[wersja z 19 I 2009]

Analiza Matematyczna

część 3

Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki

Akademia Świętokrzyska 2007/2008

Wojciech Broniowski

Różniczkowalność

Pochodna funkcji jednej zmiennej

Pochodna $f:(a,b)\to R$ w punkcie $x_0 \in (a,b)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Δx – przyrost argumentu funkcji

$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – przyrost wartosci funkcji

Inna notacja: $f'(x_0)=\dfrac{df(x_0)}{dx}$

$df(x_0)$ – różniczka f odpowiadająca przyrostowi argumentu dx

Funkcja $o(x)$ jest malą wyższego rzędu niż x w sąsiedztwie $x=0$

jeżeli $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

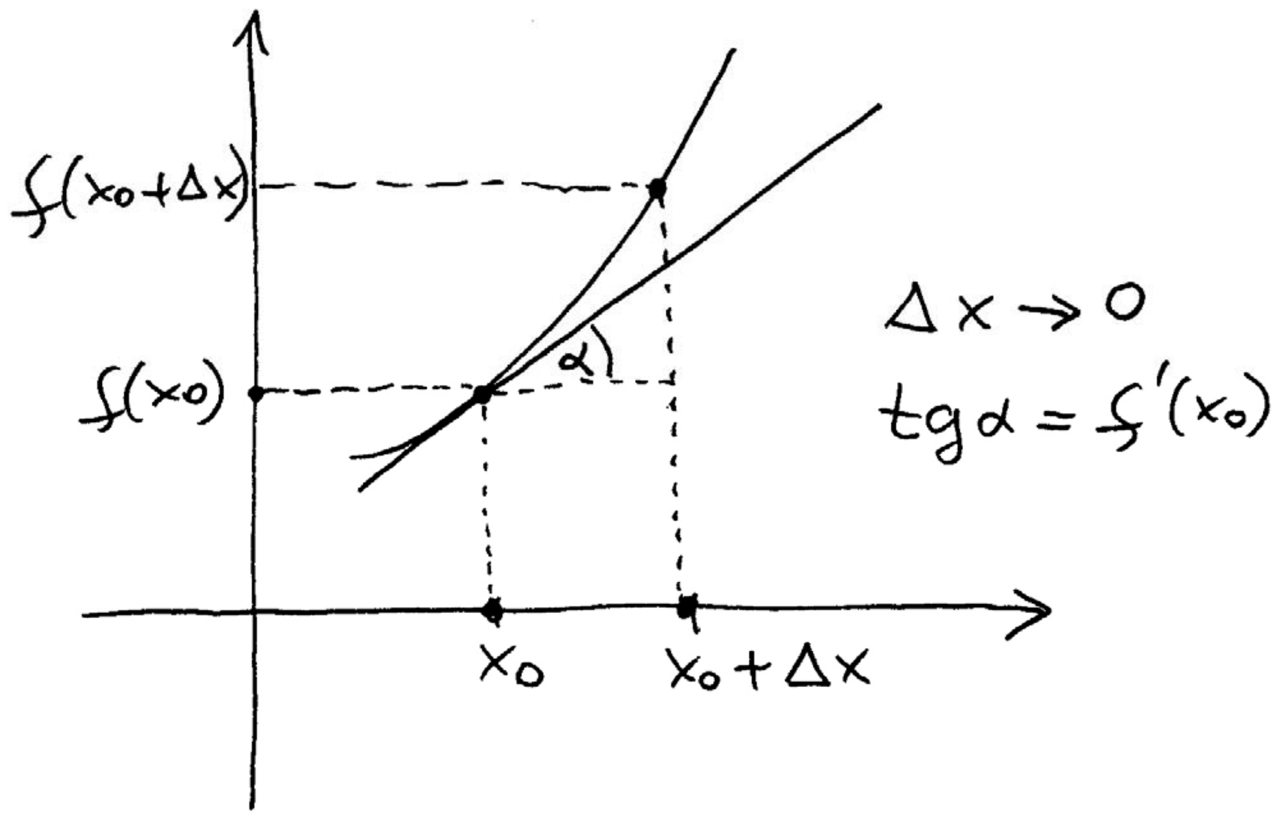
Tw. f różniczkowalna w x_0 jest ciagla w x_0

D: $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = f(x_0)$$

$\sqrt[3]{x}$, $|x|$ – ciągle w $x = 0$, a nie różniczkowalne

Interpretacja geometryczna pochodnej – styczna w punkcie x_0 ma nachylenie α



o małe, O duże, ... (*)

$$[f(x) > 0, \quad g(x) > 0]$$

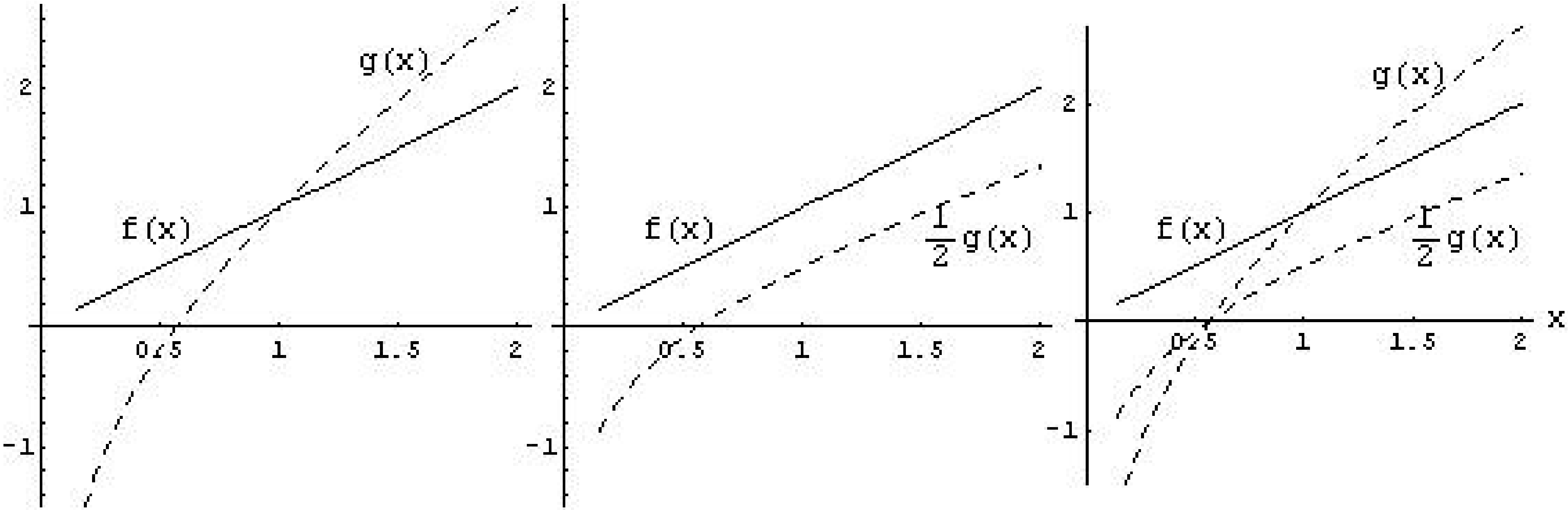
$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C > 0 \; \exists x_0 \forall x > x_0 : Cg(x) \geq f(x)$$

$$f(x) = \Omega(g(x)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \; \exists x_0 \forall x > x_0 : f(x) \geq cg(x)$$

$$f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \; \exists C > 0 \; \exists x_0 \forall x > x_0 : Cg(x) \geq f(x) \geq cg(x)$$

$$f(x) = o(g(x)) \text{ w otoczeniu } \mathrm{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ w otoczeniu } \mathrm{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad (c > 0, \text{ u niektórych } c = 1)$$



$$f(x) = O(g(x)) \qquad f(x) = \Omega(g(x)) \qquad f(x) = \Theta(g(x))$$

$$[C = 1, \quad c = \frac{1}{2}]$$

Obliczanie pochodnych

$$(cf)'(x) = cf'(x), \qquad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \bullet g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$f(x)$	a	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	a^x	$\log_a x$
$f'(x)$	0	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$	x^α
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Wyprowadzenia:

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$(f \bullet g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$(\sin x_0)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

$$(\cos x_0)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = -\sin x_0$$

$$(\ln x_0)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x_0}} =$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x_0}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

$$(\log_a x_0)' = \left(\frac{\ln x_0}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

$$(a^{x_0})' = \frac{1}{(\log_a y_0)'} = \frac{1}{\frac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a$$

$$(e^{x_0})' = e^{x_0}$$

$$(\arcsin x_0)' = \frac{1}{(\sin y_0)'} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}, \quad y_0 \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$(\arccos x_0)' = \frac{1}{(\cos y_0)'} = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x_0)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y_0)'} = \cos^2 y_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x_0)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y_0)'} = -\sin^2 y_0 = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y_0} = -\frac{1}{1+x_0^2}$$

$$({x_0}^a)' = (e^{a\ln x_0})' = e^{a\ln x_0}(a\ln x_0)' = x^a a\frac{1}{x_0} = a{x_0}^{a-1}$$

Przykłady:

Od wewnątrz do zewnątrz

$$\left(\sin(\mathrm{tg}(x_0^2))\right)' = 2x_0 \frac{1}{\cos^2 x_0^2} \cos(\mathrm{tg}(x_0^2))$$

Od zewnątrz do wewnątrz

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$$

$$x^2 = y^2 + 2y + 1 \;\Rightarrow\; 2\mathrm{x} = 2yy' + 2y' \Rightarrow y' = \frac{x}{y+1}$$

