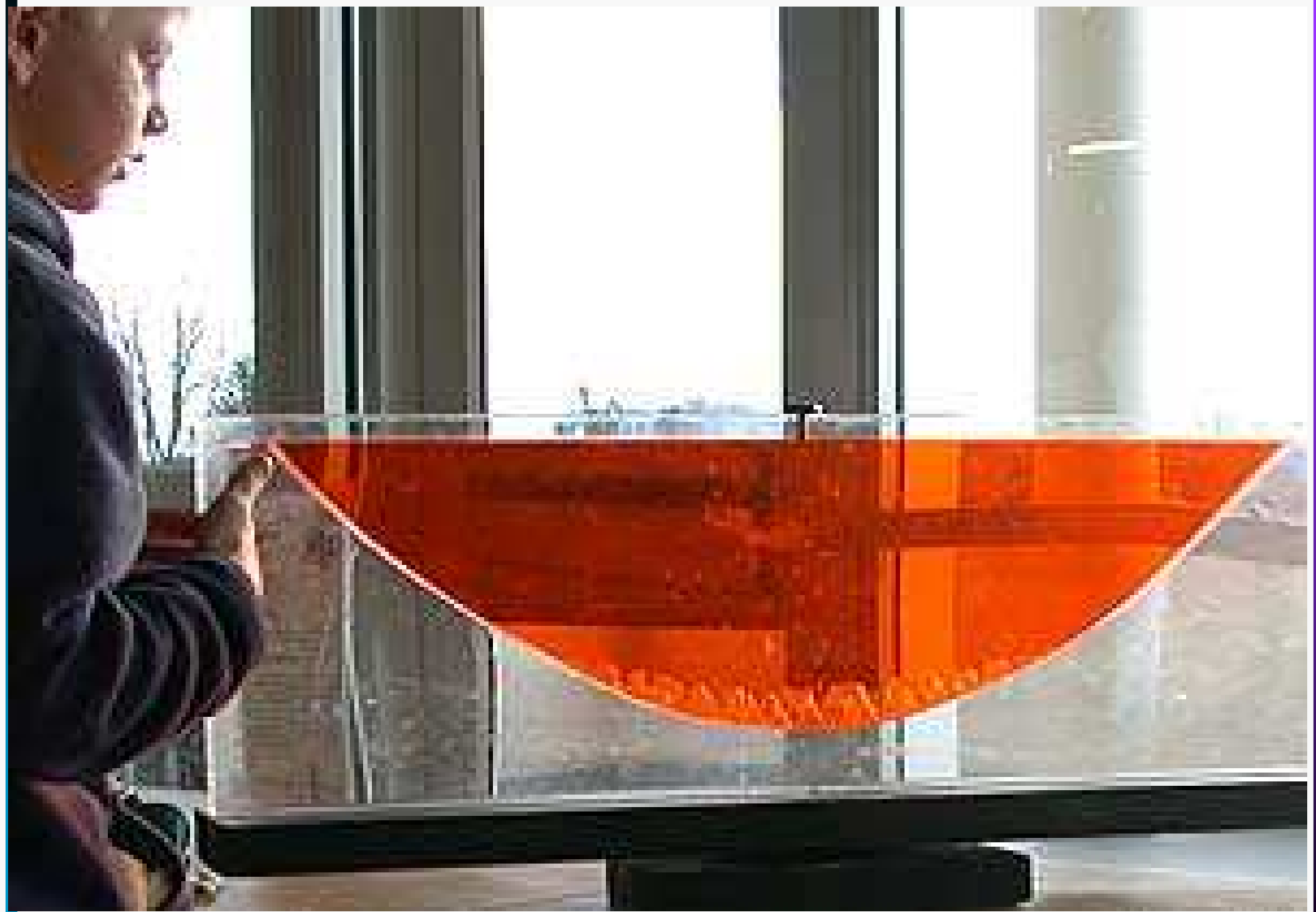
asymptoty

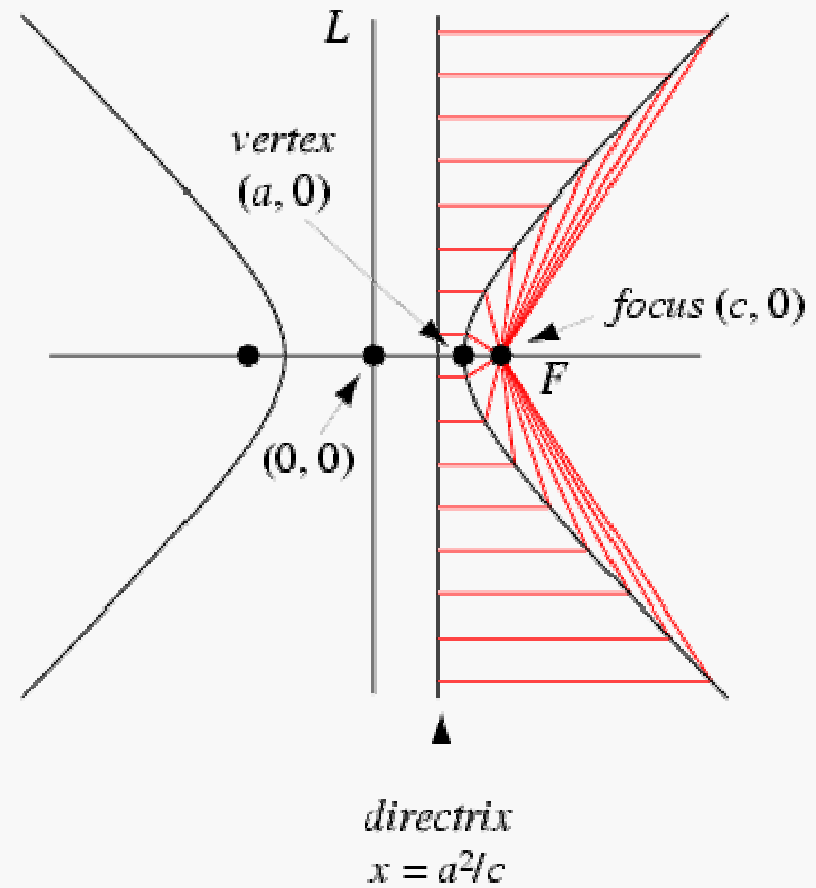
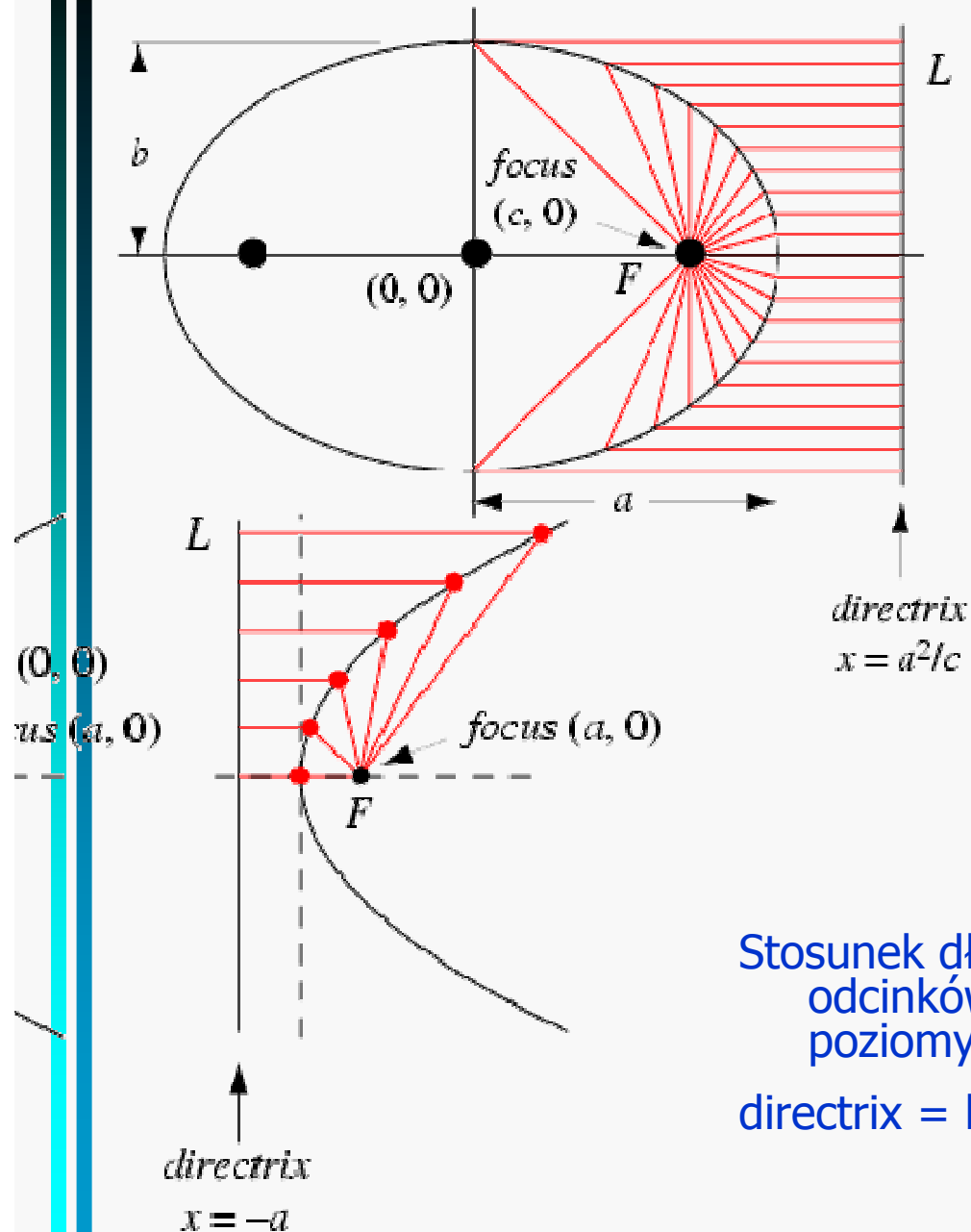
Parabola

