

[wersja z 15 III 2007]

Analiza Matematyczna

część 3



Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki
Akademia Świętokrzyska 2006/2007
Wojciech Broniowski

Różniczkowalność

Pochodna funkcji jednej zmiennej

Pochodna $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Δx – przyrost argumentu funkcji

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – przyrost wartości funkcji

Inna notacja: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$

$df(x_0)$ – różniczka f odpowiadająca przyrostowi argumentu dx

Funkcja $o(x)$ jest małą wyższego rzędu niż x w sąsiedztwie $x = 0$

jeżeli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

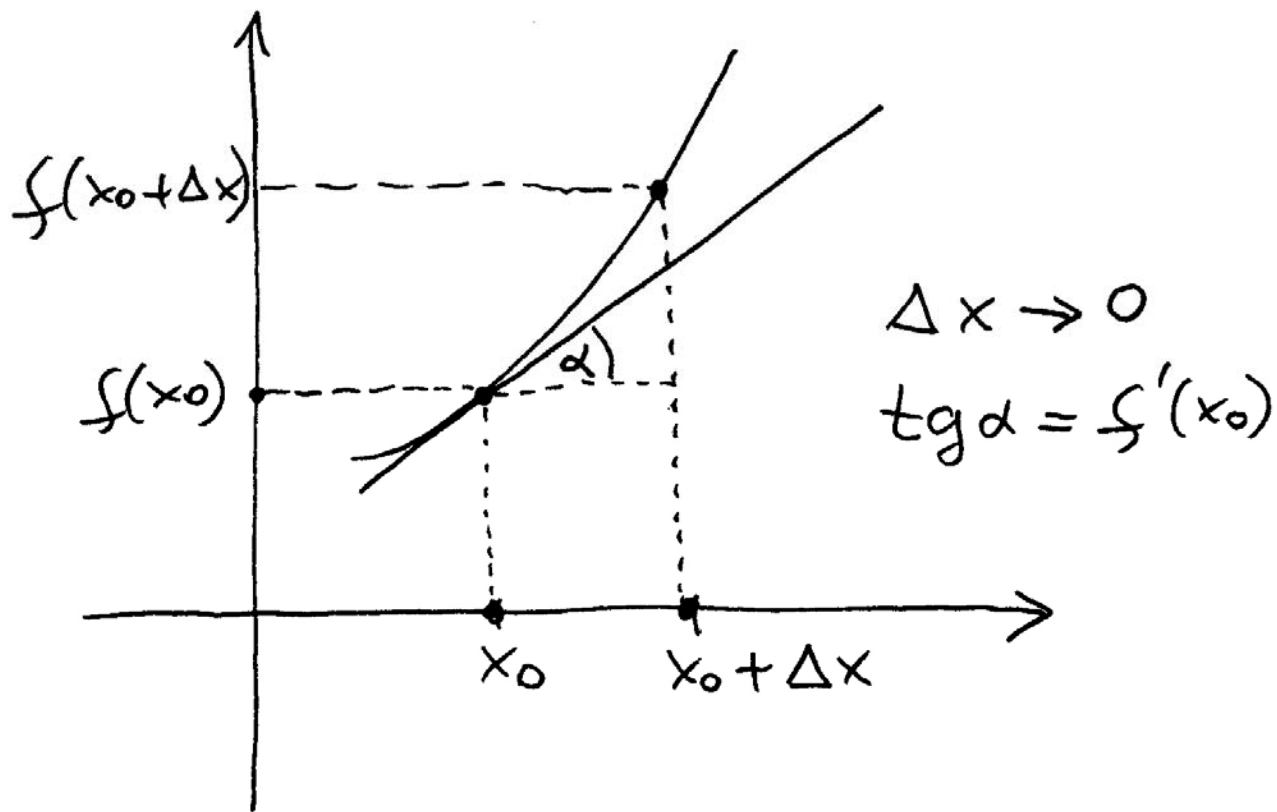
Tw. f różniczkowalna w x_0 jest ciągła w x_0

$$D: f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = f(x_0)$$

$\sqrt[3]{x}$, $|x|$ – ciągłe w $x = 0$, a nie różniczkowalne

Interpretacja
geometryczna
pochodnej –
styczna w punkcie
 x_0 ma nachylenie α



o małe, O duże, ...

$$[f(x) > 0, g(x) > 0]$$

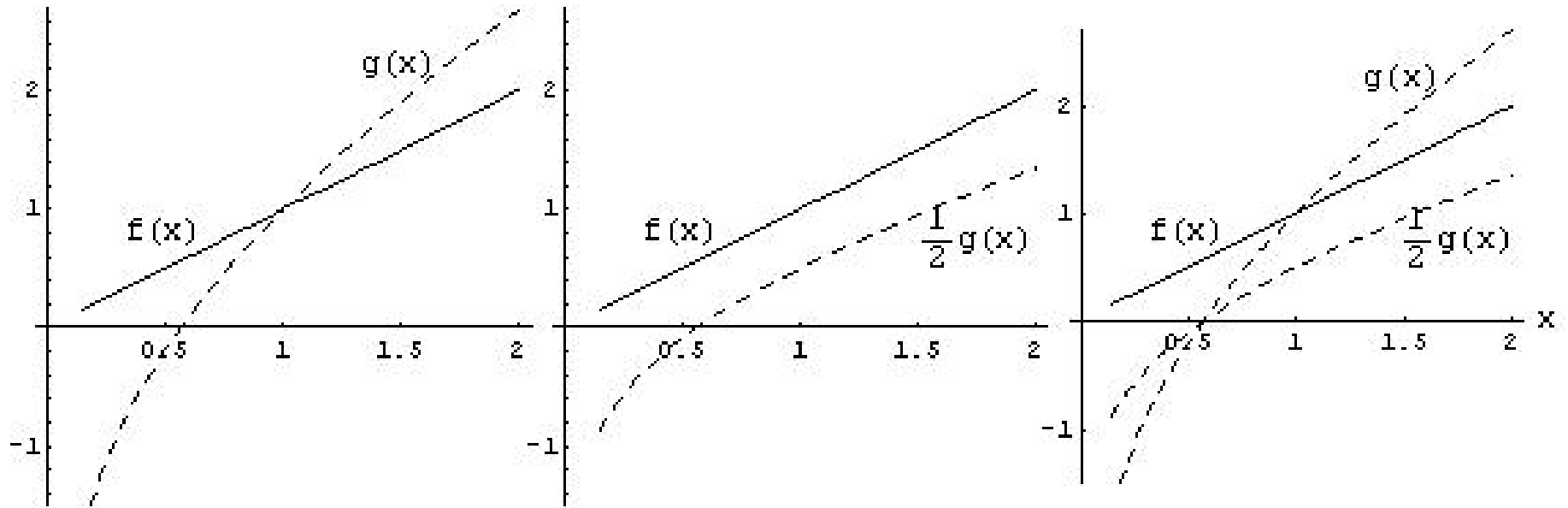
$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 : Cg(x) \geq f(x)$$

$$f(x) = \Omega(g(x)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 : f(x) \geq cg(x)$$

$$f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists C > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 : Cg(x) \geq f(x) \geq cg(x)$$

$$f(x) = o(g(x)) \text{ w otoczeniu } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ w otoczeniu } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad (c > 0, \text{ u niektórych } c = 1)$$



$$f(x) = O(g(x))$$

$$f(x) = \Omega(g(x))$$

$$f(x) = \Theta(g(x))$$

$$\left[C = 1, c = \frac{1}{2} \right]$$

Obliczanie pochodnych

$$(cf)'(x) = cf'(x), \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f / g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$f(x)$	a	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	a^x	$\log_a x$
$f'(x)$	0	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$	x^α
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Wyprowadzenia:

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$(\sin x_0)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

$$(\cos x_0)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = -\sin x_0$$

$$(\ln x_0)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x_0}} =$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x_0}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

$$(\log_a x_0)' = \left(\frac{\ln x_0}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

$$(a^{x_0})' = \frac{1}{(\log_a y_0)'} = \frac{1}{\frac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a$$

$$(e^{x_0})' = e^{x_0}$$

$$(\arcsin x_0)' = \frac{1}{(\sin y_0)'} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}, \quad y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\arccos x_0)' = \frac{1}{(\cos y_0)'} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x_0)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y_0)'} = \cos^2 y_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1 + x_0^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x_0)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y_0)'} = -\sin^2 y_0 = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y_0} = -\frac{1}{1 + x_0^2}$$

$$(x_0^a)' = (e^{a \ln x_0})' = e^{a \ln x_0} (a \ln x_0)' = x_0^a a \frac{1}{x_0} = ax_0^{a-1}$$

Przykłady:

Od wewnątrz do zewnątrz

$$\left(\sin(\operatorname{tg}(x_0^2))\right)' = 2x_0 \frac{1}{\cos^2 x_0^2} \cos(\operatorname{tg}(x_0^2))$$

Od zewnątrz do wewnątrz

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$x^2 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow 2x = 2yy' + 2y' \Rightarrow y' = \frac{x}{y + 1}$$

Różniczkowanie po obu stronach

Styczna do krzywej

$$x^2 + y^2 = 1, \quad A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + b$$

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Znajdź styczną do okręgu w pkt. A