Różniczkowanie po obu stronach

Styczna do krzywej

$$x^2 + y^2 = 1, \quad A = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Znajdź styczną do okręgu w pkt. A

$$2x + 2yy' = 0$$

Różniczkowanie po obu stronach

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wartość pochodnej

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

Równanie stycznej z parametrem b

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2} + b$$

Wyznaczenie b – pkt. A należy do stycznej

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

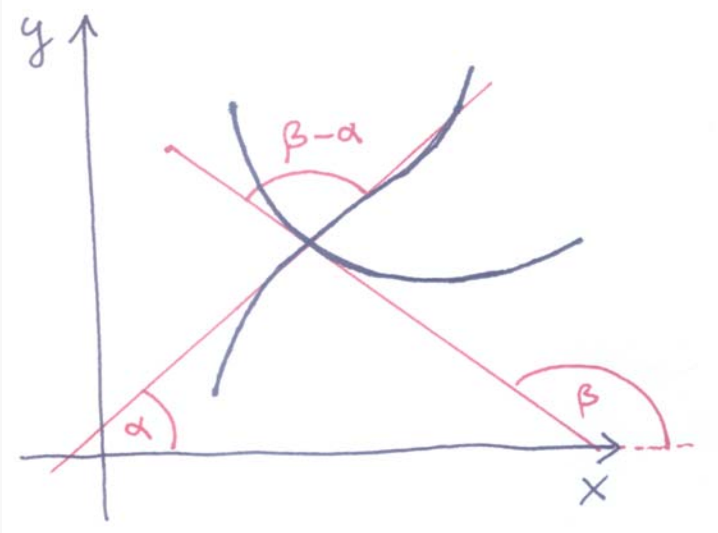
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Równanie stycznej

Kąt przecięcia krzywych

$$tg\gamma = tg(\beta-\alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1+tg\alpha tg\beta} =$$

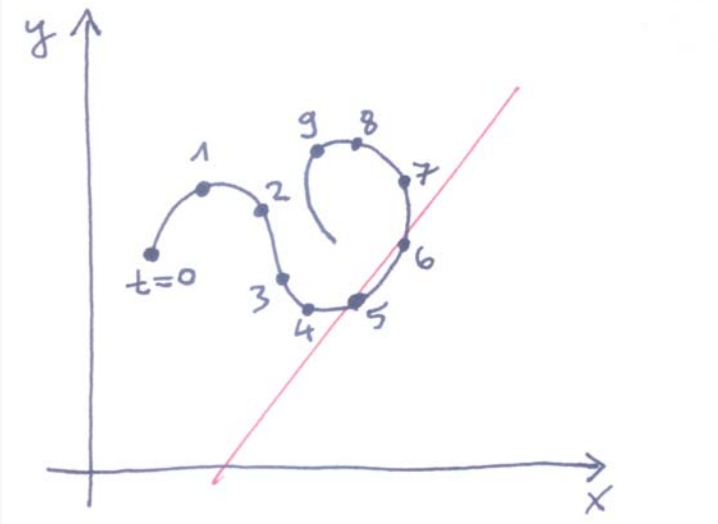
$$= \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1+g'(x_0)f'(x_0)}$$



Krzywa parametryczna (*)

$x(t), y(t)$ – współrzędne zależne od czasu

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d}{dx}y(t(x)) = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$



Funkcja pochodna

$$f:(a,b)\rightarrow R$$

$$f':(a,b)\rightarrow R$$

$$x\rightarrow f'(x)$$

Funkcja pochodna przyporządkowuje punktowi z przedziału otwartego (a,b) wartość pochodnej funkcji w tym punkcie

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{dla } x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 0}{x} = 0, \quad \text{dla } x = 0$$

Pochodna istnieje, ale jest nieciągla w $x = 0$

Funkcje klasy C^n na przedziale [a,b] mają n-tą pochodna ciągłą.

$C^0, C^1, C^2, \ldots, C^\infty$

Pochodne wyższych rzędów

Jeśli funkcja f′ jest różniczkowalna, to możemy zdefiniować jej pochodną, itd.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

funkcje klasy C^n - n-ta pochodna ciągła

C^∞ - ma wszystkie pochodne

$$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \tfrac{k\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \tfrac{k\pi}{2})$$

$$(e^x)^{(k)} = e^x$$

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$(w_n(x))^{(n)} = n!a_n$$

$$(x^4)^{(4)} = (4x^3)^{(3)} = (4\cdot 3x^2)^{(2)} = (4\cdot 3\cdot 2x)' = 4!$$

Wzór Leibniza

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$(fg)^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) +$$

$$+ 3f(x)^{(1)}g^{(2)}(x) + f(x)^{(0)}g^{(3)}(x)$$

$\dots$

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$\left(e^x x^2\right)^{(n)} = \binom{n}{0} e^x x^2 + \binom{n}{1} e^x 2x + \binom{n}{2} e^x 2 =$$

$$= e^x x^2 + 2ne^x x + n(n-1)e^x$$

Tw. o ekstremach

Jeżeli $f:(a,b)\to R$ jest różniczkowalna w $c\in(a,b)$

i ma ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c)=0$

D (maksimum):

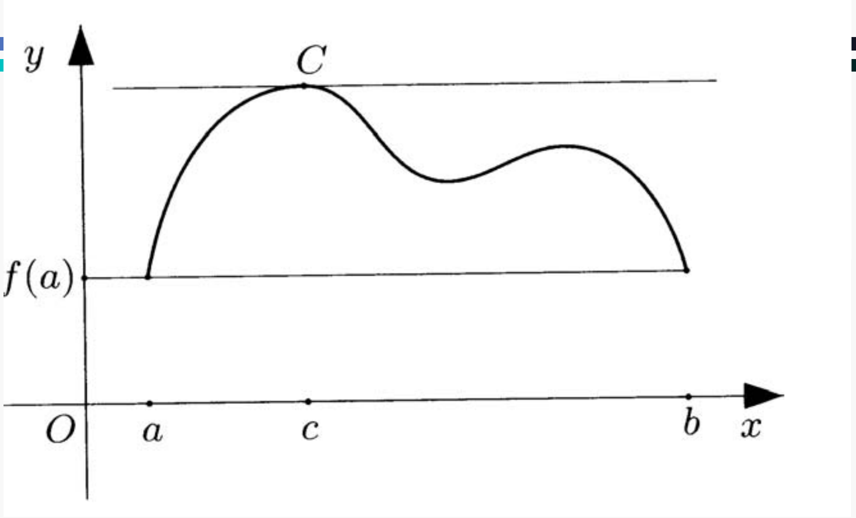
$\exists\delta>0: x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(x)\leq f(c)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ dla $x<c \Rightarrow f'_-(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$

podobnie $f'_+(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0.$

Ponieważ $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$, $f'(c)=0.$

Tw. Rolle'a

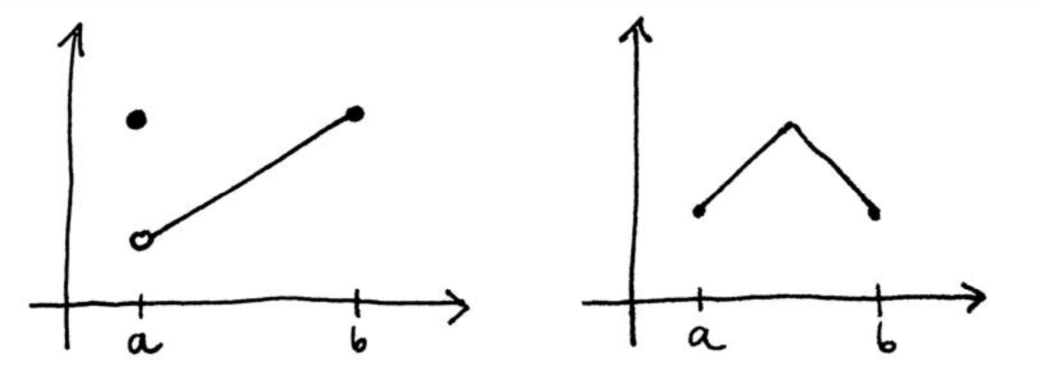


$f:[a,b]\rightarrow R$ ciagla i różniczkowalna w (a,b) oraz $f(a)=f(b)\Rightarrow$

$\exists c\in(a,b): f'(c)=0$

D: Jeżeli $f=const.$ to f'(c)=0. W przeciwnym razie

$\exists c\in(a,b)$ dla którego f osiąga ekstremum lokalne $\Rightarrow f'(c)=0$



Kontrprzykłady:

funkcja nieciągła i nieróżniczkowalna

Tw. Cauchy'ego

$f, g \in C^0 : [a,b] \to R,$ różniczkowalne w $(a,b) \Rightarrow$

$\exists c \in (a,b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

D: $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) +$ tw. Rolle'a

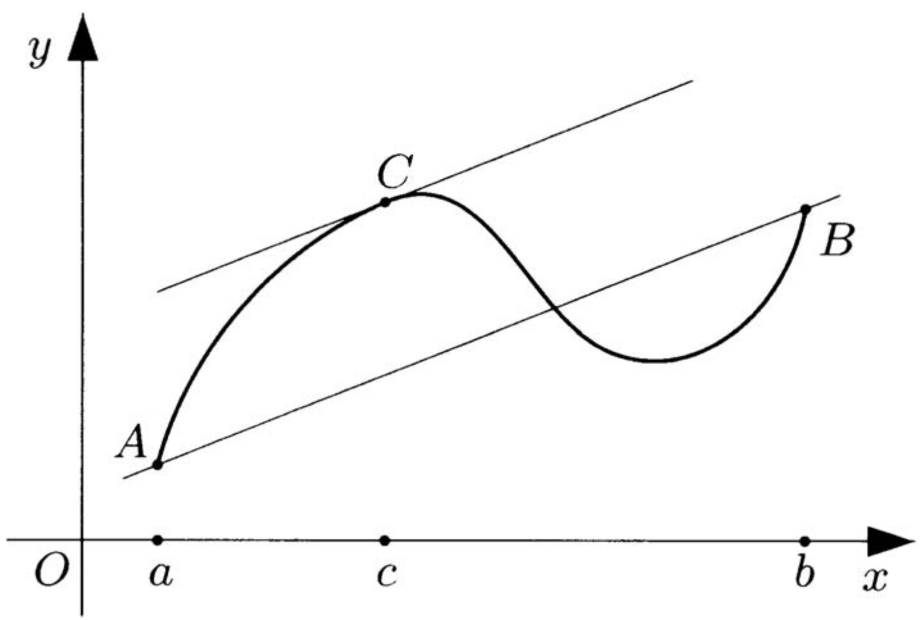
Tw. Lagrange'a

$f \in C^0 : [a,b] \to R,$ różniczkowalna w $(a,b) \Rightarrow$

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D: tw. Cauchy'ego z $g(x) = x$

(prędkość średnia
i chwilowa)



Przykład (tw. Lagrange'a):

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{b - a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}$$

Tw. Taylora

$f \in C^{n-1} : [x_0, x_0 + h] \to R,$ n-krotnie różniczkowalna w $(x_0, x_0 + h)$

$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x_0 + h) : \ f(x_0 + h) = S_n(h) + R_n(h)$

$$S_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

$$R_n(h) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n \text{ (reszta w postaci Lagrange'a)}$$

D: $x_1 = x_0 + h, \ k(x) = (x - x_1)^n$

$$g(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{f'(x)(x_1 - x)}{1!} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Z tw. Cauchy'ego: $\exists c \in (x_0, x_1): \quad \dfrac{g(x_1) - g(x_0)}{k(x_1) - k(x_0)} = \dfrac{g'(c)}{k'(c)}$

$$\Rightarrow \frac{S_n(h) - f(x_1)}{-(-h)^n} = -\frac{f^{(n)}(x_1 - c)^{n-1}}{n!(c - x_1)^{n-1}} = (-1)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = S_n(h) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n$$

Znaczenie tw. Taylora: dość łatwe przybliżanie funkcji n-krotnie różniczkowalnych wielomianem stopnia n-1. Dla „regularnych" funkcji reszta jest mała i metoda jest tym dokładniejsza, im większe jest n.