$$x = 4ay^2$$

$$e = 1$$







Stosunek długości czerwonych odcinków ukośnych do poziomych wynosi e
 directrix = kierownica

Krzywizna krzywej płaskiej

Krzywa $y = y(x)$

równanie stycznej w (x_0, y_0) : $y - y_0 = y'(x)(x - x_0)$

równanie normalnej w (x_0, y_0) (prostopadła do stycznej): $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

(jest tak dlatego, bo $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, więc $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{y'(x)}$)

Rozważmy 2 punkty na krzywej, (x_0, y_0) i (x_1, y_1) , oraz normalne w tych punktach:

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$, $y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1)$. Ich punkt wspólny to

$$x^* = x_0 - \frac{1 + \frac{(y_1 - y_0)}{y'(x_1)} y'(x_1)}{y'(x_1) - y'(x_0)} y'(x_0), \quad y^* = y_0 + \frac{1 + \frac{(y_1 - y_0)}{y'(x_1)} y'(x_1)}{y'(x_1) - y'(x_0)}.$$

W granicy $x_1 \rightarrow x_0$ dostajemy $x^* = x_0 - \frac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)} y'(x_0)$, $y^* = y_0 + \frac{1 + (y'(x_0))^2}{y''(x_0)}$.

Odległość tego punktu od (x_0, y_0) to $\rho = \frac{(1 + y'(x_0)^2)^{3/2}}{|y''(x_0)|}$, a krzywizna to z def. $\frac{1}{\rho}$

Dla krzywej parametrycznej $(x(t), y(t))$ mamy $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{y_t}{x_t}}{x_t} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{(x_t)^3}$,

r. stycznej $- y_t(x - x(t)) - x_t(y - y(t)) = 0$

r. normalnej $- x_t(x - x(t)) + y_t(y - y(t)) = 0$

wsp. srodka krzywizny $- x^* = x(t) - \frac{x_t^2 + y_t^2}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} y_t$, $y^* = y(t) + \frac{x_t^2 + y_t^2}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} x_t$

krzywizna $- \frac{1}{\rho} = \frac{|x_t y_{tt} - y_t x_{tt}|}{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}$

Krzywizna nie zależy od układu współrzędnych (translacje, obroty).

Parametryzacja kanoniczna krzywej (*)

$(x(t), y(t), z(t))$

$$s(t) = \int_{s_0}^t dt' \sqrt{x_{t'}^2 + y_{t'}^2 + z_{t'}^2} \quad - \text{ długość krzywej mierzona od } s_0$$

$$s_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} > 0 \Rightarrow \exists t(s)$$

$(x[t(s)], y[t(s)], z[t(s)])$ – krzywa sparametryzowana kanonicznie

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x_t}{s_t} = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \dots, \quad \frac{dz}{ds} = \dots$$

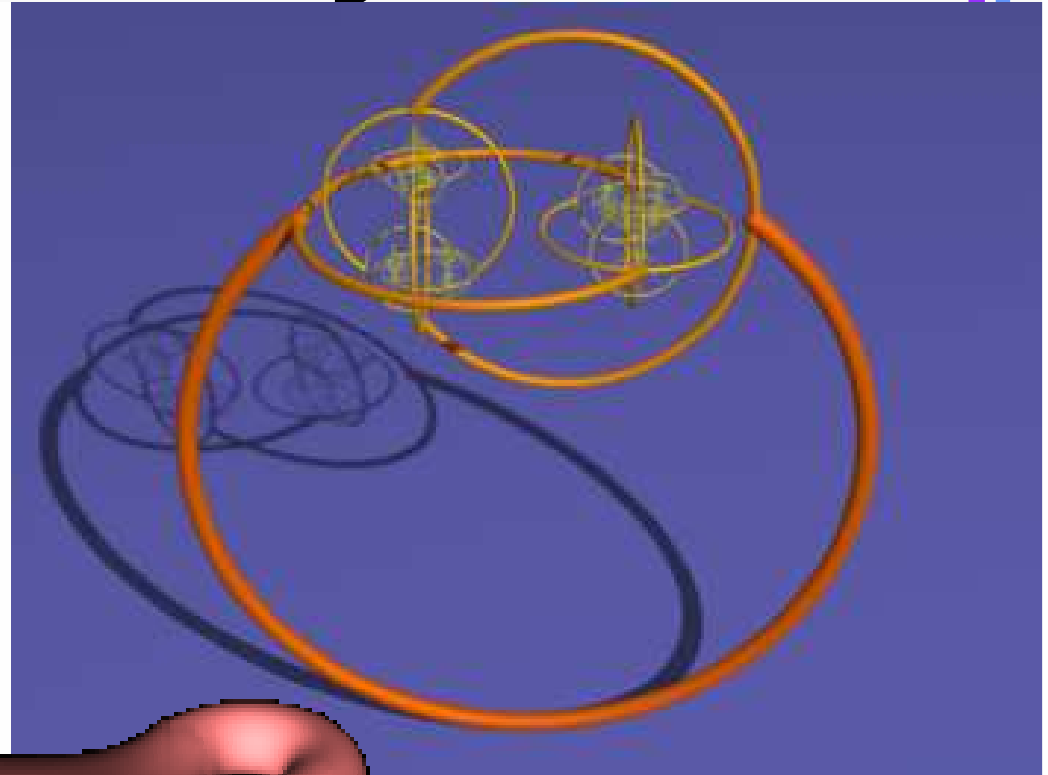
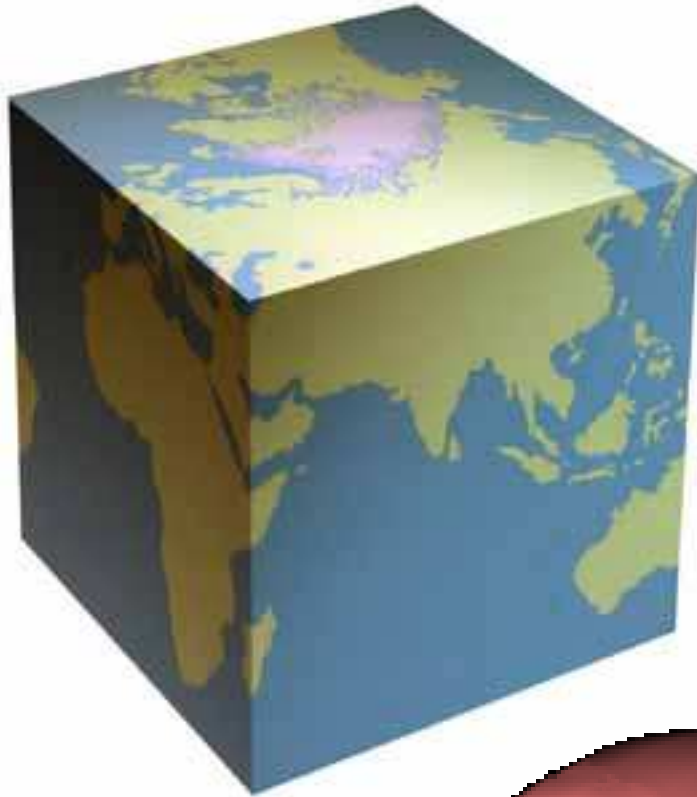
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