Różniczkowanie po obu stronach

Wartość pochodnej

Równanie stycznej z parametrem b

Wyznaczenie b – pkt. A należy do stycznej

Równanie stycznej

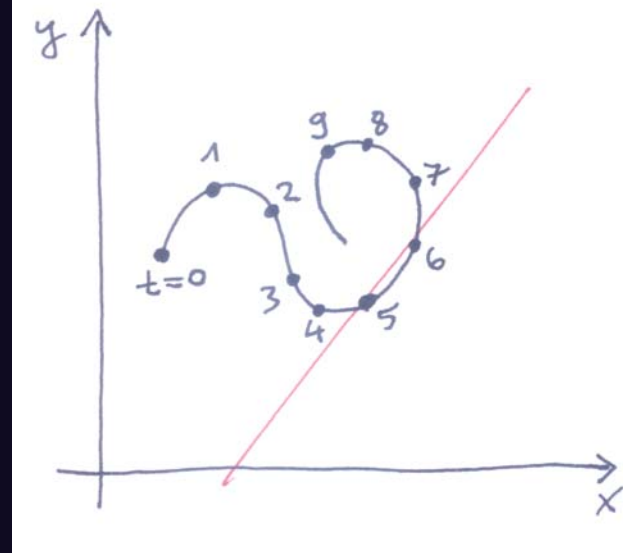
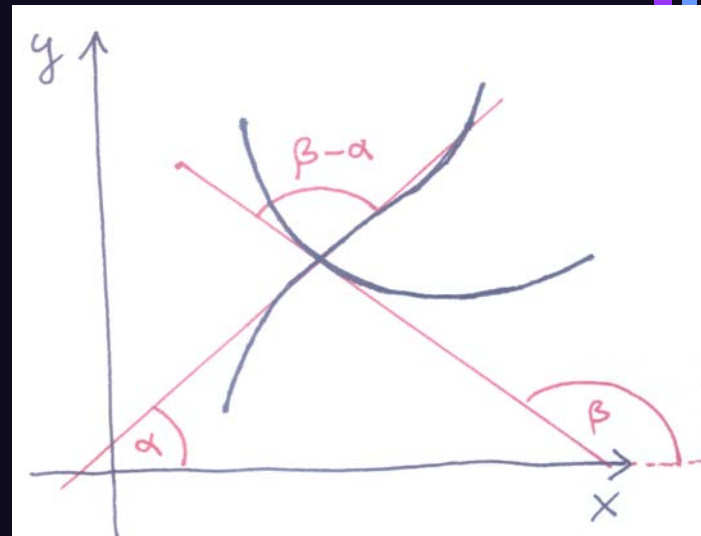
Kąt przecięcia krzywych

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0)f'(x_0)} \end{aligned}$$

Krzywa parametryczna

$x(t)$, $y(t)$ – współrzędne zależne od czasu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y(t(x)) = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$



Funkcja pochodna

$$f : (a, b) \rightarrow R$$

$$f' : (a, b) \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f'(x)$$

Funkcja pochodna przyporządkowuje punktowi z przedziału otwartego (a, b) wartość pochodnej funkcji w tym punkcie

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{dla } x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = 0, \quad \text{dla } x = 0$$

Pochodna istnieje, ale jest nieciągła w $x = 0$

Funkcje klasy C^n na przedziale $[a,b]$ mają n-tą pochodną ciągłą.

$C^0, C^1, C^2, \dots, C^\infty$

Pochodne wyższych rzędów

Jeśli funkcja f' jest różniczkowalna, to możemy zdefiniować jej pochodną, itd.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

funkcje klasy C^n - n-ta pochodna ciągła

C^∞ - ma wszystkie pochodne

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$(e^x)^{(k)} = e^x$$

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$(w_n(x))^{(n)} = n! a_n$$

$$(x^4)^{(4)} = (4x^3)^{(3)} = (4 \cdot 3x^2)^{(2)} = (4 \cdot 3 \cdot 2x)' = 4!$$

Wzór Leibniza

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$(fg)^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + \\ + 3f(x)^{(1)}g^{(2)}(x) + f(x)^{(0)}g^{(3)}(x)$$

...

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$(e^x x^2)^{(n)} = \binom{n}{0} e^x x^2 + \binom{n}{1} e^x 2x + \binom{n}{2} e^x 2 = \\ = e^x x^2 + 2ne^x x + n(n-1)e^x$$

Tw. o ekstremach

Jeżeli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $c \in (a, b)$
i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$

D (maksimum):

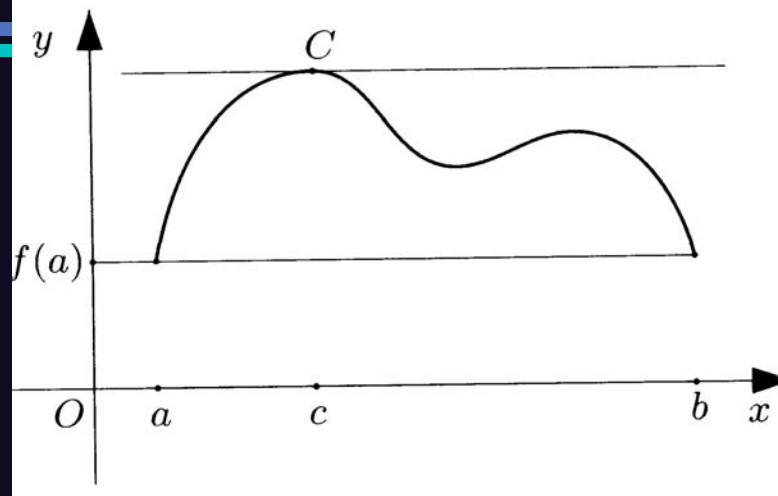
$$\exists \delta > 0 : x \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ dla } x < c \Rightarrow f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$\text{podobnie } f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Ponieważ $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$, $f'(c) = 0$.

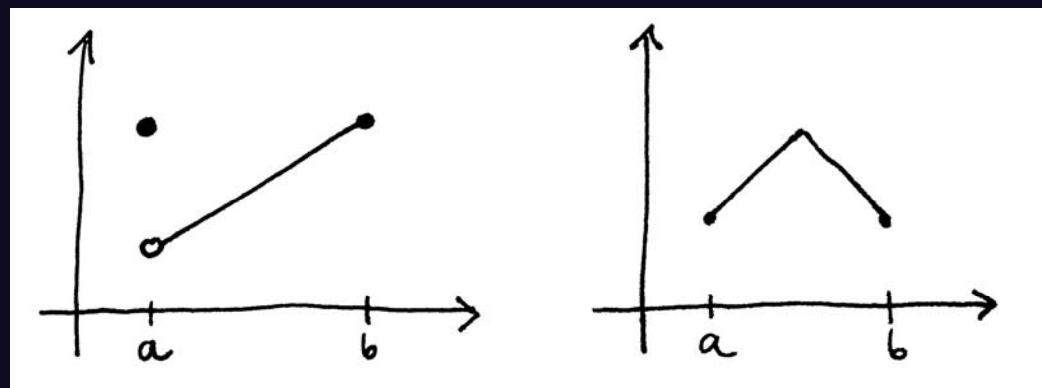
Tw. Rolle'a



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna w (a, b) oraz $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

D: Jeżeli $f = \text{const.}$ to $f'(c) = 0$. W przeciwnym razie

$\exists c \in (a, b)$ dla którego f osiąga ekstremum lokalne $\Rightarrow f'(c) = 0$



Kontrprzykłady:
funkcja nieciągła i
nieróżniczkowalna

Tw. Cauchy'ego

$f, g \in C^0 : [a, b] \rightarrow R$, różniczkowalne w $(a, b) \Rightarrow$

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

D: $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) + \text{tw. Rolle'a}$

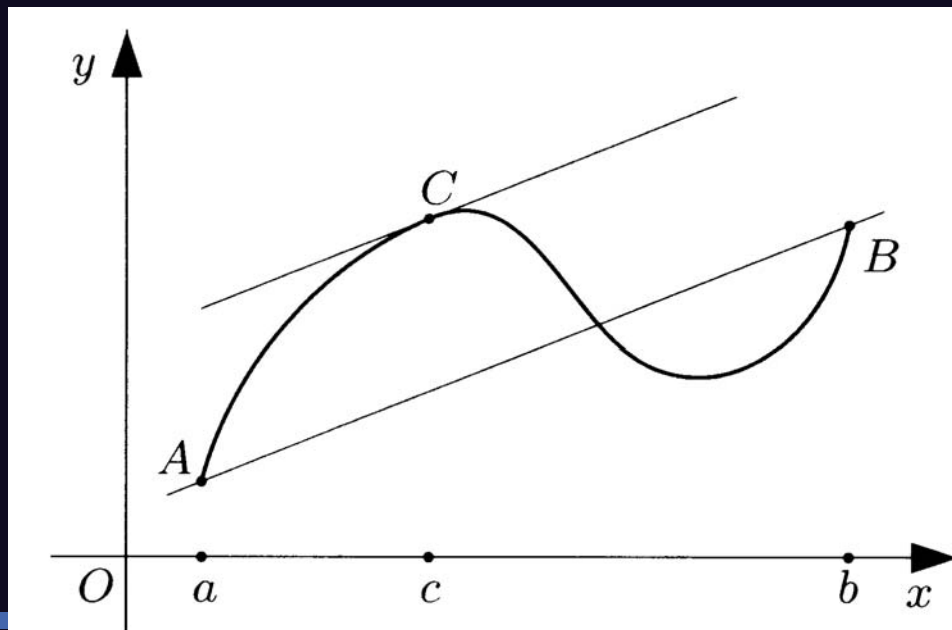
Tw. Lagrange'a

$f \in C^0 : [a, b] \rightarrow R$, różniczkowalna w $(a, b) \Rightarrow$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D: tw. Cauchy'ego z $g(x) = x$

(prędkość średnia
i chwilowa)



Przykład (tw. Lagrange'a):

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{b - a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}$$

Tw. Taylora

$f \in C^{n-1} : [x_0, x_0 + h] \rightarrow R$, n -krotnie różniczkowalna w $(x_0, x_0 + h)$

$$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x_0 + h) : f(x_0 + h) = S_n(h) + R_n(h)$$

$$S_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1}$$

$$R_n(h) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \text{ (reszta w postaci Lagrange'a)}$$

$$D: x_1 = x_0 + h, k(x) = (x - x_1)^n$$

$$g(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{f'(x)(x_1 - x)}{1!} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\text{Z tw. Cauchy'ego: } \exists c \in (x_0, x_1) : \frac{g(x_1) - g(x_0)}{k(x_1) - k(x_0)} = \frac{g'(c)}{k'(c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_n(h) - f(x_1)}{-(-h)^n} = -\frac{f^{(n)}(x_1 - c)^{n-1}}{n!(c - x_1)^{n-1}} = (-1)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = S_n(h) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n$$

Znaczenie tw. Taylora: dość łatwe przybliżanie funkcji n-krotnie różniczkowalnych wielomianem stopnia n-1. Dla „regularnych” funkcji reszta jest mała i metoda jest tym dokładniejsza, im większe jest n.