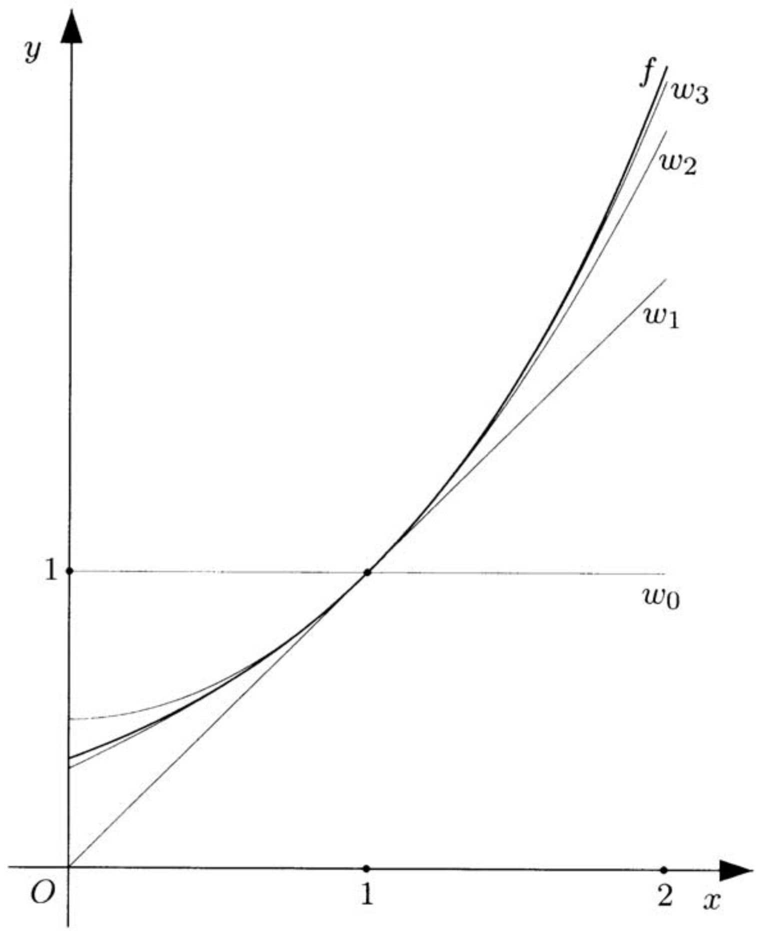
$$w_0(x) = 1,$$

$$w_1(x) = 1 + (x-1),$$

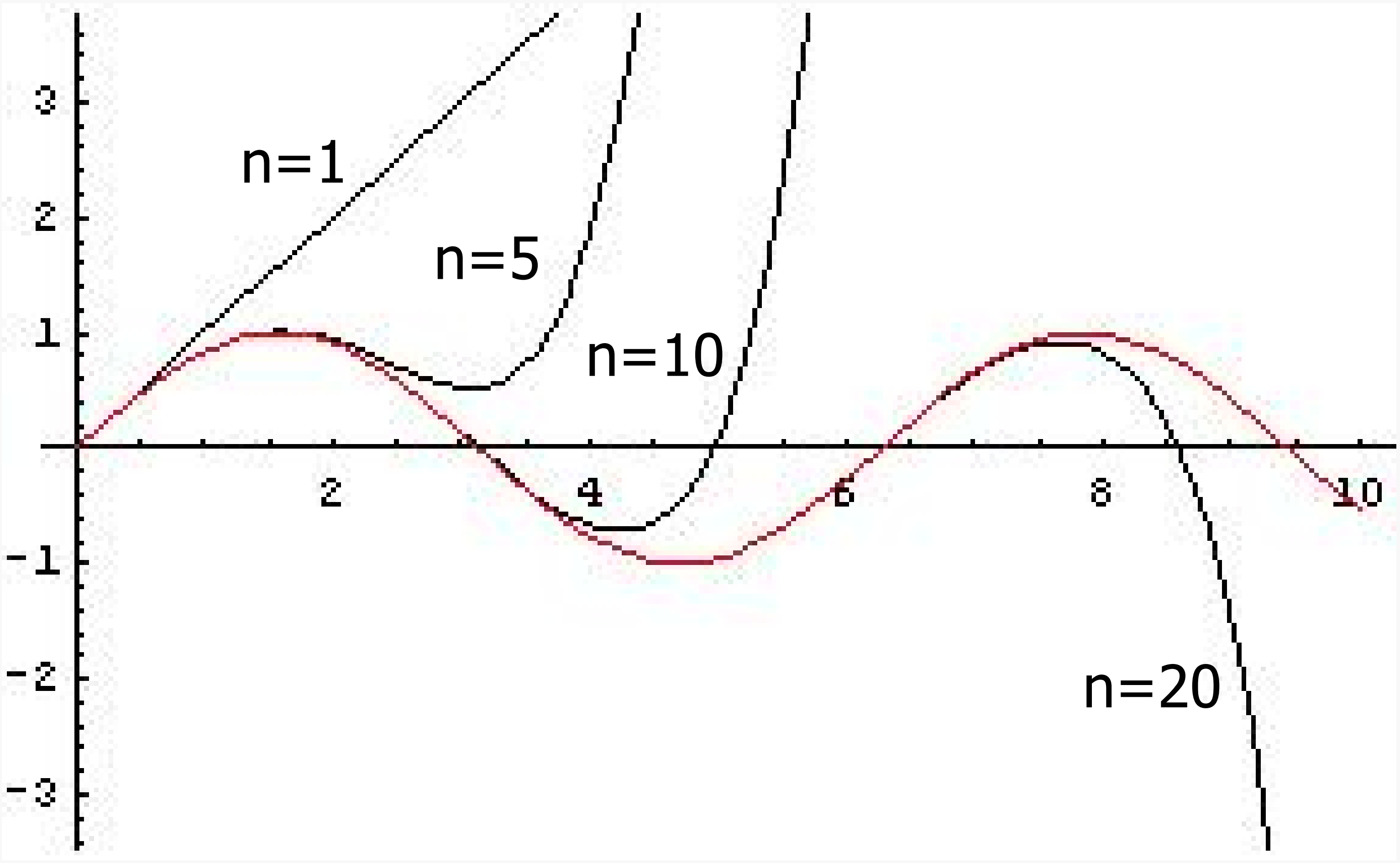
$$w_2(x) = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2},$$

$$w_3(x) = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



(RR) Przybliżanie funkcji exp(x-1) z pomocą wzoru Taylora dla kolejnych n f(x)=sin(x)