Dla $d = 2$ $y = f(x)$

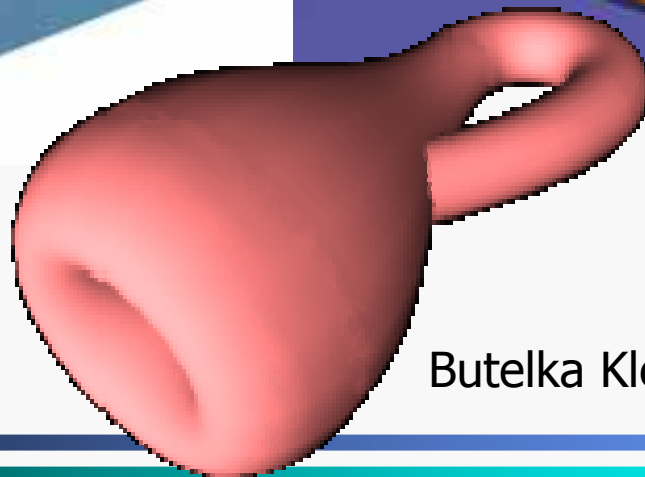
$$\text{kąt stycznej do Ox: } \alpha = \text{arctg } f' \Rightarrow \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{ds}\right| = \frac{|f_{xx}|}{1 + f_x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} = \frac{1}{\rho}$$

Interpretacja: krzywizna jest pochodną tangensa nachylenia krzywej po parametrze kanonicznym

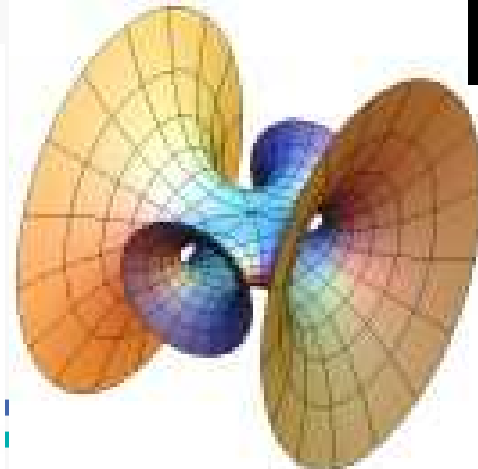
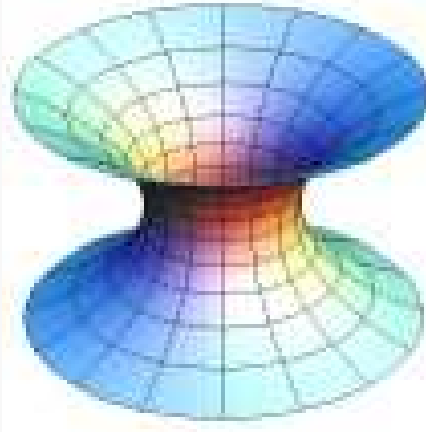
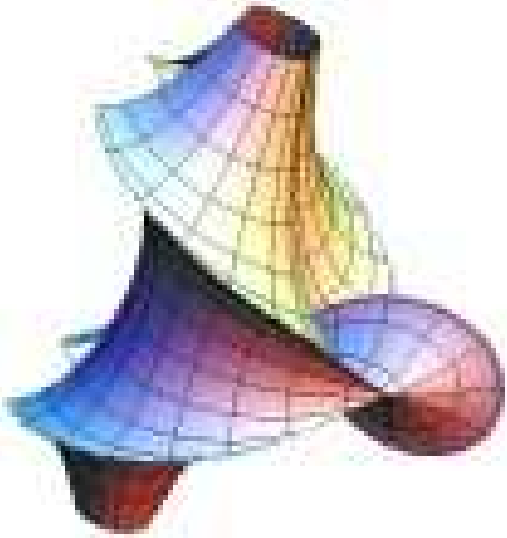
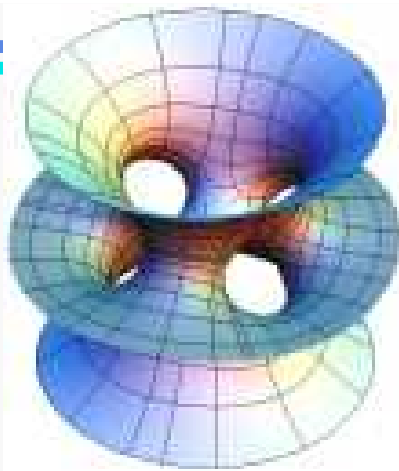
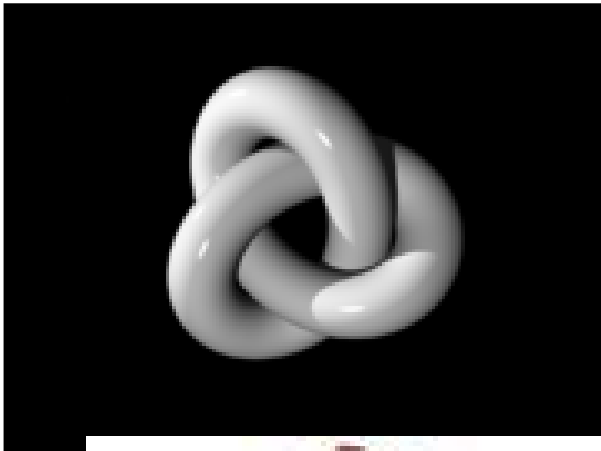
Powierzchnie kawałkami gładkie