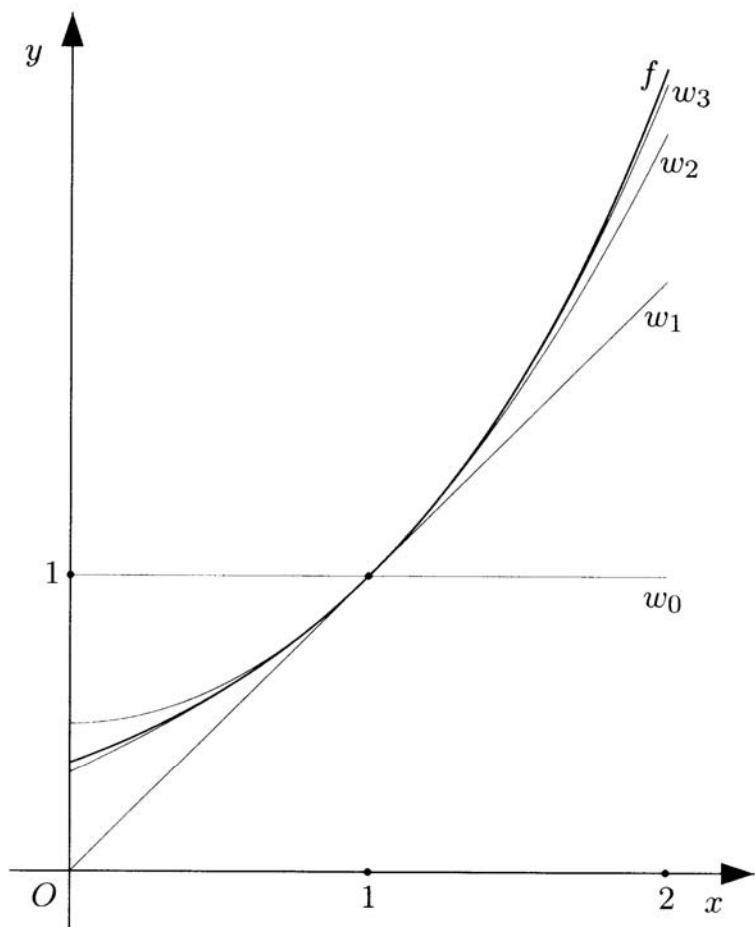
$$w_0(x) = 1,$$

$$w_1(x) = 1 + (x - 1),$$

$$w_2(x) = 1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2},$$

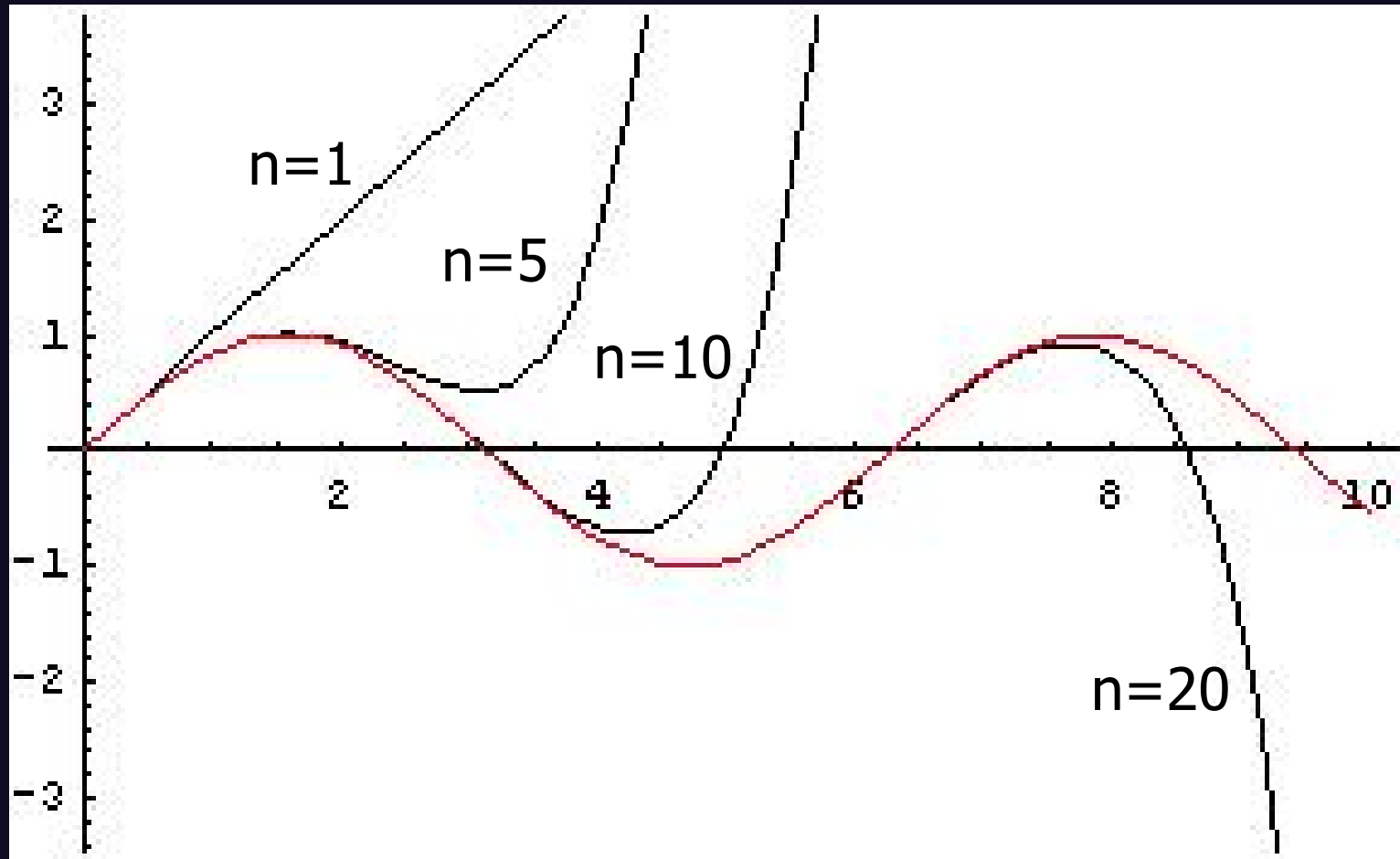
$$w_3(x) = 1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{6},$$

.....



(RR) Przybliżanie funkcji $\exp(x-1)$ z pomocą wzoru Taylora dla kolejnych n

$$f(x) = \sin(x)$$



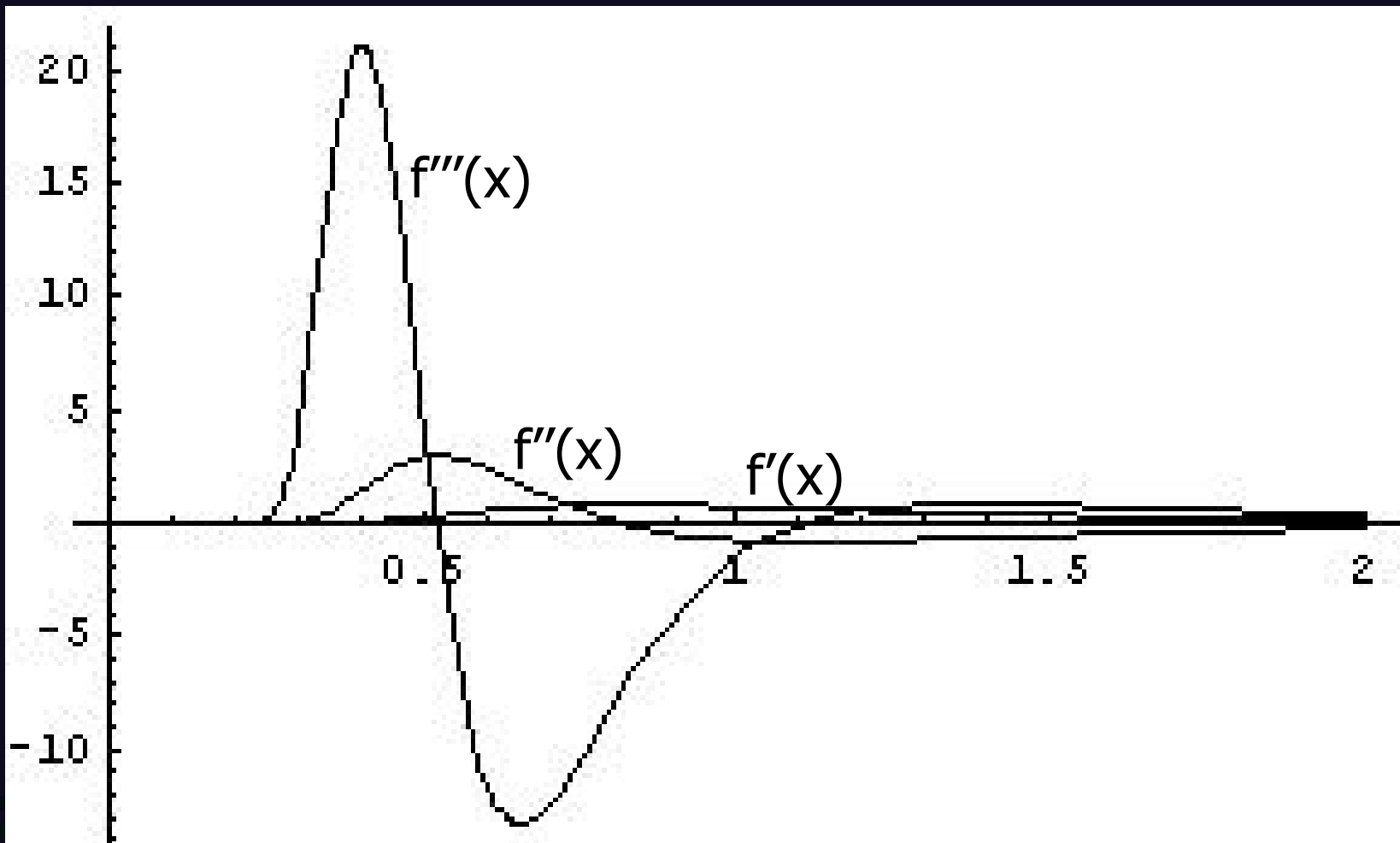
Szereg (rozwiniecie) Taylora

$f \in C^\infty : [x_0, x_0 + h] \rightarrow R$. Jeżeli ciąg funkcji $r_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$ jest zbieżny jednostajnie do 0 na przedziale $[x_0, x_0 + h]$, to