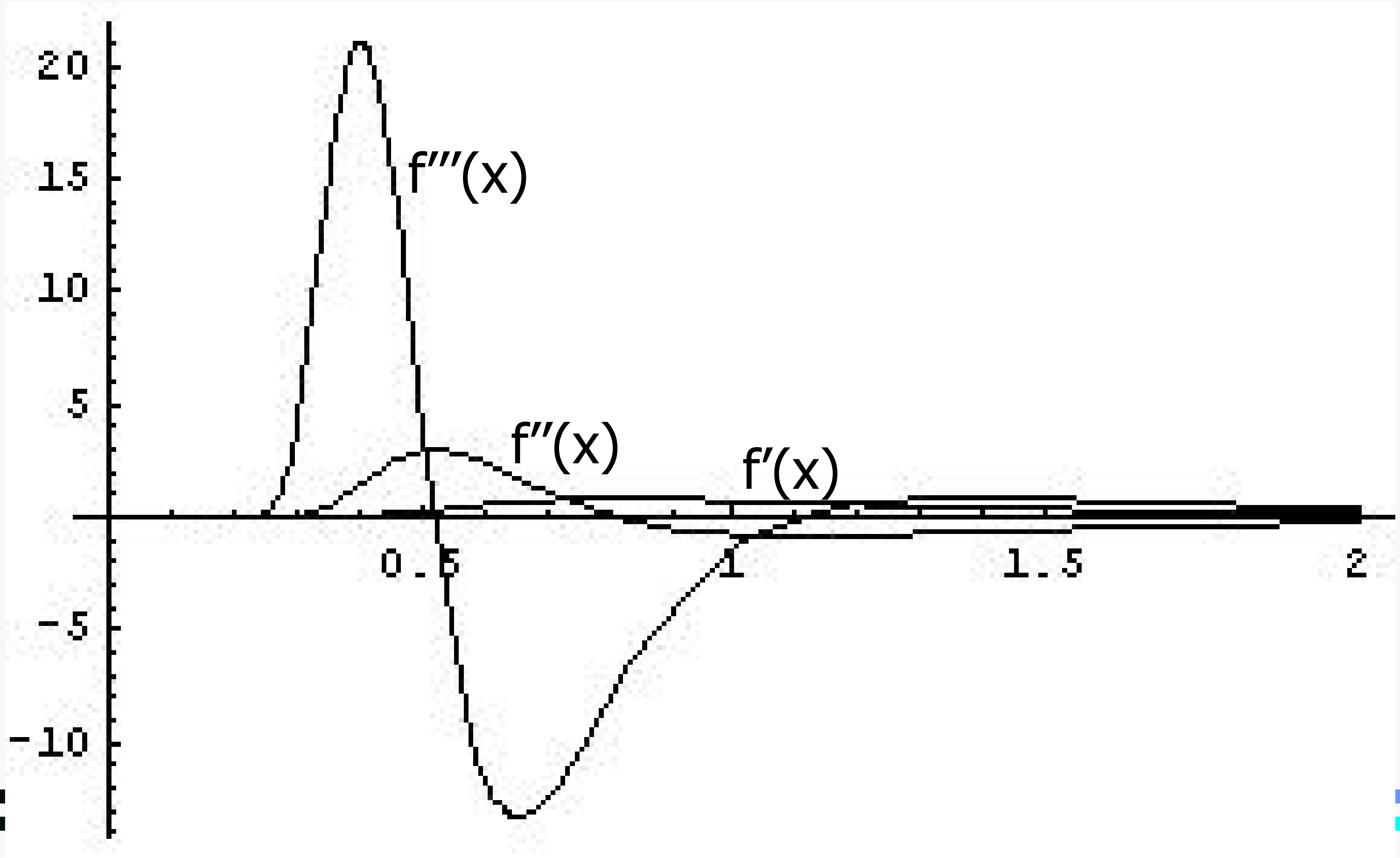
Szereg (rozwinięcie) Taylora

$f \in C^{\infty} : [x_0, x_0 + h] \to R$. Jeżeli ciąg funkcji $r_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$ jest zbieżny jednostajnie do 0 na przedziale $[x_0, x_0 + h]$, to

$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ jest zbieżny jednostajnie do f.

Tw: Jeżeli funkcja ma na danym przedziale wszystkie pochodne ograniczone, $|f^{(n)}(x)| \leq M$, to ma w tym przedziale rozwinięcie Taylora.

Przykład funkcji mającej wszystkie pochodne i nie posiadającej rozwinięcia Taylora wokół x=0: $\exp(-1/x^2)$. Pochodne nie są ograniczone! Wszystkie pochodne w x=0 znikają.



$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Funkcje hiperboliczne

$$\cosh x = \mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(krzywa łańcuchowa)

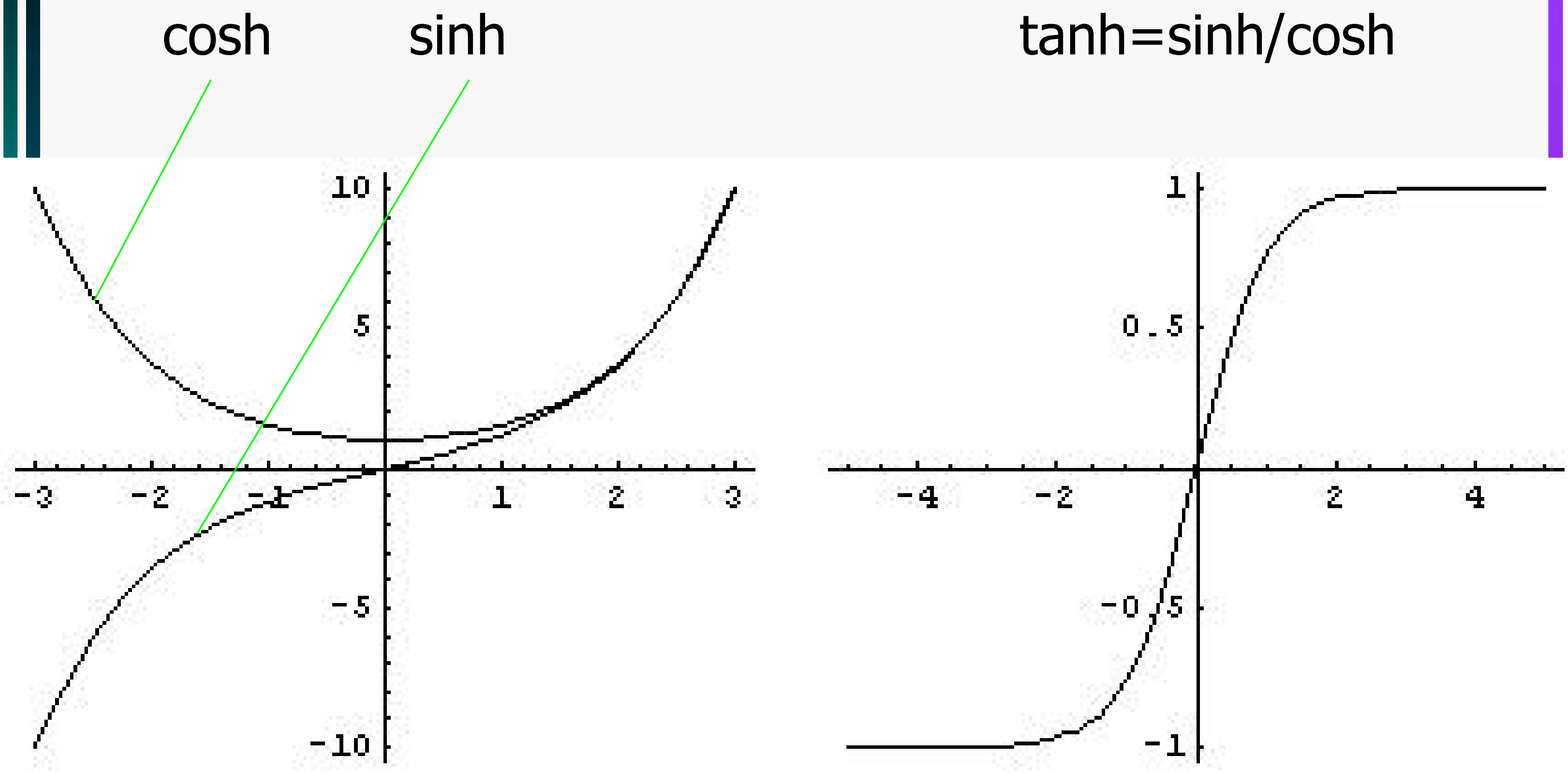
$$\sinh x = \mathrm{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z,$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

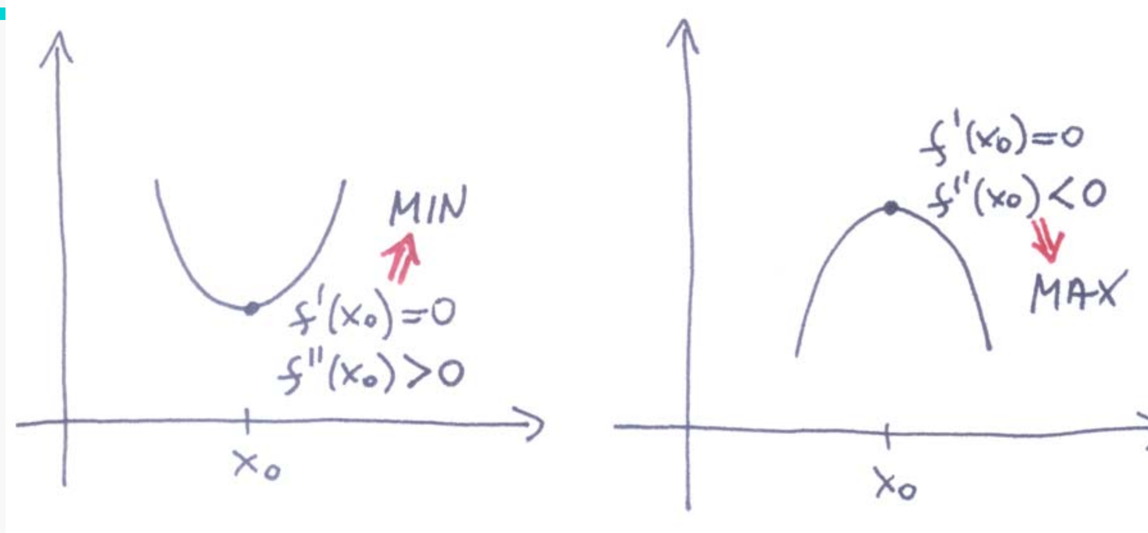
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z,$$



cosh
sinh
tanh=sinh/cosh
10
5
-5
-10
-3
-2
-1
1
2
3
1
0.5
-0.5
-1
-4
-2
2
4

Tw. o ekstremach



silne maksimum lokalne w $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

silne minimum lokalne w $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Tw. $f'(x_0) = 0,\ f''$ ciagla w x_0. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ (silne) maksimum

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ (silne) minimum

D: Z tw. Taylora dla n=2

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_1)(x - x_0)^2$$

$f'(x_0) = 0$, z ciąglosci $\exists r > 0 : x \in K(x_0, r) \Rightarrow f''(x_1)$ jest tego samego znaku, co $f''(x_0)$, skąd wynika teza.