Sfera Alexandra



Butelka Kleina



Całki wielowymiarowe

Definicja całki wielowymiarowe

Uogólnienie jednowymiarowej całki Riemanna na n wymiarów:

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Dokonujemy podziału n -wymiarowego prostokąta

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in P_i\}, M_i = \sup\{f(x) : x \in P_i\}$$

$$s = m_1 |P_1| + \dots + m_k |P_k|, S = M_1 |P_1| + \dots + M_k |P_k|$$

Rozważamy normalny ($\delta_n \rightarrow 0$) ciąg podziałów

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \text{całka dolna}, S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \text{całka górna funkcji } f \text{ na prostokącie } P$$

Jeżeli $s^* = S^*$ to wielkość tę nazywamy wielokrotną całką Riemanna

$$\text{Notacja: } \iint_P dx dy f(x, y), \iiint_P dx dy dz g(x, y, z)$$

Całka iterowana

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y) \right), \int_{a_1}^{b_1} dx \left(\int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y) \right) - \text{całki iterowane}$$

Tw. Fubiniego: Jeżeli $f : P \rightarrow R$ jest ciągła, to obie całki iterowane są równe

całce Riemanna $\iint_P dx dy f(x, y)$.

(analogicznie dla większej liczby wymiarów)

Przykład: $P = [0, 1] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_P dx dy (x^2 y + 2) &= \int_0^1 dx \left(\int_0^2 dy (x^2 y + 2) \right) = \int_0^1 dx \left(\frac{x^2 y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{y=0}^2 = \int_0^1 dx (2x^2 + 4) = \frac{2}{3} + 4 \\ &= \int_0^2 dy \left(\int_0^1 dx (x^2 y + 2) \right) = \int_0^2 dy \left(\frac{x^3 y}{3} + 2x \right) \Big|_{x=0}^1 = \int_0^2 dx \left(\frac{y}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} + 4 \end{aligned}$$

Całki po dowolnym obszarze

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \in P \setminus A \end{cases}$$

$$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ – zbiór normalny względem O_x

Tw. Jeżeli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna, oraz

$$\iint_A dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$$

Przykład:

$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ – trójkąt

$$\iint_A dx dy xy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy = \int_0^1 dx \frac{1}{2} (1-x)^2 x = \frac{1}{24}$$

Zastosowania całek wielokrotnych

$$V = \iiint_A dx dy dz$$

$$A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$x, y - \text{ustalone} \Rightarrow z \leq 1 - x - y$$

$$x - \text{ustalone, szukamy największego możliwego } y: y \leq 1 - x - z,$$

$$\text{ponieważ najmniejsze } z = 0 \Rightarrow y \leq 1 - x$$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \int_0^1 dx \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \frac{1}{6}$$

Jest to tzw. objętość sympleksu. W n wymiarach $V = \frac{1}{n!}$

Środek ciężkości

$$\bar{x} = \frac{1}{|A|} \iint_A x \, dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy - \text{figura 2-wym.}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|V|} \iiint_V x \, dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{|V|} \iiint_V z \, dx dy dz - \text{bryła}$$

Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu

regularnego zbioru A wokół Ox : $|V| = 2\pi \iint_A y \, dx dy$

Reguły Guldina: $|V| = 2\pi\eta |A|$, $\eta = \frac{1}{|A|} \iint_A y \, dx dy$,

Dla torusa $|V| = 2\pi a \pi r^2$

Podobnie dla powierzchni powstałej w wyniku obrotu łuku mamy

$|S| = 2\pi\xi |L|$, $\xi = \frac{1}{|L|} \int_{\alpha}^{\beta} y dt$ - odległość środka ciężkości łuku od osi obrotu

Dla torusa $|S| = 2\pi a 2\pi r$



Pole powierzchni

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Wzór wynika z konstrukcji przybliżającej powierzchnię równoległobokami

Przykład:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

$$A = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_A dx dy \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zamiana zmiennych - dyfeomorfizm

$f \in C^1 : R^n \supset U \rightarrow V \subset R^n$, homeomorfizm rzędu n
(bijekcja, pochodna odwracalna, f i f^{-1} ciągłe)

Pamiętamy, że dla jednej zmiennej $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dy f(y) = \int_a^b dx f[\varphi(x)]\varphi'(x)$, $y = \varphi(x)$

Tw. $\varphi : X \subset R^n \rightarrow Y \subset R^n$ klasy C^1

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \quad \text{jakobian przekształcenia } \varphi$$

Wtedy

$$\int_Y \dots \int f(y) dy_1 \dots dy_n = \int_X \dots \int f[\varphi(x)] |J(x)| dx_1 \dots dx_n, \quad y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

Podstawowe układy współrzędnych

Współrzędne biegunowe (osiowe)

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix}, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

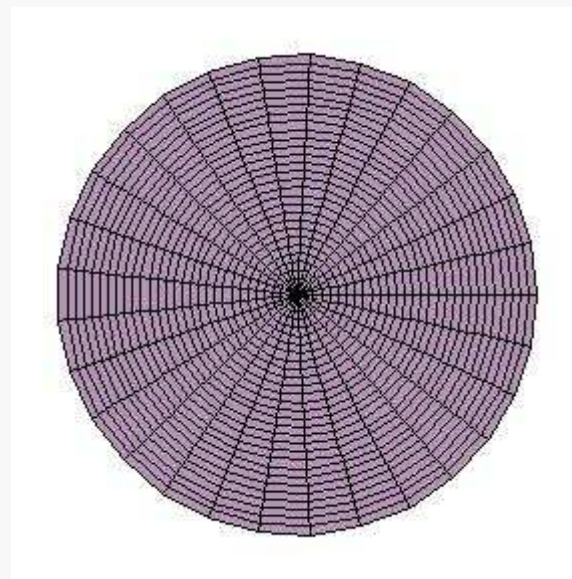
$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\Phi'(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

$$\int dx dy f(x, y) = \int r dr d\phi f(x(r, \phi), y(r, \phi))$$

Homeomorfizm regularny dla $r \neq 0$, rząd $\Phi' = 2$. Dla $r = 0$ jest osobliwość, bo w tym punkcie nie można określić kąta



Przykłady:

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{r^2 \leq R^2} \frac{rdrd\phi}{r} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi = R2\pi$$

$$I_R = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{r^2 \leq R^2} e^{-r^2} rdrd\phi = 2\pi \int_0^R r dr e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^R = \pi - \pi e^{-R^2}$$

$$I_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi$$

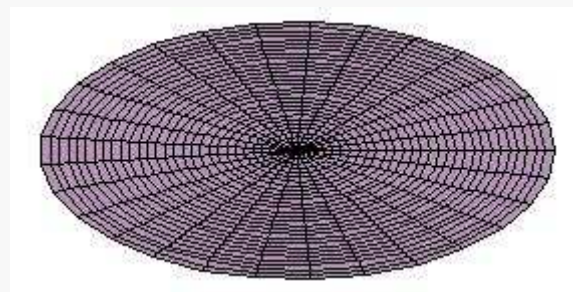
$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Współrzędne eliptyczne

$$x = ar \cos \phi$$

$$y = br \sin \phi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad J = abr$$



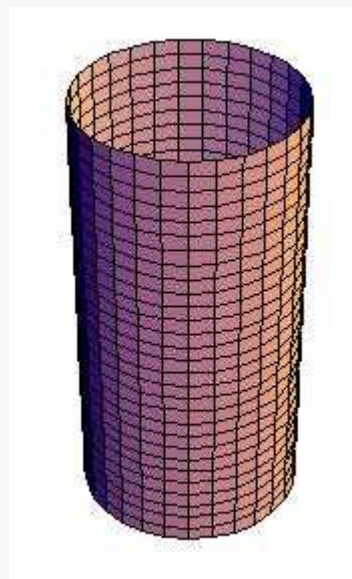
Współrzędne walcowe (cylindryczne)