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ jest zbieżny jednostajnie do } f.$$

Tw: Jeżeli funkcja ma na danym przedziale wszystkie pochodne ograniczone, $|f^{(n)}(x)| \leq M$, to ma w tym przedziale rozwinięcie Taylora.

Przykład funkcji mającej wszystkie pochodne i nie posiadającej rozwinięcia Taylora wokół $x=0$: $\exp(-1/x^2)$. Pochodne nie są ograniczone! Wszystkie pochodne w $x=0$ znikają.



$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Funkcje hiperboliczne

$$\cosh x = \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(krzywa łańcuchowa)

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z,$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

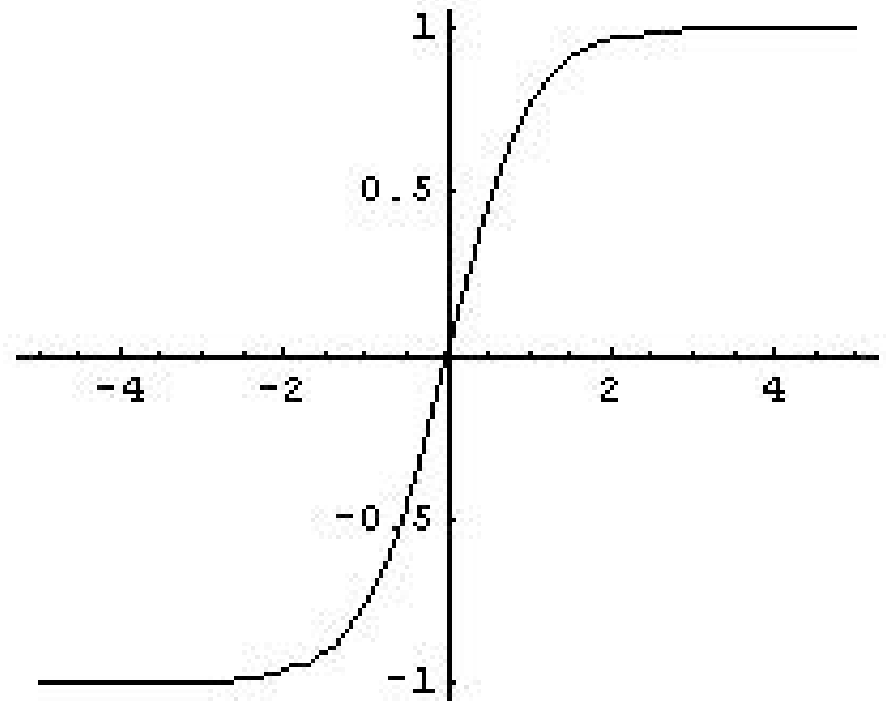
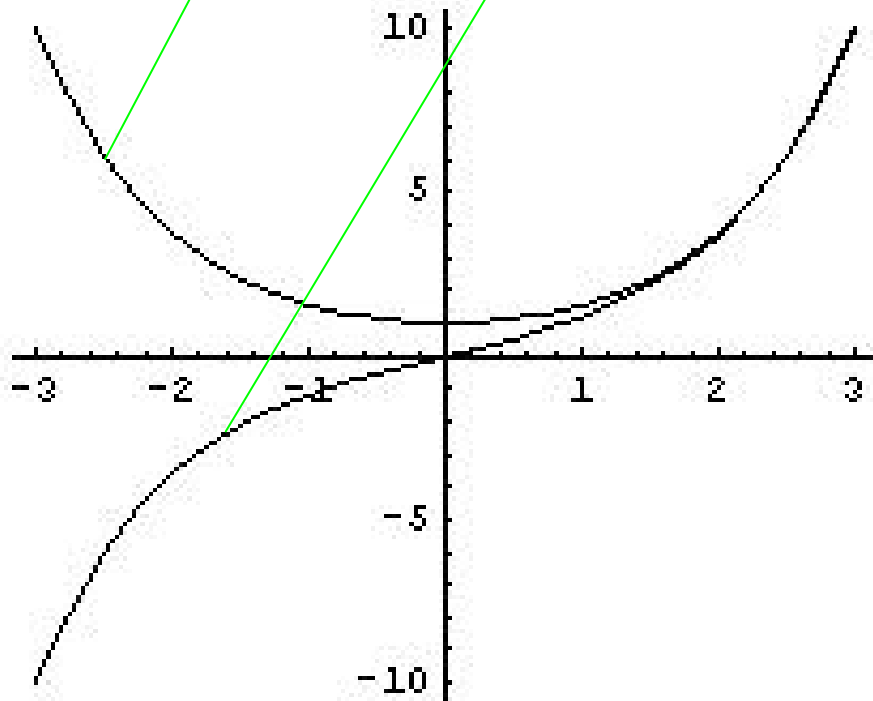
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z,$$

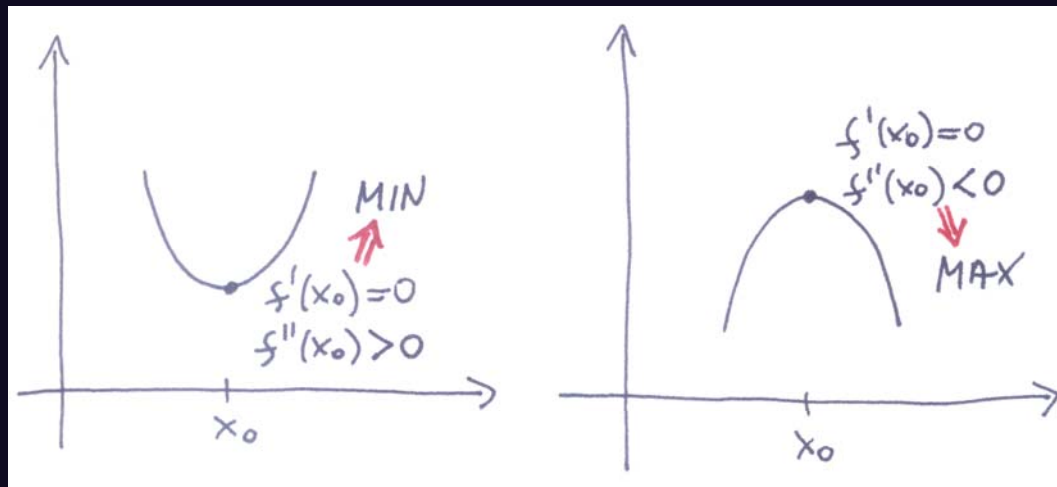
cosh

sinh

$\tanh = \sinh / \cosh$



Tw. o ekstremach



silne maksimum lokalne w $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

silne minimum lokalne w $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Tw. $f'(x_0) = 0$, f'' ciągła w x_0 . $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ (silne) maksimum
 $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ (silne) minimum

D: Z tw. Taylora dla $n=2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_0)^2$$

$f'(x_0) = 0$, z ciągłości $\exists r > 0 : x \in K(x_0, r) \Rightarrow f''(x_1)$ jest tego samego znaku, co $f''(x_0)$, skąd wynika teza.

Przykład:

$$f(x) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 = 3x\left(\frac{2}{3} - x\right)$$

$$f''(x) = 2 - 6x$$

$$f''(0) = 2 \text{ (minimum)}$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -2 \text{ (maksimum)}$$

Tw. f różniczkowalna w (a, b)

$f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ (silnie) rosnąca

$f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ (silnie) malejąca

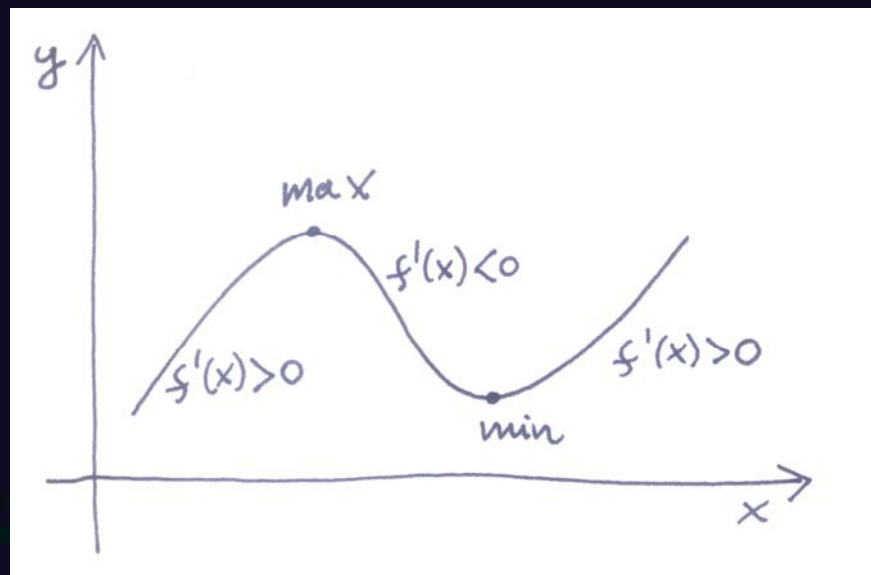
D: $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