Przyklad:

$f(x) = x^2 - x^3$

$f'(x) = 2x - 3x^2 =$

$= 3x(\tfrac{2}{3} - x)$

$f''(x) = 2 - 6x$

$f''(0) = 2$ (minimum)

$f''(\tfrac{2}{3}) = -2$ (maksimum)

Tw. f różniczkowalna w (a,b)

$f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ (silnie) rosnąca

$f'(x) < 0$ dla $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ (silnie) malejąca

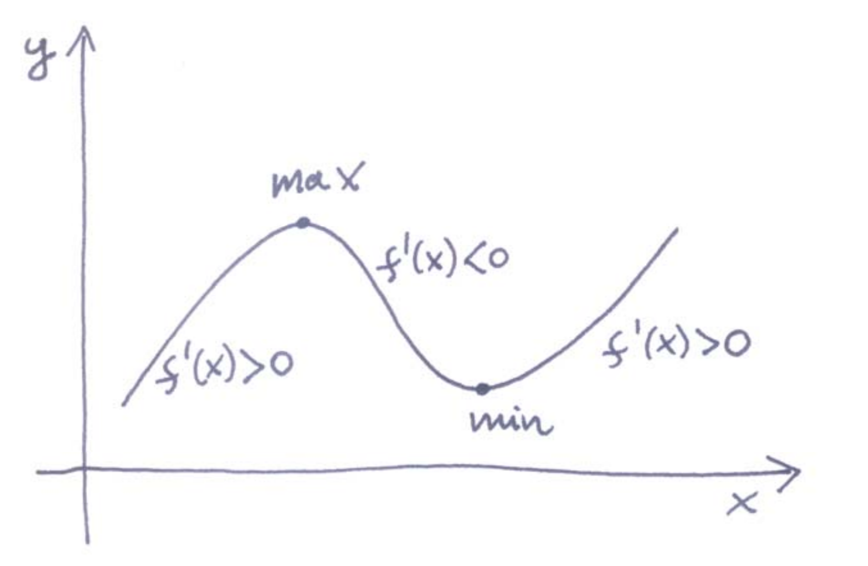
D: $x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$

Z tw. Lagrange'a $\exists c \in (a,b): f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\ \therefore$

Tw. f różniczkowalna w (a,b), $x_0 \in (a,b)$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (a,x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0,b) \Rightarrow$ (silne) maksimum w x_0

$f'(x) < 0$ dla $x \in (a,x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0,b) \Rightarrow$ (silne) minimum w x_0



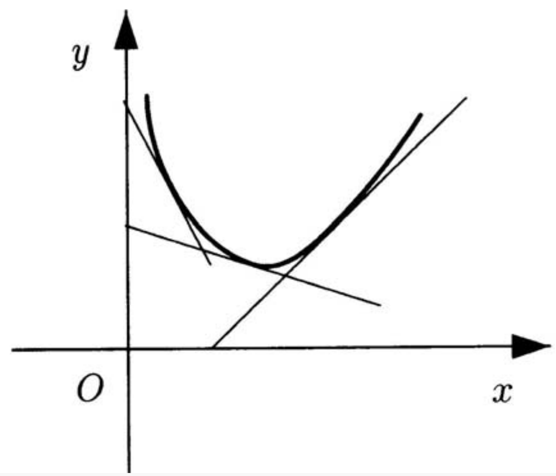
$$f(x) = x^6 + 1$$

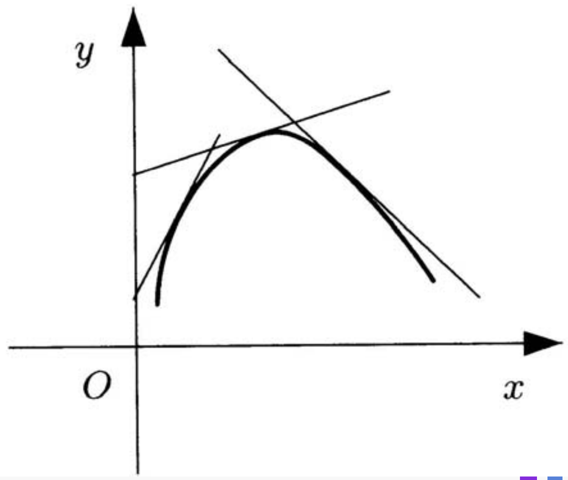
$$f'(x) = 6x^5,\ x_0 = 0$$

$$f''(x) = 30x^4,\ f''(x_0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \min\ \text{w}\ x_0$$

Wypukłość





Funkcja różniczkowalna $f:(a,b)\to R$ jest wypukla (wklęsla), jeżeli

$\forall y\in(a,b)\forall x\in(a,b), x\neq y: f(x)>(<) f(y)+f'(y)(x-y)$

- nad (pod) styczną

Tw. Funkcja dwukrotnie różniczkowalna w (a,b) jest wypukla w tym przedziale, jeżeli $f''(x)>0$, a wklęsla jeżeli $f''(x)<0$.

D: Z tw. Taylora dla n=2.

Jeżeli dla $x<x_0$ wypukla, a dla $x>x_0$ wklęsla (lub na odwrót), to x_0 nazywamy punktem przegięcia.

Reguła de L'Hospitala

f, g - różniczkowalne na (a,b), $g'(x) \neq 0$, 1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$,

$$\exists r \in \{R, \infty, -\infty\} : \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = r$$

D: Uzupelnijmy $f(a) = g(a) = 0$. Wtedy z tw. Cauchy'ego $\exists c \in (a,x)$:

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Gdy $x \to a^+$ również $c \to a^+$, zatem

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = r \quad \therefore$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \exists r\in\{R,\infty,-\infty\}: \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=r \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=r$$

D: $\phi(x)=f(\tfrac{1}{x}),\ \gamma(x)=g(\tfrac{1}{x}),\ y=\tfrac{1}{x}$

$$\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\phi(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\phi'(x)}{\gamma'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}=\lim_{y\to\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)}\ \therefore$$

$$3)\ \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty,\ \exists r\in\{R,\infty,-\infty\}: \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=r \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=r$$

$$\text{D: }\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a^+}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}=\lim_{x\to a^+}\frac{-\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)}\left(\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \therefore$$

$$4)\ 0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$$

$$0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+} x=0$$

$$5)\ \infty-\infty=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\operatorname{tg} x}{2-x\operatorname{tg} x}=0$$

$$6)\ 0^0,\infty^0,1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

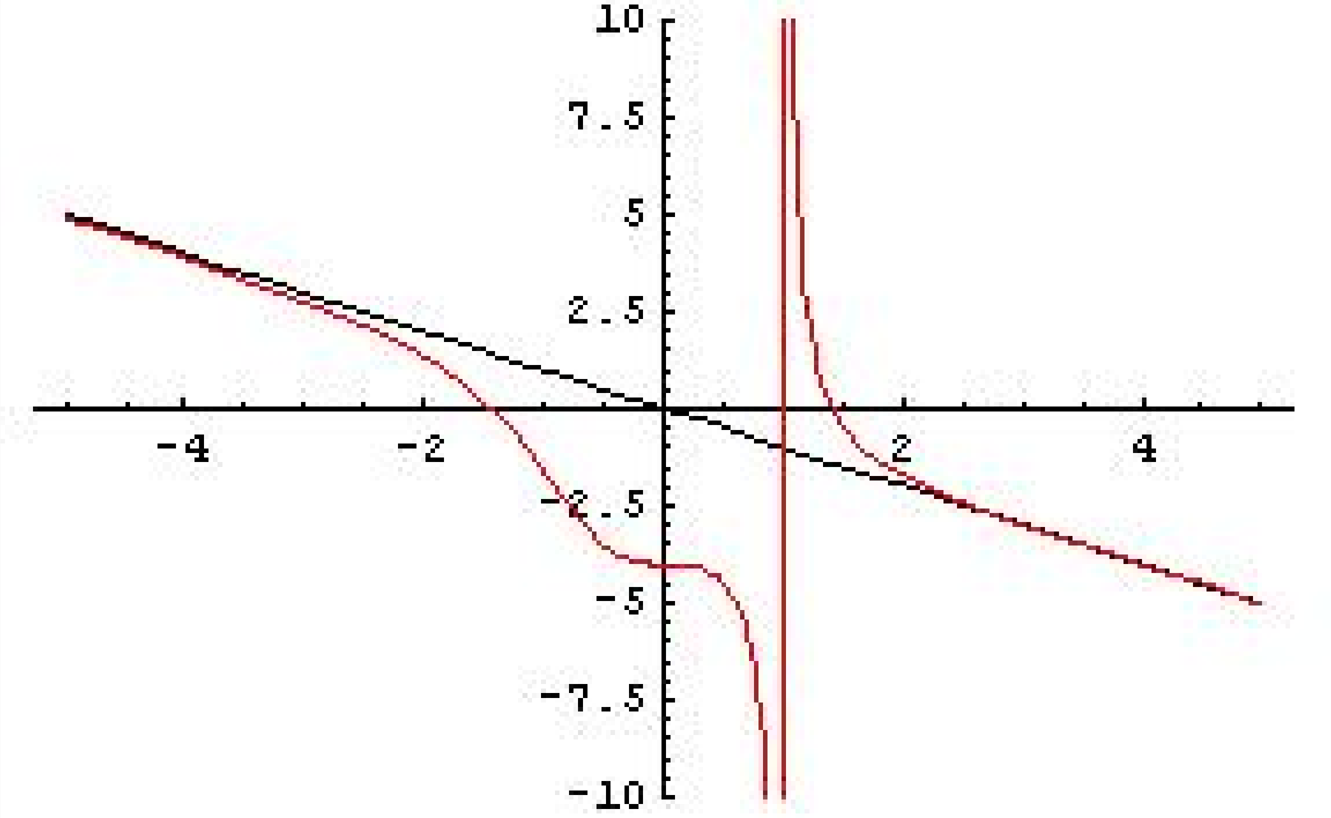
$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

Badanie funkcji

0) Dziedzina
1) Miejsca zerowe
2) Parzystość, nieparzystość, okresowość
3) Ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na krańcach przedziałów określoności
4) Asymptoty
5) Różniczkowalność
6) Monotoniczność i ekstrema
7) Druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia
8) Tabela przebiegu funkcji
9) Szkic wykresu
10) Zbiór wartości

(kolejność dowolna!)

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{1 - x^3}$$



Całkowanie

Całka nieoznaczona (funkcja pierwotna)

$f:(a,b)\to R,\quad F$ – różniczkowalna w (a,b). Jeżeli

$F'(x)=f(x)$ dla $x\in(a,b)$, to F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Funkcja pierwotna określona jest z dokładnością do stałej, tzn. jeśli F(x) jest funkcją piewrotną, to F(x)+C jest również funkcją pierwotną, ponieważ (F(x)+C)′=F′(x)=f(x).

Całkowanie: operacja odwrotna do różniczkowania

$f(x)$	$x^\alpha,\ \alpha\neq-1$	x^{-1}	a^x	$\sin x$	$\cos x$
$\int f(x)\,dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$-\cos x$	$\sin x$

$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int f(x)\,dx$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin x$

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$$

$$\int(f(x)+g(x))dx=$$

$$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, \text{ bo } \left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{|x|}|x|' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int dx \frac{x^3 + x + 2}{x^2} = \int dx\left(x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

$$\int dx \sqrt[n]{x} = \int dx\ x^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} + C = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$$

Całkowanie przez części

Wyprowadzenie:

$$\int (fg)'(x)dx = f(x)g(x) \Rightarrow \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$f(x) = x, \quad g(x) = \ln|x|$$

$$\int \ln|x|\,dx = \int x'\ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int x(\ln|x|)'\,dx =$$

$$= x\ln|x| - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln|x| - \int 1\cdot dx = x\ln|x| - x + C$$

$$\int dx\; x\cos x = \int dx\; x(\sin x)' = x\sin x - \int dx\sin x = x\sin x + \cos x + C$$

Sprawdzenie: $\left(x\sin x + \cos x + C\right)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

Całkowanie przez podstawienie

$f:(a,b)\to R,\ \mathrm{g}:(s,t)\to(a,b)$ różniczkowalna, F - pierwotna dla f

$\Rightarrow F\circ g$ jest pierwotna dla $f(g(x))g'(x)$, tj.