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

$$J = r$$



Liniowa zmiana skali

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$

$$J = abc$$

Współrzędna sferyczne (kuliste)

$$\Phi: R^3 \rightarrow R^3$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$\theta \in [0, \pi]$ - kąt osiowy (szerokość geogr.),

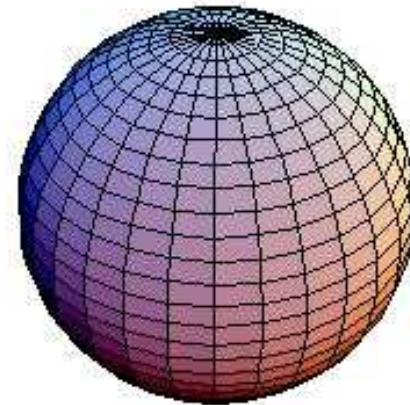
$\phi \in [0, 2\pi)$ - kąt biegunowy (azymutalny, długość geogr.)

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$r = 0 \Rightarrow r z \Phi' = 1$ - w środku kuli nie można określić kątów

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow r z \Phi' = 2$ - na biegunach nie można określić kąta ϕ



Przykład:

Objętość kuli

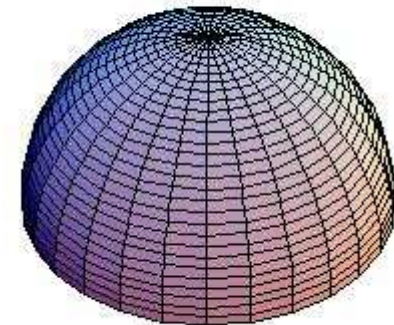
$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} dx dy dz = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \int_0^R dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$(d \cos \theta = -\sin \theta d\theta)$$

Srodek ciężkości półkuli:

$$\eta = \frac{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} z dx dy dz}{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 < R^2 \\ z > 0}} dx dy dz} = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta r \cos \theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R dr \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^3 \cos \theta = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{3}{8} R$$



Równania prostej i płaszczyzny

prosta o kierunku \vec{a} i należącym do niej punkcie \vec{x}_0 :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$$

płaszczyzna o wektorze \vec{a} do niej prostopadłym i należącym do niej punkcie \vec{x}_0 : $(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{a} = 0$

Płaszczyzna styczna

Płaszczyzna styczna do powierzchni gładkiej o równaniu $f(x,y,z)=0$
dana jest równaniem

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Wektor $\left(\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \right)$ jest prostopadły do

powierzchni w punkcie (x_0, y_0, z_0) . Prosta prostopadła do powierzchni w tym punkcie ma więc równanie parametryczne

$$\left(\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}t + x_0, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}t + y_0, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}t + z_0 \right)$$

Dla sfery $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, więc prosta prostopadła ma równanie
 $(2x_0t + x_0, 2y_0t + y_0, 2z_0t + z_0)$

Elementy analizy fourierowskiej

Szereg Fouriera

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

funkcja całkowalna z kwadratem modulu: $\exists \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$ (przestrzeń L_2)

1) układ ortonormalny funkcji: $\phi_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_m^*(x) \phi_n(x) = \delta_{mn}$$

2) układ $\phi_n(x)$ jest zupełny, tj. każda funkcja z L_2 można zapisać jako

$$\text{szereg } f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_m^*(x) f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_m^*(x) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \phi_m^*(x) \phi_n(x)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

W szeregu Fouriera $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $x \in [-\pi, \pi]$ (ortonormalny).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c_0 + \sum_1^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_1^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c_0 + \sum_1^{\infty} (c_n + c_{-n}) \frac{(e^{inx} + e^{-inx})}{2} + \sum_1^{\infty} i(c_n - c_{-n}) \frac{(e^{inx} - e^{-inx})}{2i} \right) =$$
$$a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx + \sum_1^{\infty} b_n \sin nx$$

(szereg F. z funkcjami sin i cos)

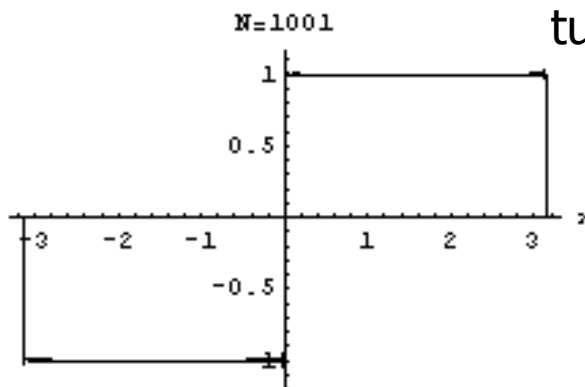
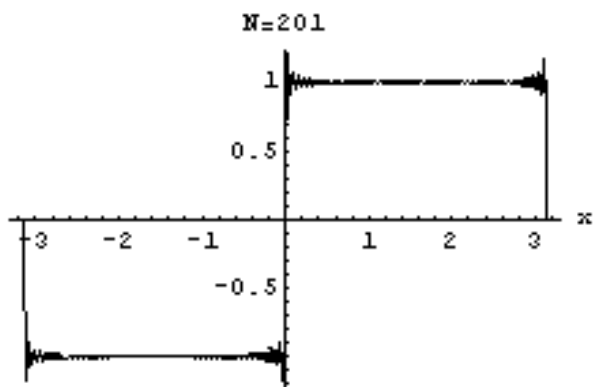
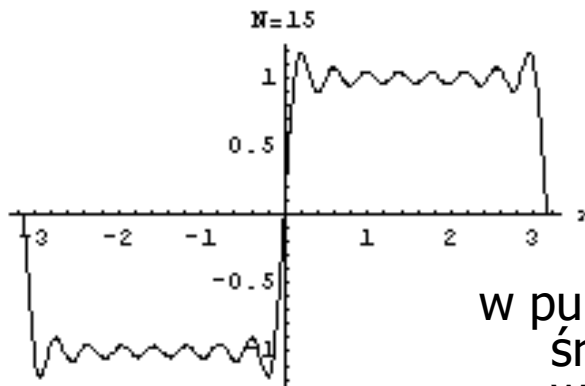
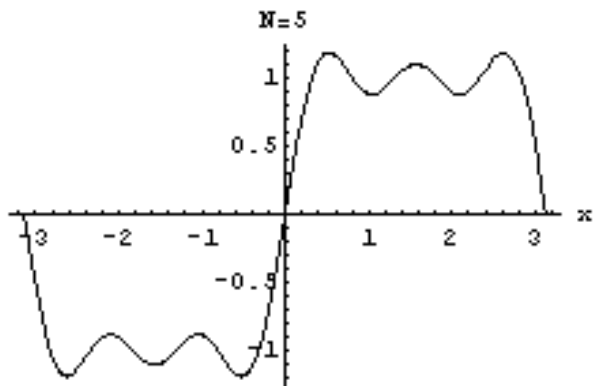
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos nx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin nx$$

Przykład:

$$f(x) = \text{sgn}(x), \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (\text{nieciągła!})$$

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin nx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n - \text{nieparzyste} \\ 0, & n - \text{parzyste} \end{cases}$$



w punktach nieciągłości
średnia arytmetyczna
wartości po obu stronach,
tutaj $(1-1)/2=0$

Dla $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ rozwinięcie Fouriera ma postać

$$f(x) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{T}$$

gdzie $T = \frac{b-a}{2}$, oraz

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_a^b dx f(x),$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_a^b dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{T}, \quad (n > 0)$$

Uwagi: Podobnie jak w rozwinięciu Taylora, rozwinięcie Fouriera reprezentuje daną funkcję z pomocą (nieskończonej liczby) współczynników. Reprezentacją funkcji jest więc nieskończenie wymiarowy wektor (c_n) . Każda funkcja całkowalna z kwadratem ma rozwinięcie Fouriera.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f^*(x) g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* d_n$$

Transformata Fouriera (ciągła)

Rozważmy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dla której $\exists \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$ (przestrzeń L_1).

Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Własności:

1. $\hat{f}(\omega)$ jest ciągła

$$2. g(t) = f(t - a) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = e^{i\omega a} \hat{f}(\omega)$$

$$3. g(t) = f(t/a) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = a \hat{f}(a\omega), \quad a > 0$$

$$4. f - \text{różniczkowalna}, f' \in L_1 \Rightarrow \boxed{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Splotem funkcji f i g nazywamy

$$(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(y-x)g(x)$$

Tw. $(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

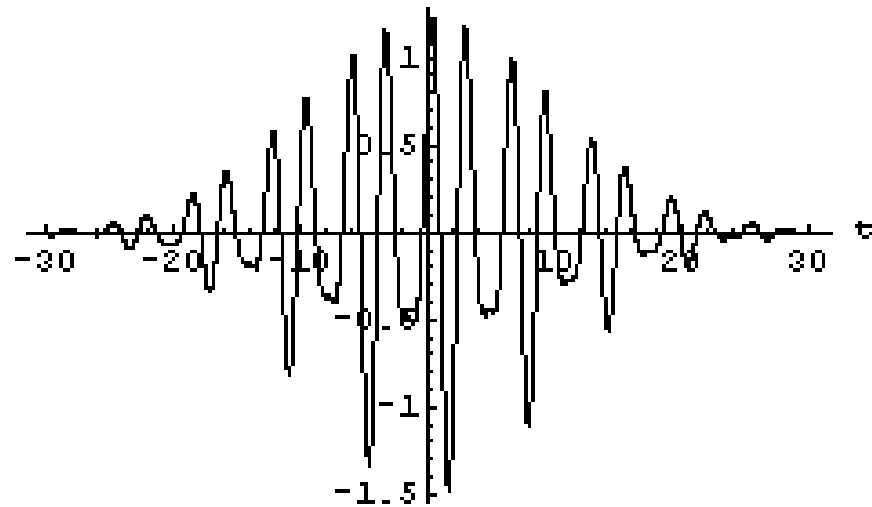
Odwrotna transformata Fouriera:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \hat{f}(\omega), \quad t \in \mathbb{R}$$

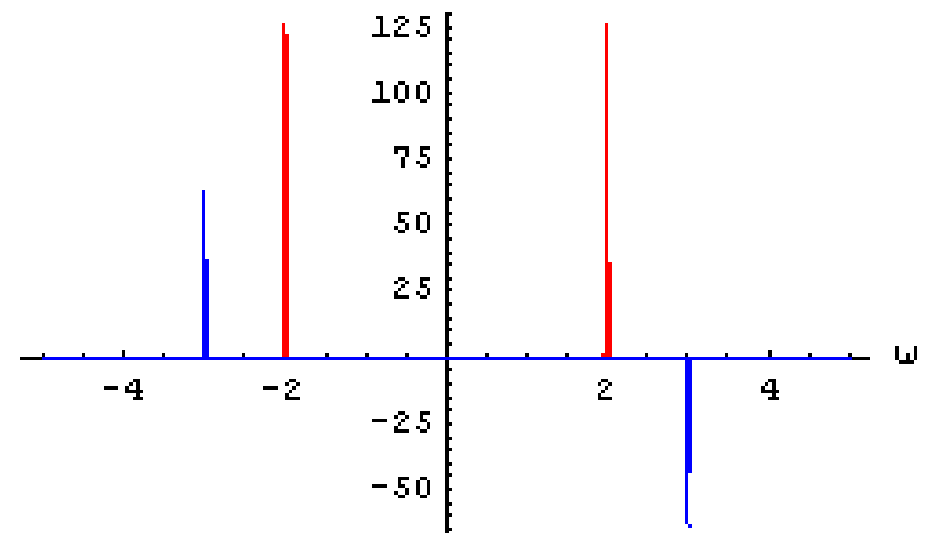
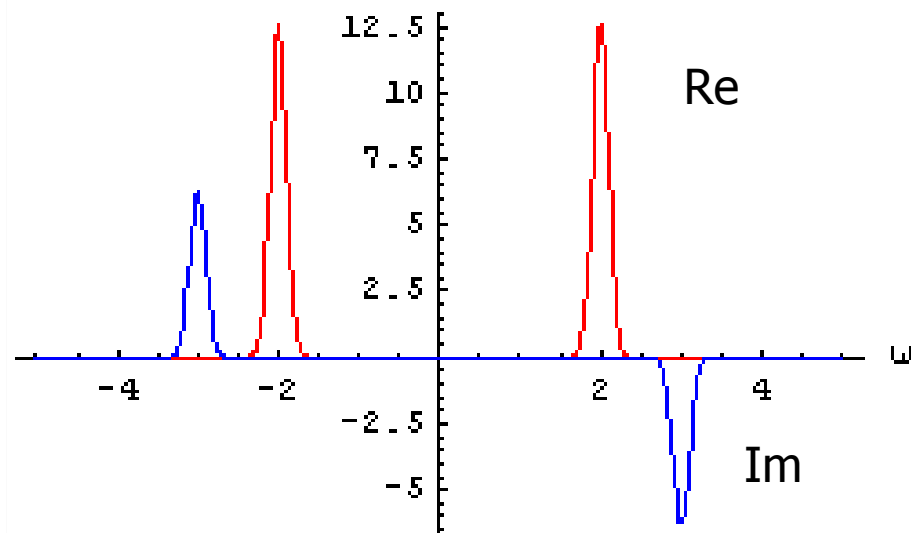
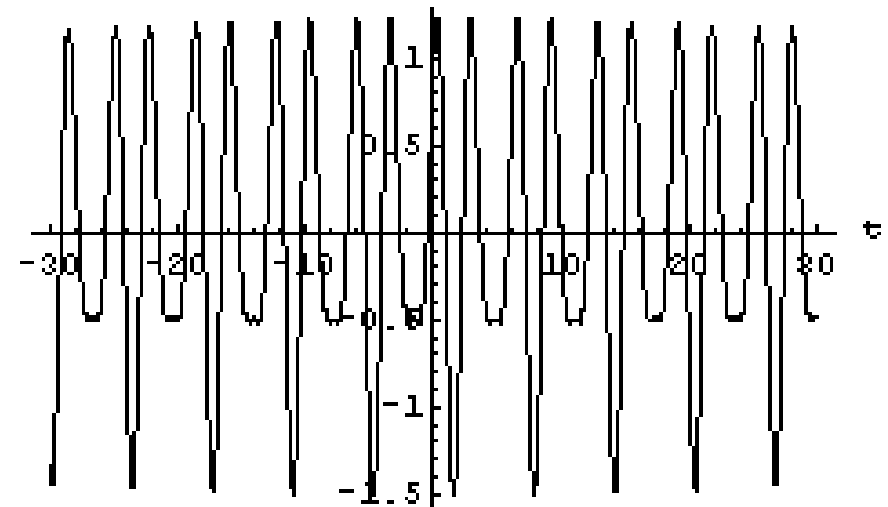
Równość Parsewala: $\int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(t)g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}^*(\omega)\hat{g}(\omega)$