Z tw. Lagrange'a $\exists c \in (a, b) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \therefore$

Tw. f różniczkowalna w $(a, b), x_0 \in (a, b)$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (a, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, b) \Rightarrow$ (silne) maksimum w x_0

$f'(x) < 0$ dla $x \in (a, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, b) \Rightarrow$ (silne) minimum w x_0



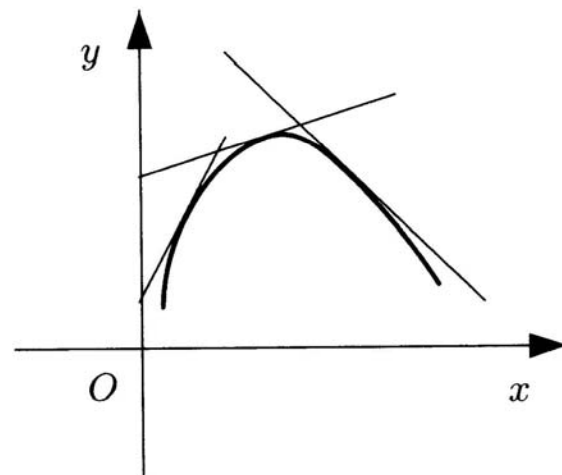
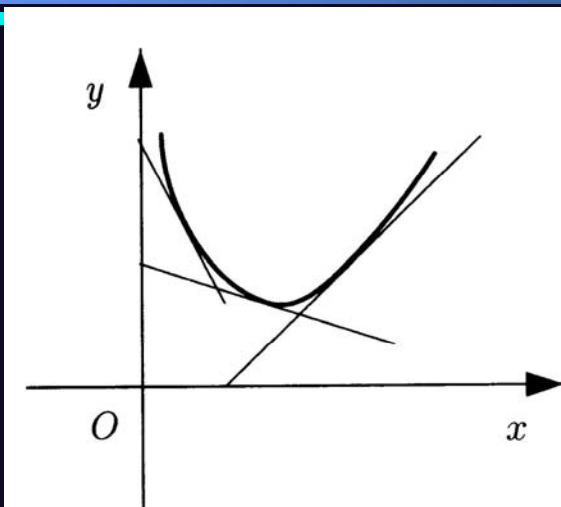
$$f(x) = x^6 + 1$$

$$f'(x) = 6x^5, x_0 = 0$$

$$f''(x) = 30x^4, f''(x_0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{min w } x_0$$

Wypukłość



Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \rightarrow R$ jest wypukła (wklęsła), jeżeli

$$\forall y \in (a, b) \forall x \in (a, b), x \neq y : f(x) > (<) f(y) + f'(y)(x - y)$$

- nad (pod) styczną

Tw. Funkcja dwukrotnie różniczkowalna w (a, b) jest wypukła w tym przedziale, jeżeli $f''(x) > 0$, a wklęsła jeżeli $f''(x) < 0$.

D: Z tw. Taylora dla $n=2$.

Jeżeli dla $x < x_0$ wypukła, a dla $x > x_0$ wklęsła (lub na odwrót), to x_0 nazywamy **punktem przegięcia**.

Reguła de L'Hospitala

f, g - różniczkowalne na (a, b) , $g'(x) \neq 0$, 1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$,

$$\exists r \in \{R, \infty, -\infty\} : \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = r$$

D: Uzupełnijmy $f(a) = g(a) = 0$. Wtedy z tw. Cauchy'ego $\exists c \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \text{ Gdy } x \rightarrow a^+ \text{ również } c \rightarrow a^+, \text{ zatem}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = r \quad \therefore$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \exists r \in \{R, \infty, -\infty\} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r$$

$$D: \phi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \gamma(x) = g\left(\frac{1}{x}\right), y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{g(y)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(x)}{\gamma'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} \therefore \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty, \exists r \in \{R, \infty, -\infty\} : \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = r$$

$$D: \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \therefore$$

$$4) 0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$5) \infty - \infty = \frac{0}{0}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

$$6) 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{tg} x}{2 - x \operatorname{tg} x} = 0$$

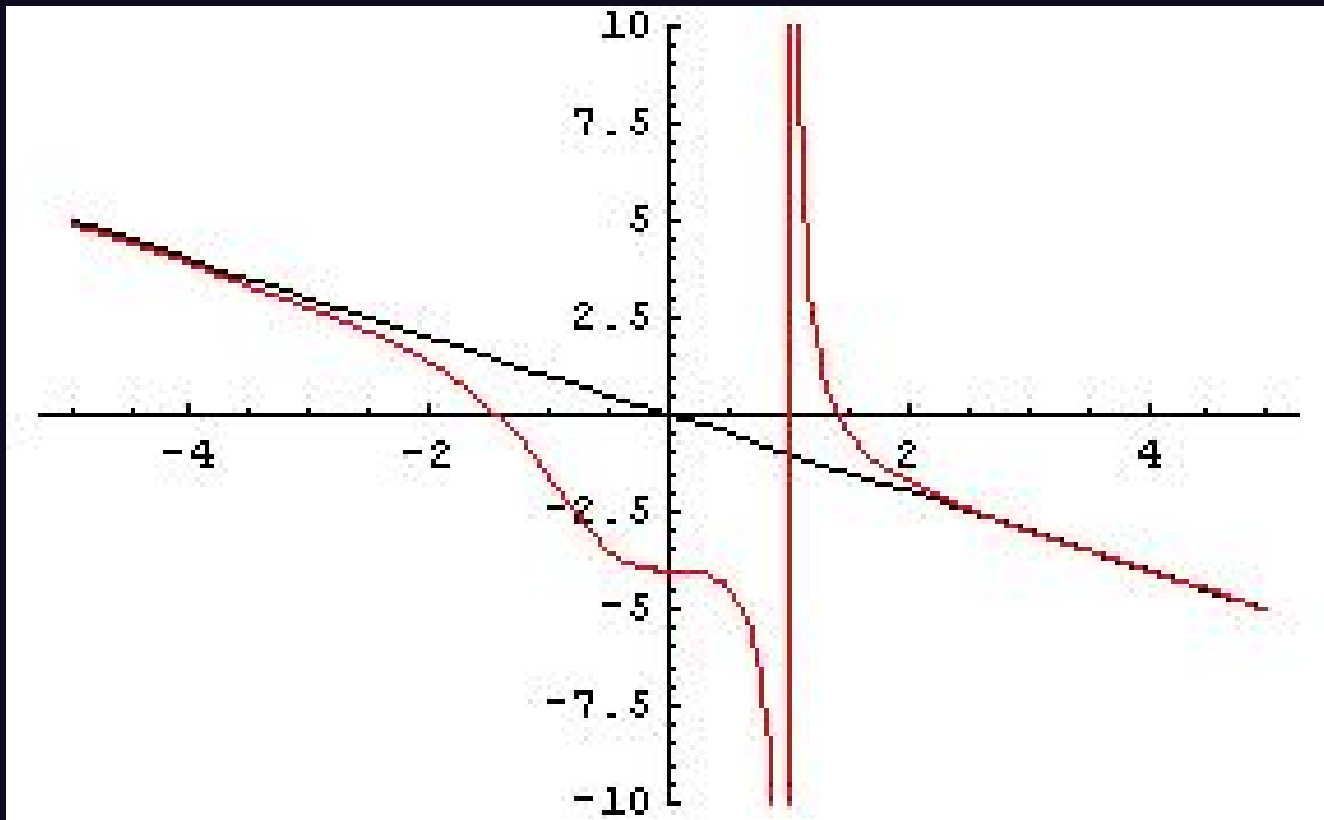
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Badanie funkcji

- 0) Dziedzina
- 1) Miejsca zerowe
- 2) Parzystość, nieparzystość, okresowość
- 3) Ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na krańcach przedziałów określoności
- 4) Asymptoty
- 5) Różniczkowalność
- 6) Monotoniczność i ekstrema
- 7) Druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia
- 8) Tabela przebiegu funkcji
- 9) Szkic wykresu
- 10) Przeciwdziedzina

(kolejność dowolna!)

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{1 - x^3}$$



Całkowanie

Całka nieoznaczona (funkcja pierwotna)

$f : (a, b) \rightarrow R$, F – różniczkowalna w (a, b) . Jeżeli

$F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a, b)$, to F jest funkcją pierwotną funkcji f .