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(y)dy=F(g(x)),\quad y=g(x)$$

D: Z tw. o pochodnej funkcji zlożonej

$$[F(g(x))]'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)\therefore$$

$$I=\int dx\frac{1}{3x+2},\quad f(y)=\frac{1}{y},\quad y=g(x)=3x+2,\quad g'(x)=3$$

$$I=\frac{1}{3}\int dx\frac{3}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{3}\int dy\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\ln|y|+C=\ln|3x+2|+C$$

Prostszy zapis: $\int dy f(y) = \int dx \frac{dy}{dx} f(y(x))$

$$\text{bo } dy = \frac{dy}{dx}dx, \quad \text{lub } dg(x) = \frac{dg(x)}{dx}dx$$

$$I = \int dx \frac{x}{4x^2+2}, \quad y = 4x^2+2, \quad \mathrm{d}y = 8x\ dx \Rightarrow x\ dx = \frac{dy}{8}$$

$$I = \int \frac{dy}{8}\frac{1}{y} = \frac{1}{8}\ln|y| + C = \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+2\right| + \mathrm{C}$$

$$I = \int dx(1+x^2)^{\frac{1}{3}}x, \quad y = 1+x^2, \quad \mathrm{d}y = 2x\ dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{3}}dy = \tfrac{3}{8}y^{\frac{4}{3}} + C = \tfrac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

Tw. $\int dx \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$$\int dx \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \ln|\sin(x)|$$

Wzory rekurencyjne

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \geq 2, \ I_0 = x$$

$$J_n = \int dx \sin^n x, \quad J_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2, \ J_0 = x$$

$$K_n = \int dx \cos^n x, \quad K_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, \quad n \geq 2, \ K_0 = x$$

(użyteczne w wielu obliczeniach)

Całkowanie funkcji wymiernych

Ulamki proste $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ i $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \begin{cases} A\ln|x-a|, & n=1 \\ \dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}, & n>1 \end{cases}$$

$$\int dx \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} = \frac{B}{2}\int dx \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

1. $\displaystyle \int dx \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dy}{y^n}, \qquad y = x^2+px+q, \;\; \Delta = p^2-4q<0$

2. $\displaystyle x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}(t^2+1), \;\; x+\frac{p}{2} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}t, \;\; dx = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}dt$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \left(-\frac{\Delta}{4}\right)^{1/2-n} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Funkcja wymierna ma postać $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami.

Jeżeli stopień P jest wyższy lub równy stopniowi Q, to wykonujemy dzielenie, otrzymując $P(x)=W(x)Q(x)+R(x)$, gdzie stopień R jest niższy od Q. Mamy

$$f(x)=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Wielomian $W(x)$ calkujemy trywialnie. $Q(x)$ ma rozklad

$Q(x)=c(x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$, natomiast dla częsci niewymiernej mamy następujący rozklad na ulamki proste:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{A_{i,k}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_i}\frac{B_{j,l}x+C_{j,l}}{(x^2+p_jx+q_j)^l},$$

co calkujemy z pomocą wczesniejszych wzorów.

Metoda 1: Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika i porównujemy wspólczynniki przy tych samych potęgach x, co daje uklad równań liniowych na $A_{i,k}$, $B_{j,l}$, $C_{j,l}$.

Metoda 2 (prostsza): $f(x) = \frac{A}{(x-a)^s} + r(x)$, gdzie mianownik $r(x)$ zawiera $(x-a)$ w potędze co najwyżej s - 1. Wtedy $f(x)(x-a)^s\Big|_{x=a} = A + r(x)(x-a)^s\Big|_{x=a} = A.$

Ogólnie $A_{i,m} = [f(x)(x-a_i)^{k_i}]^{(k_i-m)}/(k_i-m)!, \quad m = 1,\ldots,k_i$

Dla przypadku $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l} + r(x)$ rozkladamy $x^2+px+q = (x-z)(x-\overline{z})$,

gdzie $z = \frac{-p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, a wtedy

$$f(x)(x^2+px+q)\Big|_{x=z} = Bz + C, \quad f(x)(x^2+px+q)\Big|_{x=\overline{z}} = B\overline{z} + C,$$

skąd wyznaczamy B i C.

Metoda 3: Symboliczne manipulacje z pomocą komputera (Mathematica, Maple, MatLab, Form,...)

Całkowanie funkcji niewymiernych

$R(x,y)$ – funkcja wymierna dwóch zmiennych

(iloraz wielomianów dwóch zmiennych)

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad \neq bc, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad \mathrm{a}>0, \quad (t - x)\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$

$\mathrm{a}<0, \quad (\mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})t - \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{ax^2+bx+c}$

podstawienia Eulera

$\sqrt{x^2-a^2}, \ x = a\cosh t, \quad \sqrt{x^2+a^2}, \ x = a\sinh t$

3. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \quad t = tg\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1}{2}(1+t^2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & R(u,v) = -R(-u,v), \quad t = \cos x \\ \text{b)} & R(u,v) = -R(u,-v), \quad t = \sin x \\ \text{c)} & R(u,v) = R(-u,-v), \quad t = tgx \end{array}\right\} - \text{prostsze podstawienia}$$

Całka oznaczona Riemanna

$f : [a,b] \to R,$

$m = \inf\{ f(x), x \in [a,b]\},$

$\mathrm{M} = \sup\{ f(x), x \in [a,b]\}$

Dzielimy $[a,b]$ na n częsci:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$\Pi = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; i = 1, \ldots, n$

$\delta = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i -$ srednica podzialu Π

$m_i = \inf\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$

$M_i = \sup\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i m_i -$ suma dolna,

$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i M_i -$ suma górna

Z konstrukcji $m(b-a) \le s \le S \le M(b-a)$

Rozważamy normalny ciąg podzialów (Π_n), tj. taki, że $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

s_n i S_n oznaczają sumę dolną i górną dla podzialu Π_n.

Tw. $f:[a,b]\to R$ – ograniczona $\Rightarrow$ dla dowolnego normalnego ciągu (Π_n) istnieją granice $\lim_{n\to\infty} s_n$ i $\lim_{n\to\infty} S_n$, oraz nie zależą od wyboru podzaialów.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \underline{\int_a^b f(x)dx} \text{ – calka dolna, } \lim_{n\to\infty} S_n = \overline{\int_a^b f(x)dx} \text{ – calka górna}$$

Funkcja jest calkowalna w sensie Riemanna jeżeli calka górna równa się dolnej.

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx \text{ – calka oznaczona (Riemanna)}$$

Tw. Funkcja ciągla w $[a,b]$ jest calkowalna w sensie Riemanna

Tw. Funkcja monotoniczna w $[a,b]$ jest calkowalna w sensie Riemanna

$$\int_a^b (f+g)(x) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x), \quad \int_a^b cf(x) = c\int_a^b f(x)$$

$f, g -$ calkowalne $\Rightarrow$ iloczyn $fg -$ calkowalny

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x), \quad \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x), \quad \int_a^a f(x) = 0$$

$$f(x) \le g(x),\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$$

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|$$

Tw. f i g - ciągle w $[a,b]$, $f(x) \le g(x)$, $\exists x_0 : f(x_0) < g(x_0)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Tw. f - calkowalna w sensie Riemanna w $[a,b]$, $x \in [a,b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F - \text{ciągla, oraz } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

dla x, w których f jest ciągla.

Tw. (podstawowe twierdzenie rachunku calkowego)

f - ciągla $\Rightarrow$ posiada funkcję pierwotną F, oraz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{zapis: } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b}$$

Tw. (o wartosci sredniej) f - ciągla w $[a,b]$ $\Rightarrow \exists x_0 : f(x_0) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Zastosowania całek

Geometria: pole figury, objętość bryły, długość krzywej

Miara Jordana (fiz.) zbioru

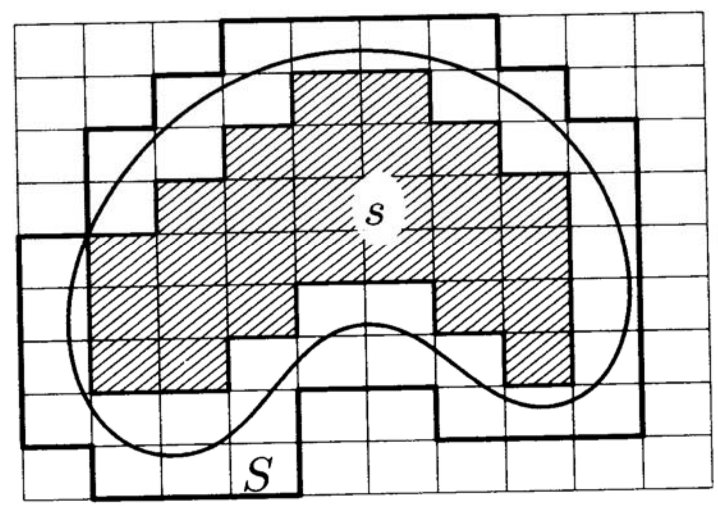
(tu: 2-wymiarowego):