Równość Plancherela: $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\hat{f}(\omega)|^2$

$$[\cos(2t) + \sin(3t)/2] \exp(-t^2/(2+10^2))$$



$$[\cos(2t) + \sin(3t)/2] \exp(-t^2/(2+100^2))$$



sygnał czasowy – widmo częstotliwości

rozmycie szerokości od skończonego zakresu w t

Transformata Fouriera funkcji Gaussa

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2a^2}}, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t} = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} t e^{-i\omega t} =$$

$$= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (-a^2) \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right) e^{-i\omega t} = \frac{ia^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right) e^{-i\omega t} =$$

$$= -\frac{ia^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} = -a^2 \omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-i\omega t} = -a^2 \omega \hat{f}(\omega)$$

Rozwiązanie: $\hat{f}(\omega) = C e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}}$ (szerszy sygnał, węższe widmo)

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = a \Rightarrow \hat{f}(\omega) = a e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}}$$

Równania różniczkowe

Definicje, klasyfikacja

Równanie różniczkowe zwyczajne ma ogólną postać $F(x, y(x), y'(x), \dots) = 0$, gdzie ... oznaczają możliwość wystąpienia wyższych pochodnych. Zmienna x jest zmienną niezależną, a $y(x)$ jest szukaną funkcją. Rząd równania to najwyższy rząd pochodnej. W szczególności, równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma postać $F(x, y, y') = 0$.

Równanie różniczkowe cząstkowe ma ogólną postać

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial y(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n}, \dots) = 0$$

(równaniami cząstkowymi nie będziemy się zajmować)

Układ równań różniczkowych zwyczajnych na n funkcji $y_i(x)$ ma postać

$$F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Model fizyczny/ekonomiczny/meteorologiczny... → r. różniczkowe

Przykład: oscylator harmoniczny

$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0$ – r. mechaniki

$f = ma$ – prawo Newtona

$-kx(t) = m\ddot{x}(t)$, $k, m > 0$, $\frac{k}{m} = \omega^2$ – oscylator harmoniczny

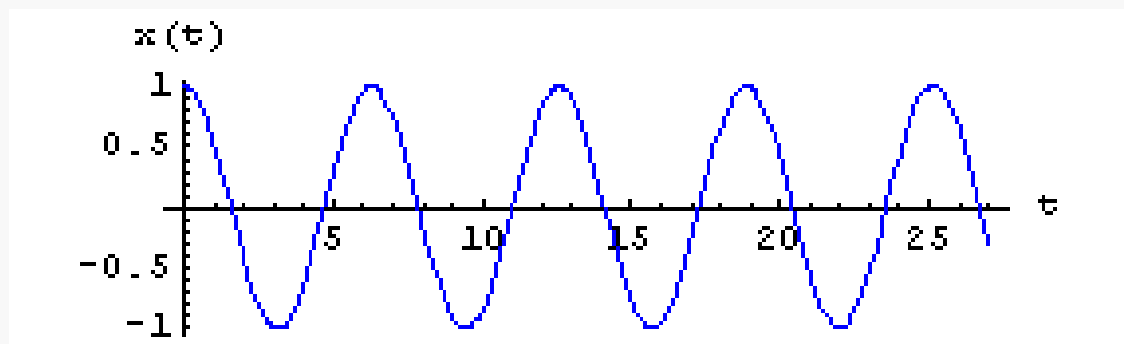
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ – r. różniczkowe do rozwiązania

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ – ogólna postać rozwiązania

Sprawdzenie: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

Warunki początkowe: $x(t) = x_0$, $\dot{x}(t) = v_0 \rightarrow A = x_0, B\omega = v_0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ – rozwiązanie spełniające war. początkowe



Przykład: rozpad promieniotwórczy / wzrost populacji

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0$$

(ubytek na jedn. czasu proporcjonalny do liczby atomów)

Rozw.: $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$ – liczba nierozpadłych atomów po czasie t

$$\lambda \rightarrow -\lambda$$

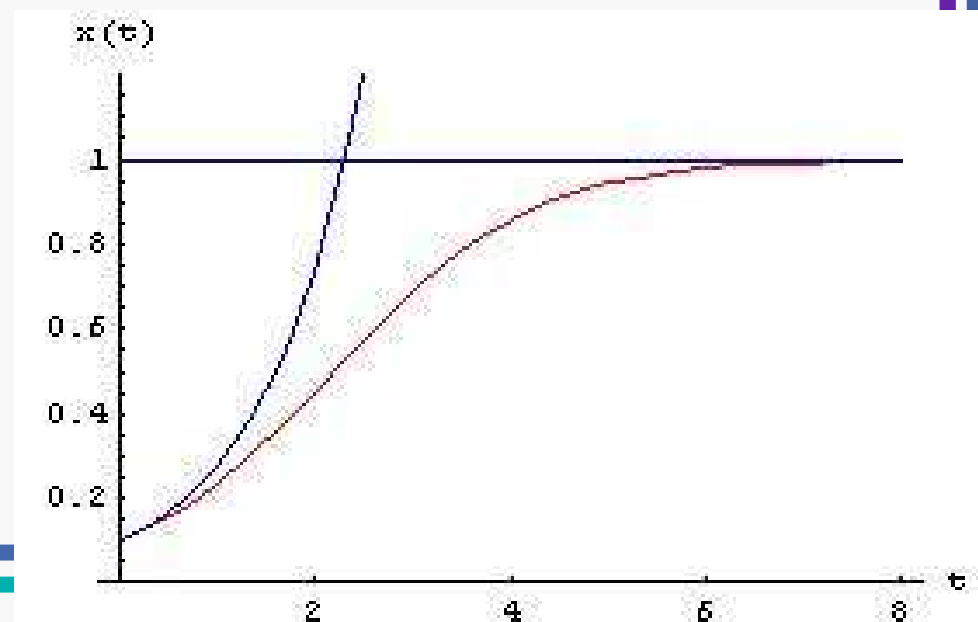
$N(t) = N_0 \exp(\lambda t)$ – populacja w czasie t , prawo wzrostu Malthusa

Bardziej realistyczne równanie:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) [1 - N(t) / N^*],$$

$$x = N / N^* \rightarrow \dot{x} = \lambda x(1 - x)$$

(nieliniowość!)



Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{x}{x-1} \right| = \exp(t + C) \Rightarrow$$

$$\left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \exp(-C) \exp(-t) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = C' \exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - C' \exp(-t)}$$

$$\text{war. początkowy: } x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$

$$1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0-1} \Rightarrow t \neq -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(w $t = -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right)$ osobliwość)

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

$$\forall x_0 \neq 0: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

Ogólne uwagi i twierdzenia

Rozwiązanie $y(x)$ r.r. nazywamy całką r.r., a wykres $(x, y(x))$ krzywą całkową.

Całka ogólna równania rzędu pierwszego jest postaci $y(x) = f(x, C)$, gdzie C jest stałą. Stałą tę wyznacza się z warunku początkowego $y_0 = f(x_0, C)$.