Funkcja pierwotna określona jest z dokładnością do stałej, tzn. jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną, to $F(x)+C$ jest również funkcją pierwotną, ponieważ $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Całkowanie: operacja odwrotna do różniczkowania

$f(x)$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	x^{-1}	a^x	$\sin x$	$\cos x$
$\int f(x) dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln x $	$\frac{a^x}{\ln a}$	$-\cos x$	$\sin x$

$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int f(x) dx$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcsin} x$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))dx &= \\ &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \text{ bo } (\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} |x|' = \frac{1}{|x|} \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int dx \frac{x^3 + x + 2}{x^2} = \int dx \left(x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

$$\int dx \sqrt[n]{x} = \int dx x^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} + C = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$$

Całkowanie przez części

Wyprowadzenie:

$$\int (fg)'(x)dx = f(x)g(x) \Rightarrow \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)$$
$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$f(x) = x, \quad g(x) = \ln|x|$$

$$\int \ln|x|dx = \int x' \ln|x|dx = x \ln|x| - \int x(\ln|x|)'dx =$$
$$= x \ln|x| - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln|x| - \int 1 \cdot dx = x \ln|x| - x + C$$

$$\int dx x \cos x = \int dx x(\sin x)' = x \sin x - \int dx \sin x = x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{Sprawdzenie: } (x \sin x + \cos x + C)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

Całkowanie przez podstawienie

$f : (a, b) \rightarrow R$, $g : (s, t) \rightarrow (a, b)$ różniczkowalna, F - pierwotna dla f
 $\Rightarrow F \circ g$ jest pierwotna dla $f(g(x))g'(x)$, tj.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy = F(g(x)), \quad y = g(x)$$

D: Z tw. o pochodnej funkcji złożonej

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \therefore$$

$$I = \int dx \frac{1}{3x+2}, \quad f(y) = \frac{1}{y}, \quad y = g(x) = 3x+2, \quad g'(x) = 3$$

$$I = \frac{1}{3} \int dx \frac{3}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{3} \int dy \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \ln|y| + C = \ln|3x+2| + C$$

Prostszy zapis: $\int dy f(y) = \int dx \frac{dy}{dx} f(y(x))$

bo $dy = \frac{dy}{dx} dx$, lub $dg(x) = \frac{dg(x)}{dx} dx$

$$I = \int dx \frac{x}{4x^2 + 2}, \quad y = 4x^2 + 2, \quad dy = 8x dx \Rightarrow x dx = \frac{dy}{8}$$

$$I = \int \frac{dy}{8} \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \ln|y| + C = \frac{1}{8} \ln|4x^2 + 2| + C$$

$$I = \int dx (1 + x^2)^{\frac{1}{3}} x, \quad y = 1 + x^2, \quad dy = 2x dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{3}{8} y^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1 + x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

Tw. $\int dx \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$$\int dx \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \ln|\sin(x)|$$

Wzory rekurencyjne

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad I_0 = x$$

$$J_n = \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad J_0 = x$$

$$K_n = \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad K_0 = x$$

(użyteczne w wielu obliczeniach)

Całkowanie funkcji wymiernych

Ułamki proste $\frac{A}{(x-a)^n}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} A \ln |x-a|, & n=1 \\ \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}, & n>1 \end{cases}$$

$$\int dx \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} = \frac{B}{2} \int dx \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(C - \frac{Bp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$1. \int dx \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dy}{y^n}, \quad y = x^2+px+q, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0$$

$$2. x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}(t^2+1), \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}t, \quad dx = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}dt$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \left(-\frac{\Delta}{4} \right)^{1/2-n} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Funkcja wymierna ma postać $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami.

Jeżeli stopień P jest wyższy lub równy stopniowi Q , to wykonujemy dzielenie, otrzymując $P(x) = W(x)Q(x) + R(x)$, gdzie stopień R jest niższy od Q . Mamy

$$f(x) = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Wielomian $W(x)$ całkujemy trywialnie. $Q(x)$ ma rozkład

$Q(x) = c(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{l_n}$, natomiast dla części niewymiernej mamy następujący rozkład na ułamki proste:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{i,k}}{(x - a_i)^k} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_j} \frac{B_{j,l}x + C_{j,l}}{(x^2 + p_jx + q_j)^l},$$

co całkujemy z pomocą wcześniejszych wzorów.

Metoda 1: Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika i porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach x , co daje układ równań liniowych na $A_{i,k}$, $B_{j,l}$, $C_{j,l}$.

Metoda 2 (prostsza): $f(x) = \frac{A}{(x-a)^s} + r(x)$, gdzie mianownik $r(x)$ zawiera $(x-a)$

w potęgę co najwyżej $s-1$. Wtedy $f(x)(x-a)^s \Big|_{x=a} = A + r(x)(x-a)^s \Big|_{x=a} = A$.

Ogólnie $A_{i,m} = [f(x)(x-a_i)^{k_i}]^{(k_i-m)} / (k_i-m)!$, $m = 1, \dots, k_i$

Dla przypadku $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l} + r(x)$ rozkładamy $x^2+px+q = (x-z)(x-\bar{z})$

gdzie $z = \frac{-p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, a wtedy

$$f(x)(x^2+px+q) \Big|_{x=z} = Bz+C, \quad f(x)(x^2+px+q) \Big|_{x=\bar{z}} = B\bar{z}+C,$$

skąd wyznaczamy B i C .

Metoda 3: Symboliczne manipulacje z pomocą komputera

(Mathematica, Maple, MatLab, Form,...)

Całkowanie funkcji niewymiernych

$R(x, y)$ – funkcja wymierna dwóch zmiennych

(iloraz wielomianów dwóch zmiennych)

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad \neq bc, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a>0, \quad (t-x)\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$

$a<0, \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)t - \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{ax^2+bx+c}$

$\sqrt{x^2-a^2}, \quad x = a \cosh t, \quad \sqrt{x^2+a^2}, \quad x = a \sinh t$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1}{2}(1+t^2)$

a) $R(u, v) = -R(-u, v), \quad t = \cos x$
b) $R(u, v) = -R(u, -v), \quad t = \sin x$
c) $R(u, v) = R(-u, -v), \quad t = \operatorname{tg} x$ } – prostsze podstawienia

podstawienia

Eulera

Całka oznaczona Riemanna

$$f : [a, b] \rightarrow R,$$

$$m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\},$$

$$M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$$

Dzielimy $[a, b]$ na n części:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Pi = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\delta = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i - \text{srednica podzialu } \Pi$$

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$s = \sum_{i=1}^n \Delta x_i m_i - \text{suma dolna,}$$

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta x_i M_i - \text{suma górna}$$

Z konstrukcji $m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$

Rozważamy normalny ciąg podziałów (Π_n) , tj. taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

s_n i S_n oznaczają sumę dolną i górną dla podziału Π_n .

Tw. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – ograniczona \Rightarrow dla dowolnego normalnego ciągu (Π_n) istnieją granice $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, oraz nie zależą od wyboru podziałów.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b f(x) dx \text{ – całka dolna, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx \text{ – całka górna}$$

Funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna jeżeli całka górna równa się dolnej.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ – całka oznaczona (Riemanna)}$$

Tw. Funkcja **ciągła** w $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna

Tw. Funkcja **monotoniczna** w $[a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna

$$\int_a^b (f + g)(x) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x), \quad \int_a^b cf(x) = c \int_a^b f(x)$$

f, g – całkowalne \Rightarrow iloczyn fg – całkowalny

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x), \quad \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x), \quad \int_a^a f(x) = 0$$

$$f(x) \leq g(x), x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

$$\left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|$$

Tw. f i g - ciągłe w $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, $\exists x_0 : f(x_0) < g(x_0)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

Tw. f - całkowalna w sensie Riemanna w $[a, b]$, $x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F \text{ - ciągła, oraz } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

dla x , w których f jest ciągła.

Tw. (podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)

f - ciągła \Rightarrow posiada funkcję pierwotną F , oraz

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{zapis: } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b$$

Tw. (o wartości średniej) f - ciągła w $[a, b]$ $\Rightarrow \exists x_0 : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Zastosowania całek

Geometria: pole figury, objętość bryły, długość krzywej

Miara Jordana (fiz.) zbioru

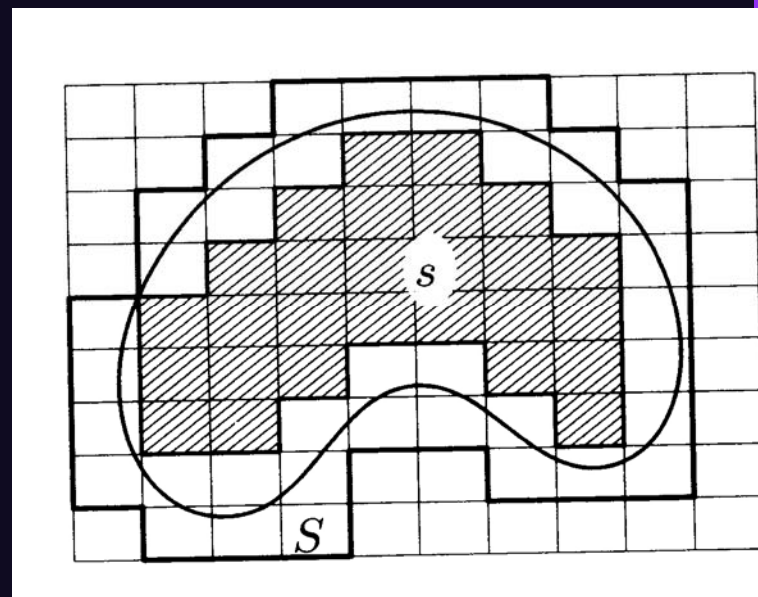
(tu: 2-wymiarowego):

- 1) otaczamy zbiór ograniczony A prostokątem S o bokach a, b
- 2) dzielimy S na n^2 mniejszych prostokątów jak na rysunku (pole każdego prostokąta wynosi ab/n^2)
- 3) zliczamy wszystkie prostokąty zawarte w A i oznaczamy ich pole jako s_n
- 4) zliczamy wszystkie prostokąty, które zawierają jakiś punkt zbioru A i oznaczamy ich pole jako S_n

$$\text{miara dolna: } s^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$$

$$\text{miara górna: } S^* = \inf_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