1) otaczamy zbiór ograniczony A prostokątem S o bokach a,b
2) dzielimy S na n^2 mniejszych prostokątów jak na rysunku (pole każdego prostokąta wynosi ab/n^2
3) zliczamy wszystkie prostokąty zawarte w A i oznaczamy ich pole jako s_n
4) zliczamy wszystkie prostokąty, które zawierają jakiś punkt zbioru A i oznaczamy ich pole jako S_n

miara dolna: $s^* = \sup_{n \in N} s_n$

miara górna: $S^* = \inf_{n \in N} S_n$

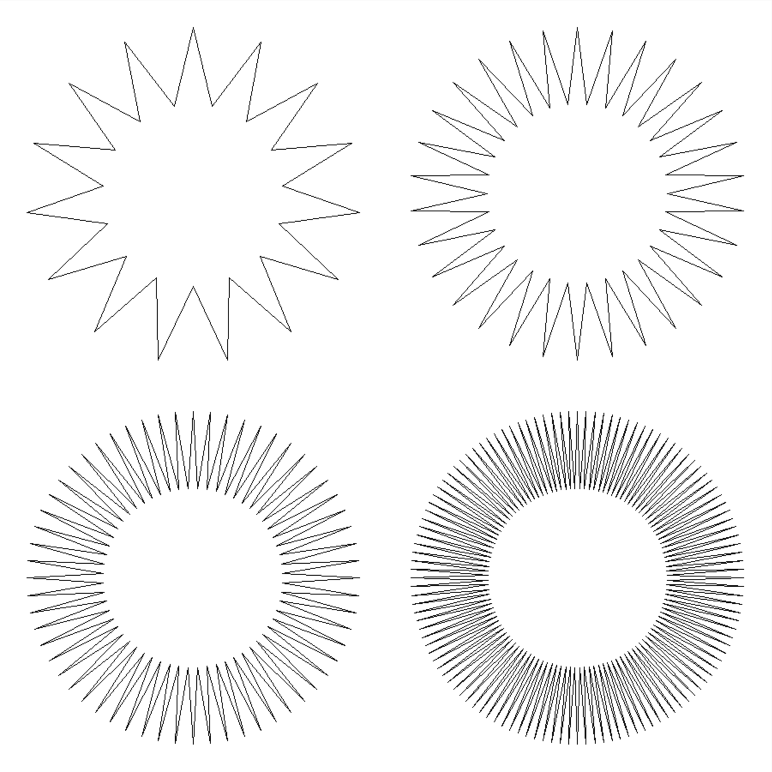
$s_n \le S_n \Rightarrow s^* \le S^*$



6) Jeżeli s*=S*=P, to A jest mierzalny w sensie Jordana, a P nazywamy jego polem

Uwaga: miara Jordana brzegu, S*-s*, wynosi 0 dla zbioru mierzalnego

Przykłady zbiorów niemierzalnych w sensie Jordana



(przejście graniczne z liczbą wierzchołków przed pomiarem w sensie Jordana)

Inne: trójkąt Sierpińskiego, fraktale

Uwagi:

W trzech wymiarach konstrukcja miary Jordana jest analogiczna – używamy prostopadłościanów. W większej liczbie wymiarów używamy hiperkostek.

W jednym wymiarze (do pomiaru zbioru leżącego na prostej) używamy odcinków.

Przy zmianie skali długości, L, pole zmienia się jak L^2, objętość jak L^3, hiperobjętość jak L^d, gdzie d jest liczbą wymiarów przestrzeni

Pole figury płaskiej

Tw. $f:[a,b]\to R$ ciągla i nieujemna $\Rightarrow$ pole figury utworzonej przez krzywą $y=f(x)$ oraz odcinki AB, AC, BD, gdzie $A=(a,0),\ B=(b,0),\ C=(a,f(a)),\ D=(b,f(b))$ wynosi

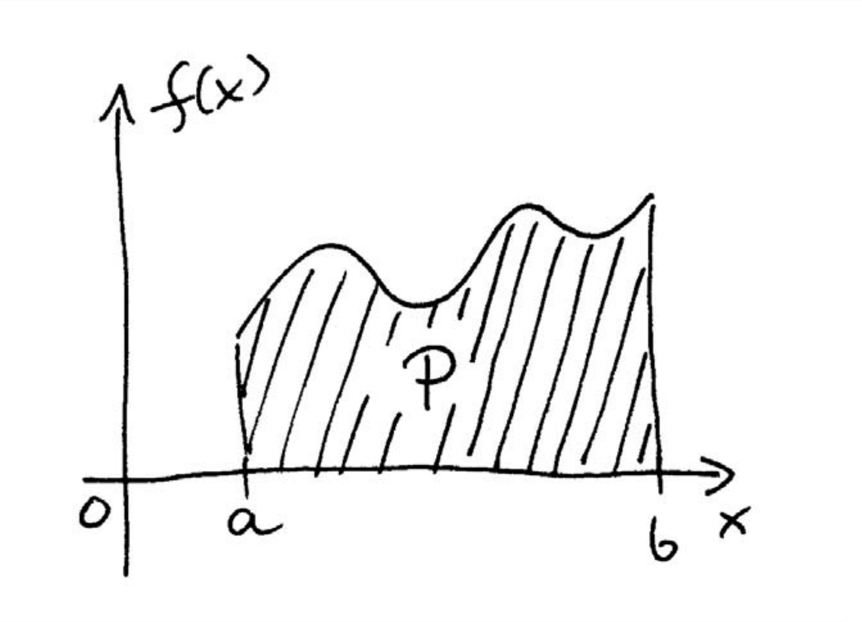
$$P=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx$$

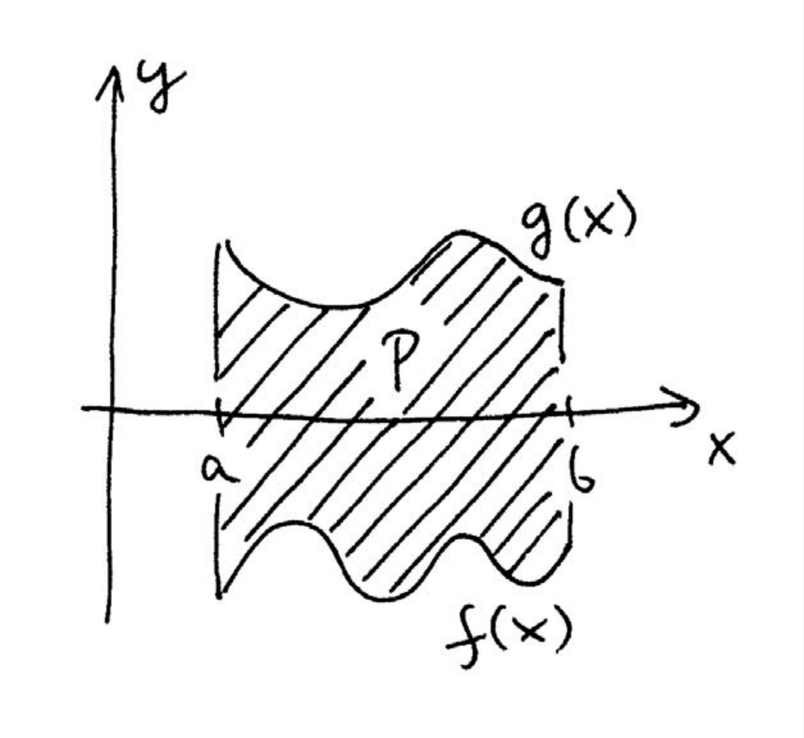
(mówimy: pole obszaru pod wykresem $f(x)$)

Dowód wynika natychmiast z analogii konstrukcji miary Jordana i całki Riemanna

Tw. $f,g:[a,b]\to R$ ciągle, $f(x)\le g(x)\Rightarrow$ pole obszaru między wykresami $y=f(x)$ i $y=g(y)$ wynosi

$$P=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (g(x)-f(x))dx$$


f(x)
P
0
a
b
x


y
g(x)
P
x
a
b
f(x)

Przyklad: pole kola

$$g(x)=\sqrt{r^2-x^2},\ f(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$$

$$P=\int_{-r}^{r}(g(x)-f(x))dx=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$x=r\cos t,\ dx=-r\sin t\ dt$$

$$P=-2\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\ r\sin t\ dt=2r^2\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\ dt=$$

$$=2r^2\frac{1}{2}\left(t-\sin t\cos t\right)\Big|_0^{\pi}=\pi r^2$$

$$\left(\int_{a}^{a+\pi}\sin^2 t\ dt=\int_{a}^{a+\pi}\cos^2 t\ dt=\frac{\pi}{2}\right)$$

[srednia wartosć $\sin^2 t$ i $\cos^2 t$ w ich okresie:

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+\pi}\sin^2 t\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+\pi}\cos^2 t\ dt=\frac{1}{2}]$$

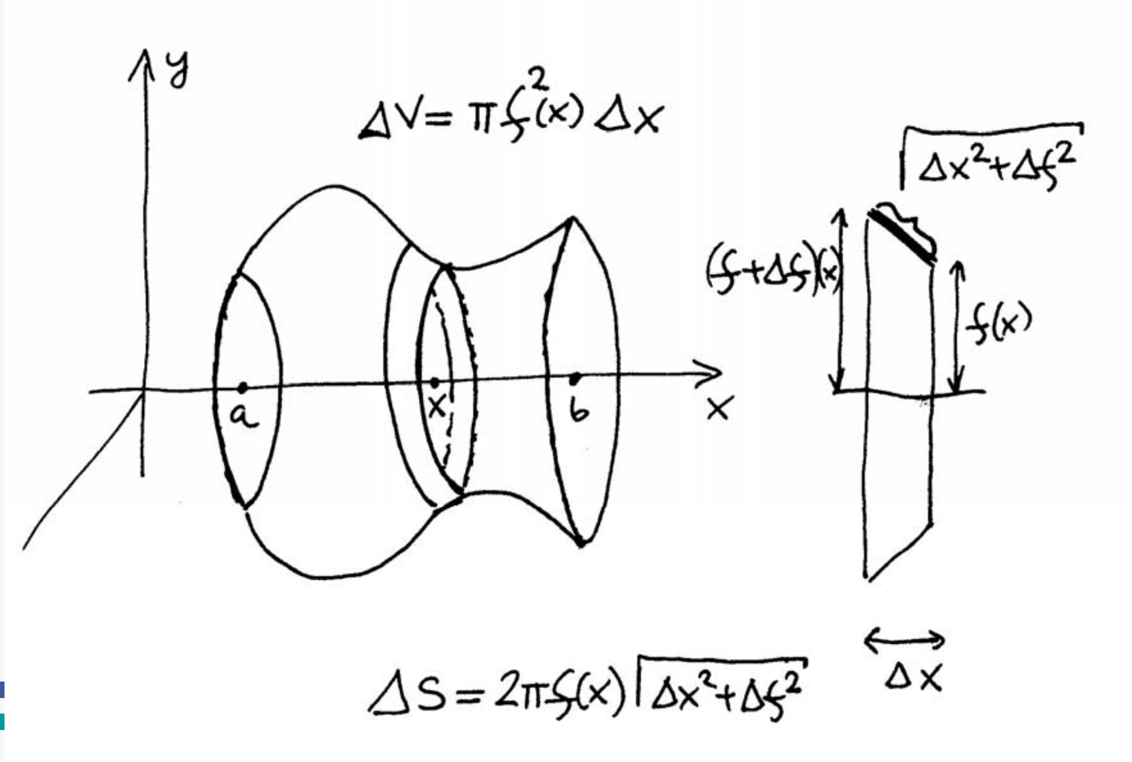
Objętość bryły obrotowej

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k)\Delta x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Przyklad: objętosć kuli