Rozwiązanie osobliwe to rozwiązanie, którego nie można uzyskać z postaci $f(x, C)$ dla żadnej wartości C .

$$\text{Przykład: } y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{y})' = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C, x + C \geq 0$$

$$y(x) = \begin{cases} (x + C)^2, & x \geq -C \\ 0, & x < -C \end{cases}$$

$y(x) = 0$ – rozw. osobliwe

Jednoznaczność rozwiązań

Tw. (o jednoznaczności rozwiązań) R. postaci $y' = f(x, y)$,
 $f(x, y)$ i $f_y(x, y)$ ciągłe w pewnym otoczeniu $(x_0, y_0) \Rightarrow$
 \exists otoczenie $(x_0 - a, x_0 + a)$, w którym jest określona dokładnie
jedna funkcja $\phi(x)$ o własnościach: $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $\phi(x_0) = y_0$.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$p(y)y'(x) = q(x) \Rightarrow p(y) \frac{dy}{dx} = q(x) \Rightarrow p(y)dy = q(x)dx \Rightarrow \int p(y)dy = \int q(x)dx$$

$$P(y) = \int p(y)dy, \quad Q(x) = \int q(x)dx, \quad P(y) = Q(x) + C, \quad C - \text{ pewna stała}$$

Rozwiązanie jest dane w postaci uwiklanej!

$$D: \frac{d}{dx}(P(y(x)) - Q(x) - C) = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} P(y) - \frac{d}{dx} Q(x) = y' p(y) - q(x) = 0$$

Przykład:

$$y^2 \frac{dy(t)}{dt} = t \Rightarrow y^2 dy = t dt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3C}$$

$$C' = 3C, \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C'}$$

$$\text{Warunek początkowy: } y(t_0) = y_0 \Rightarrow \frac{y_0^3}{3} = \frac{t_0^2}{2} + \frac{C'}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) + y_0^3}$$

Z nieskończonej liczby rozwiązań z parametrem C warunek początkowy wybiera jedno!

Rozwiązanie równania populacji ($\lambda = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{x}{x-1} \right| = \exp(t + C) \Rightarrow$$

$$\left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \exp(-C) \exp(-t) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = C' \exp(-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 - C' \exp(-t)}$$

$$\text{war. początkowy: } x(t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_0} = C' \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$

$$1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t) \neq 0 \Rightarrow \exp(-t) \neq \frac{x_0}{x_0-1} \Rightarrow t \neq -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right), x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(w $t = -\ln \left(\frac{x_0}{x_0-1} \right)$ osobliwość)

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

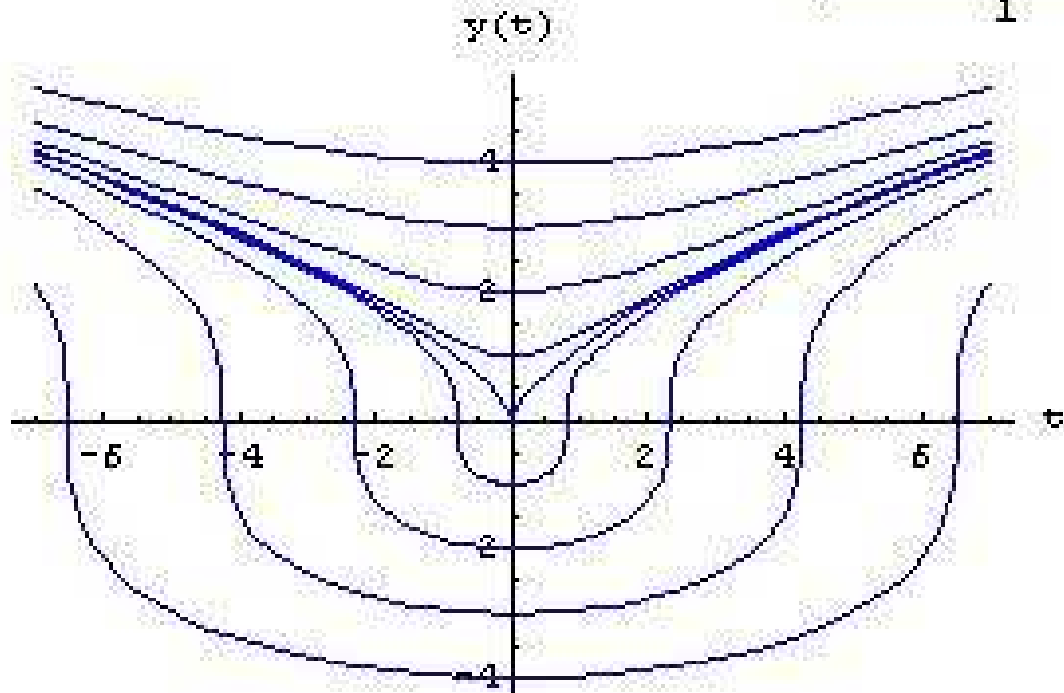
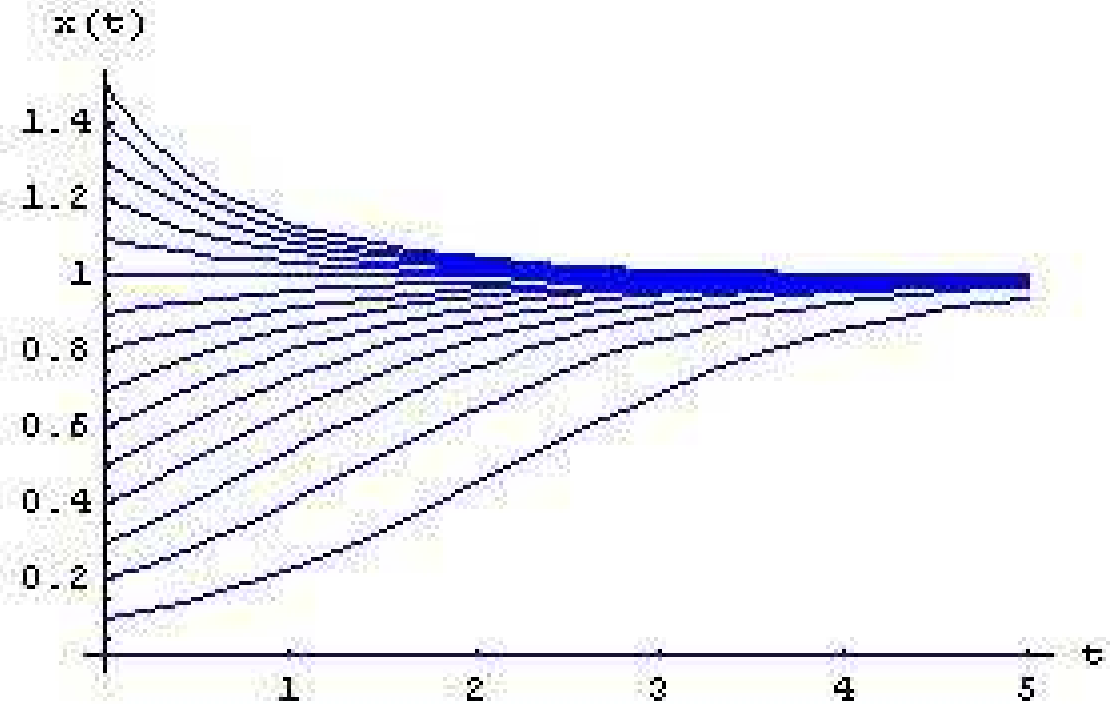
$$\forall x_0 \neq 0: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

Jednoparametrowe rodziny krzywych

R. populacji

$$\dot{x} = x(1-x)$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp(-t)}$$



$$y^2 \dot{y} = t$$

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + y_0^3}$$

Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$u = ax + by + c$$

$$u' = a + by' = a + bf(u)$$

$$\frac{u'}{a + bf(u)} = 1$$

R. jednorodne w x i y :

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u(x) = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}, \quad f(u) \neq u, \quad x \neq 0$$