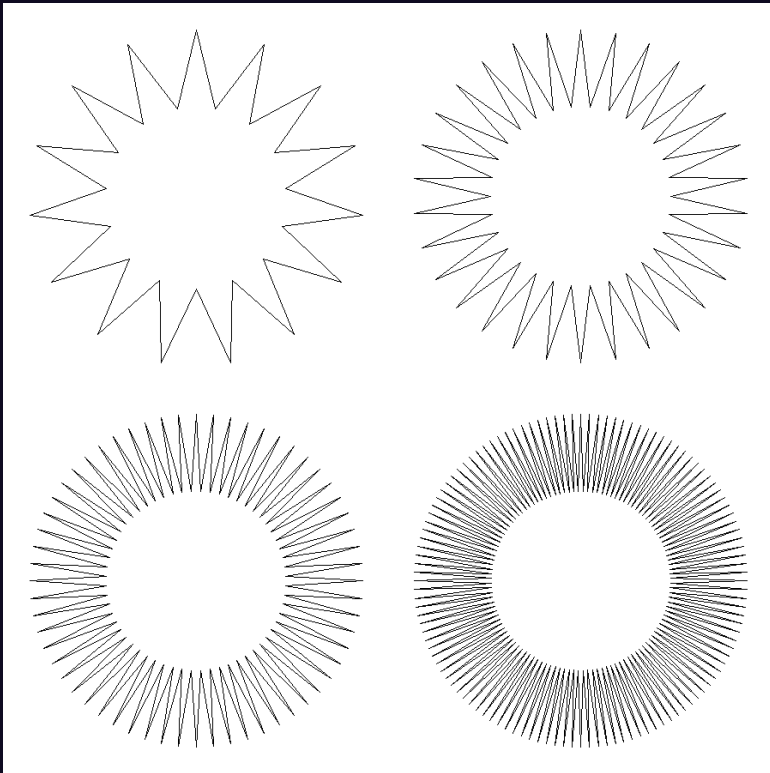
$$s_n \leq S_n \Rightarrow s^* \leq S^*$$



- 6) Jeżeli $s^* = S^* = P$, to A jest **mierzalny w sensie Jordana**, a P nazywamy jego polem

Uwaga: miara Jordana brzegu, $S^* - s^*$, wynosi 0 dla zbioru mierzalnego

Przykłady zbiorów niemierzalnych w sensie Jordana



(przejście graniczne z liczbą
wierzchołków przed pomiarem
w sensie Jordana)

Inne: trójkąt Sierpińskiego,
fraktale

Uwagi:

W trzech wymiarach konstrukcja miary Jordana jest analogiczna – używamy prostopadłościaków. W większej liczbie wymiarów używamy hiperkostek.

W jednym wymiarze (do pomiaru zbioru leżącego na prostej) używamy odcinków.

Przy zmianie skali długości, L , pole zmienia się jak L^2 , objętość jak L^3 , hiperobjętość jak L^d , gdzie d jest liczbą wymiarów przestrzeni

Pole figury płaskiej

Tw. $f : [a, b] \rightarrow R$ ciągła i nieujemna \Rightarrow pole figury utworzonej przez krzywą $y = f(x)$ oraz odcinki AB, AC, BD, gdzie $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (a, f(a))$, $D = (b, f(b))$ wynosi

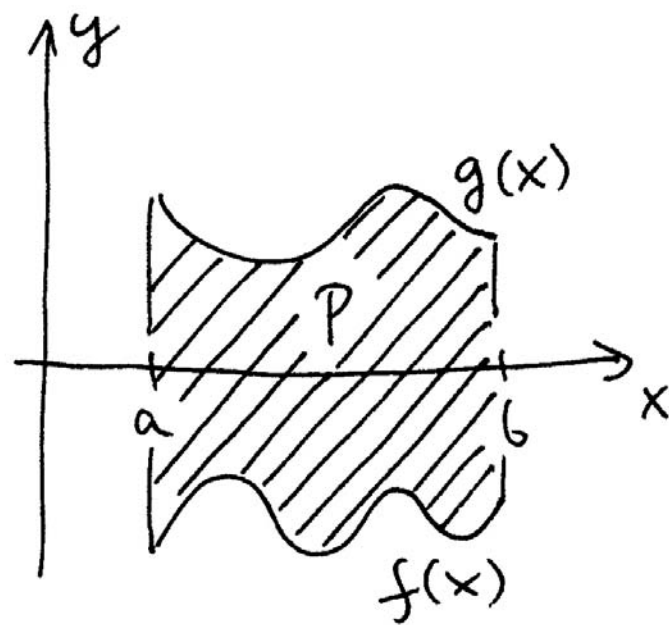
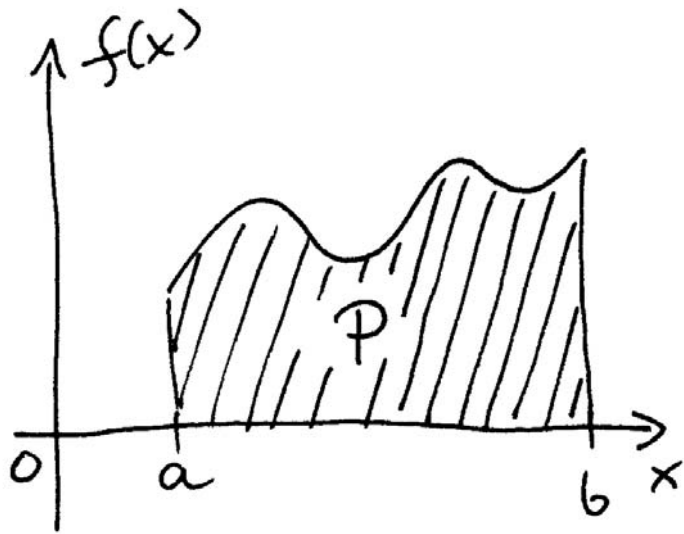
$$P = \int_a^b f(x) dx$$

(mówimy: pole obszaru pod wykresem $f(x)$)

Dowód wynika natychmiast z analogii konstrukcji miary Jordana i całki Riemanna

Tw. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ ciągłe, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow$ pole obszaru między wykresami $y = f(x)$ i $y = g(x)$ wynosi

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



Przykład: pole kola

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$P = \int_{-r}^r (g(x) - f(x)) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$x = r \cos t, dx = -r \sin t dt$$

$$P = -2 \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} r \sin t dt = 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= 2r^2 \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi} = \pi r^2$$

$$\left(\int_a^{a+\pi} \sin^2 t dt = \int_a^{a+\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} \right)$$

[średnia wartość $\sin^2 t$ i $\cos^2 t$ w ich okresie:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{a+\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}]$$

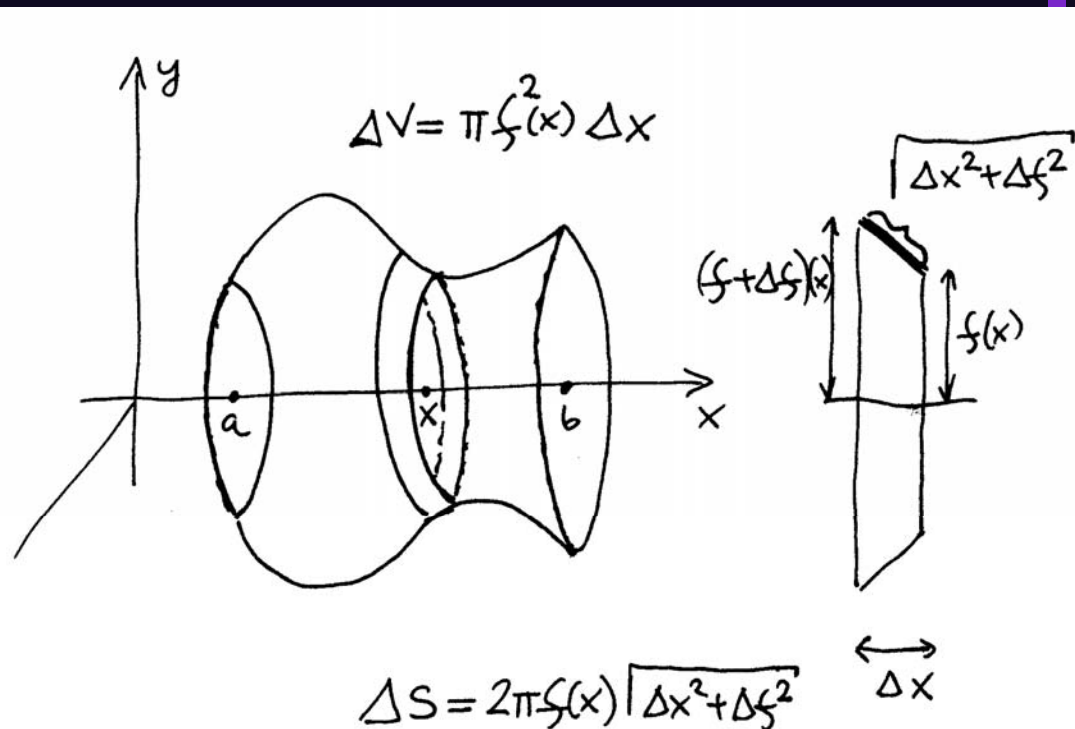
Objętość bryły obrotowej

$$V_n = \sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Przykład: objętość kuli

$$V = \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Pole poboczniczy bryły obrotowej

$$P_n = \sum_{k=1}^n 2\pi f(x) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(x))^2} = \sum_{k=1}^n 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Przykład: pole sfery

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$P = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

Długość krzywej

Krzywa dana jest równaniem parametrycznym

$$x = x(t), y = y(t), t \in (t_0, t_1)$$

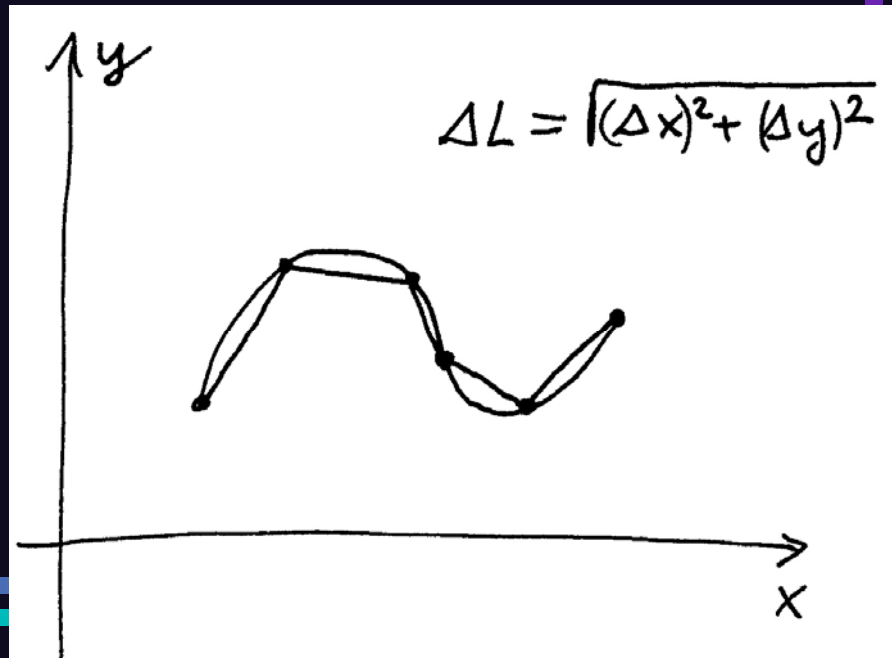
$$L_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_k)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_k)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Przykład: długość okręgu

$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin(t), t_0 = 0, t_1 = 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$



Całki niewłaściwe

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} \vee b = \infty, \quad \beta \in (a, b)$$

$$I_\beta = \int_a^\beta f(x) dx$$

$$\text{Całka prawostronnie niewłaściwa: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} I_\beta$$

Analogicznie definiujemy całkę lewostronnie niewłaściwą:

$$f : (c, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R} \vee c = -\infty, \quad \gamma \in (c, a)$$

$$I_\gamma = \int_\gamma^a f(x) dx, \quad \int_c^a f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow c} I_\gamma$$

$$\text{Całka obustronnie niewłaściwa: } \int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} \Big|_1^{\beta} = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\gamma}^1 = 2 - \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2\sqrt{\gamma}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

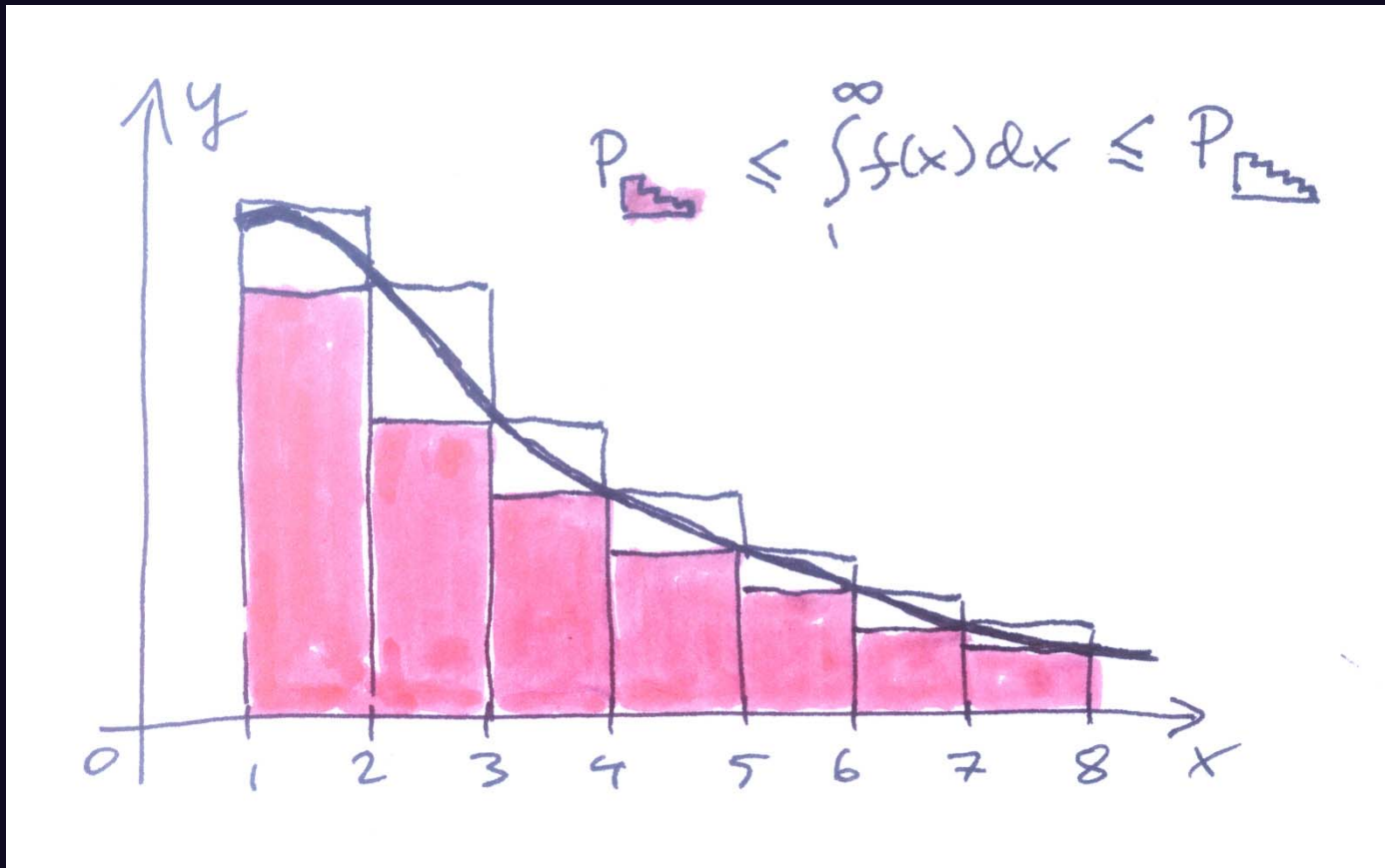
$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\gamma \rightarrow 0} (x \log x - x) \Big|_{\gamma}^1 = -1 - \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\gamma \log \gamma) = -1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_{\alpha}^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{dla } p < 1 \\ \infty & \text{dla } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_1^{\beta} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{dla } p > 1 \\ \infty & \text{dla } p \leq 1 \end{cases}$$

Kryterium całkowe zbieżności szeregu

Podstawowa idea:



Jesli $f : [1, \infty) \rightarrow R$, ciagła, nieujemna, nierosnąca, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ zbieżna}$$

Dowód: Oznaczmy $a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$, wtedy $a_n \leq f(n) \leq a_{n-1}$ oraz (patrz rysunek)

$$a_1 \leq f(1)$$

$$a_1 + a_2 \leq f(1) + f(2) \leq f(1) + a_1$$

...

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n) \leq f(1) + a_1 + \dots + a_{n-1}, \text{ czyli}$$

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

1) Jeżeli istnieje całka, to ciąg sum częściowych jest ograniczony, ponadto jest rosnący, bo $f(k) \geq 0$, a zatem szereg jest zbieżny.

2) W granicy $n \rightarrow \infty$ mamy $\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, zatem jeśli całka jest rozbieżna,

to szereg też jest rozbieżny \square

Wniosek: mamy górne i dolne ograniczenia

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Dla sumowania od $k = m$ mamy

$$\int_m^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k) \leq f(m) + \int_m^{\infty} f(x) dx$$

Przykład: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ ma tę samą własność zbieżności

$$\text{co } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p} = \frac{u^{1-p}}{1-p} \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \begin{cases} \frac{\ln^{1-p} 2}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases} \quad (u = \ln x)$$

Stała Eulera-Mascheroniego

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 0.577215\dots$$

Nie wiadomo, czy jest liczbą wymierną czy niewymierną!

Występuje w wielu całkach i szeregach, np.

$$-\int_0^{\infty} dx e^{-x} \log x = \gamma$$

Granica pod całką

Tw. f_n całkowalne na $[a, b]$, (f_n) zbieżny **jednostajnie** do f .

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_a^b f(x)$ i zbieżność jest **jednostajna** [można zmienić kolejność granicy i całkowania]

Wniosek: Ponieważ szereg jest granicą ciągu sum częściowych,

to jeżeli $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i zbieżność jest jednostajna, to

$$\int_a^b dx s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dx f_n(x) \text{ i zbieżność jest jednostajna}$$

[można całkować wyraz po wyrazie]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \quad \text{zb. jednostajnie w kole zbieżności } |t| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y dt t^n = \int_0^y dt \frac{1}{1+t} \quad \text{zb. jednostajnie dla } |y| \leq |t| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1} = \ln(1+y) \quad \text{zb. jednostajnie dla } |y| < 1$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots$$

Warunek jednostajnej zbieżności jest konieczny. Kontrprzykład:

$$f_n(x) = nx \exp(-nx^2), \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\int_0^1 dx f_n(x) = -\frac{1}{2} \exp(-nx^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \exp(-n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx f_n(x) = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 dx f(x) = 0$$

Różniczkowanie po parametrze

Tw. $f(x, p)$ ciągła dla zmiennej $x \in [a, b]$ oraz dla parametru $p \in [r, s]$,

ponadto ma ciągłą pochodną $\frac{\partial f}{\partial p}$ przy ustalonym x . Oznaczmy

$$I(p) = \int_a^b dx f(x, p). \quad \text{Wtedy} \quad \frac{dI(p)}{dp} = \int_a^b dx \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}.$$

$$\text{Przykład: } I(p) = \int_0^y dx e^{-px} = \frac{1 - e^{-py}}{p}$$

Bardzo użyteczna sztuczka!

$$\frac{dI(p)}{dp} = \int_0^y dx (-x)e^{-px} = \frac{e^{-py}(1 + py) - 1}{p^2}$$

[można kontynuować różniczkowanie]

Uogólnienie:

$$\frac{d}{dp} \int_{a(p)}^{b(p)} f(x, p) dx = \int_{a(p)}^{b(p)} dx \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} + b'(p)f(b(p), p) - a'(p)f(a(p), p).$$

Całkowanie funkcji oscylujących

$f(x)$ – monotoniczna na $[a, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \sin(x + \phi) dx$ – zbieżna

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \text{całki Fresnela}$$