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Pole pobocznicy bryły obrotowej

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(x))^2} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Przyklad: pole sfery

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$P = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2$$

Długość krzywej

Krzywa dana jest równaniem parametrycznym

$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (t_0, t_1)$

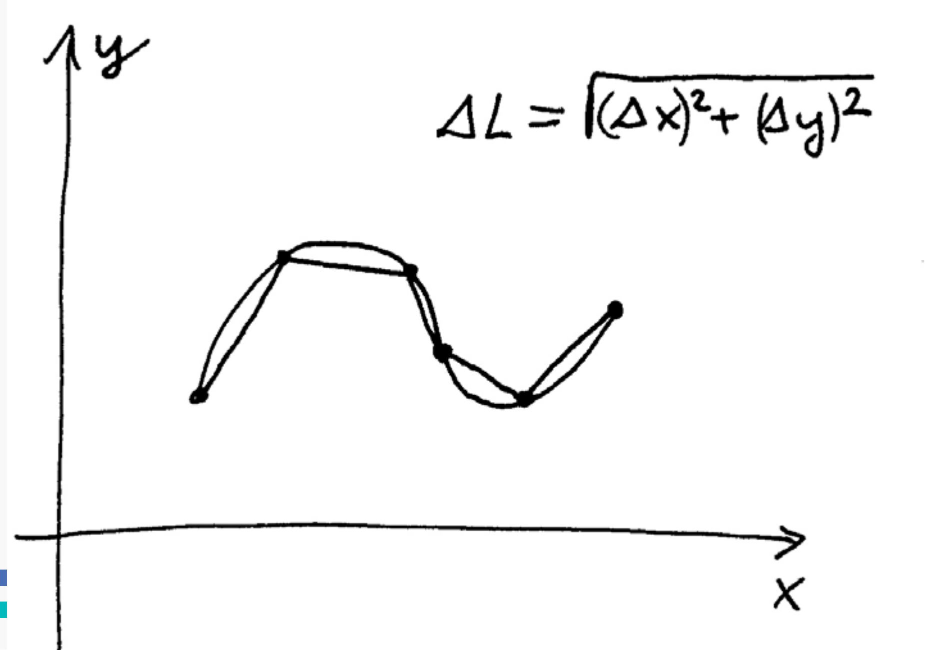
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_k)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_k)}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Przyklad: dlugosć okręgu

$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin(t),\ t_0 = 0,\ t_1 = 2\pi$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$



Całki niewłaściwe

$$f:[a,b)\to R,\quad b\in R\vee b=\infty,\ \beta\in(a,b)$$

$$I_\beta=\int_a^\beta f(x)dx$$

Calka prawostronnie niewlasciwa: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\beta\to b} I_\beta$

Analogicznie definiujemy calkę lewostronnie niewlasciwą:

$$f:(c,a]\to R,\quad \mathrm{c}\in R\vee c=-\infty,\ \gamma\in(c,a)$$

$$I_\gamma=\int_\gamma^a f(x)dx,\ \int_c^a f(x)dx=\lim_{\gamma\to c} I_\gamma$$

Calka obustronnie niewlasciwa: $\int_c^b f(x)dx=\int_c^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^\beta = -\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\gamma\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\gamma^1 = 2 - \lim_{\gamma\to 0} 2\sqrt{\gamma}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

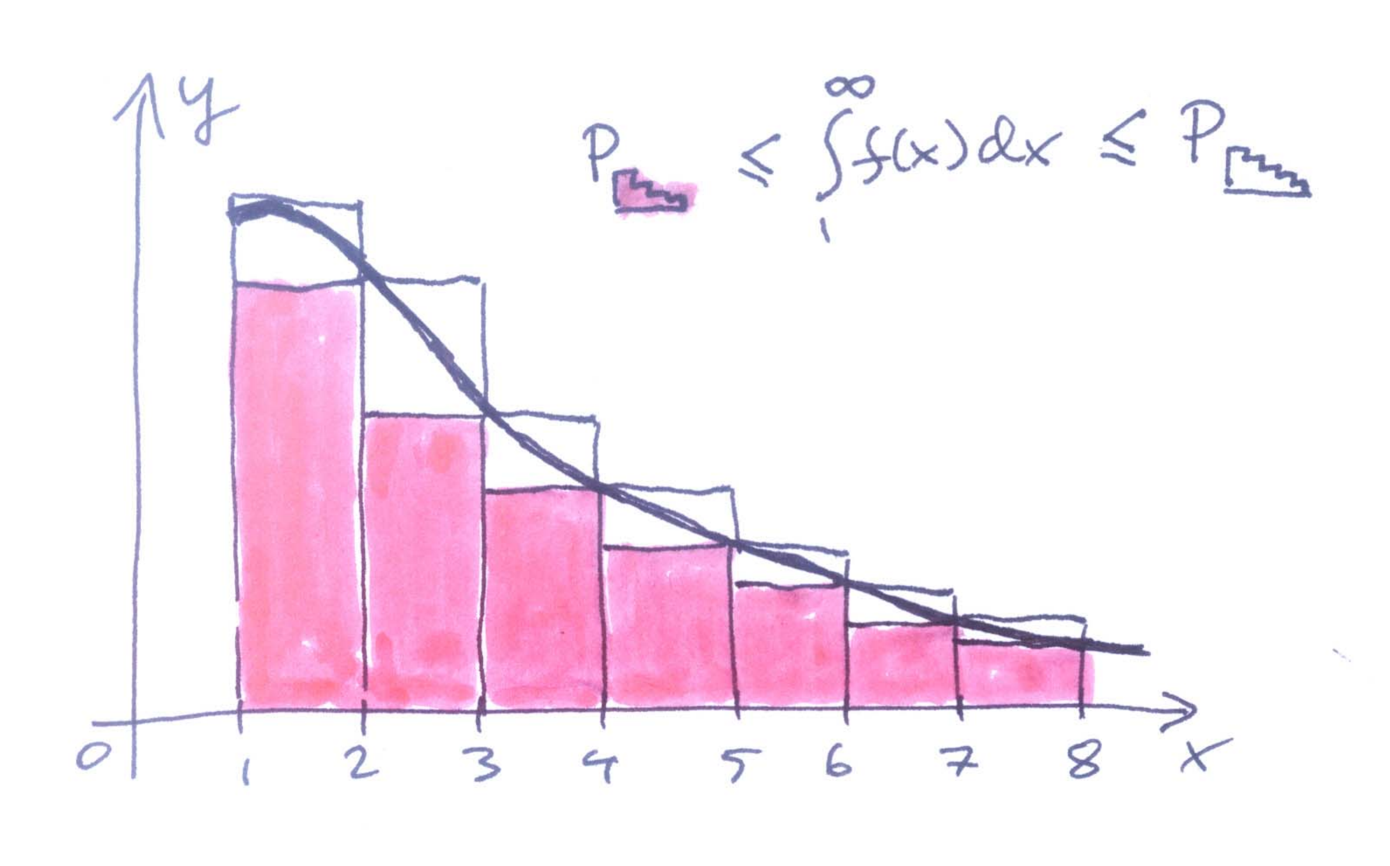
$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\gamma\to 0}(x\log x - x)\Big|_\gamma^1 = -1 - \lim_{\gamma\to 0}(\gamma\log\gamma) = -1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_\alpha^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{dla } p<1 \\ \infty & \text{dla p} \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_1^\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{dla } p>1 \\ \infty & \text{dla p} \leq 1 \end{cases}$$

Kryterium całkowe zbieżności szeregu

Podstawowa idea:



Jesli $f:[1,\infty)\to R$, ciagla, nieujemna, nierosnąca, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ zbieżny } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ zbieżna}$$

Dowód: Oznaczmy $a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$, wtedy $a_n \le f(n) \le a_{n-1}$ oraz (patrz rysunek)

$a_1 \le f(1)$

$a_1 + a_2 \le f(1) + f(2) \le f(1) + a_1$

...

$a_1 + a_2 + ... + a_n \le f(1) + f(2) + ... + f(n) \le f(1) + a_1 + ... + a_{n-1}$, czyli

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^{n} f(x)dx \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

1) Jeżeli istnieje calka, to ciąg sum częsciowych jest ograniczony, ponadto jest rosnący, bo $f(k)\ge 0$, a zatem szereg jest zbieżny.

2) W granicy $n\to\infty$ mamy $\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, zatem jesli calka jest rozbieżna, to szereg też jest rozbieżny $\square$

Wniosek: mamy górne i dolne ograniczenia

$$\int_1^\infty f(x)dx \le \sum_{k=1}^\infty f(k) \le f(1) + \int_1^\infty f(x)dx$$

Dla sumowania od $k = m$ mamy

$$\int_{\mathrm{m}}^\infty f(x)dx \le \sum_{k=m}^\infty f(k) \le f(m) + \int_{\mathrm{m}}^\infty f(x)dx$$

Przyklad: $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^p n}$ ma tę samą wlasnosć zbieżnosci

$$\text{co} \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^p x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p} = \left.\frac{u^{1-p}}{1-p}\right|_{\ln 2}^{\infty} = \begin{cases} \dfrac{\ln^{1-p} 2}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \le 1 \end{cases} \quad (u = \ln x)$$

Stała Eulera-Mascheroniego

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0.577215\ldots$$

Nie wiadomo, czy jest liczbą wymierną czy niewymierną!

Występuje w wielu całkach i szeregach, np.

$$-\int_0^\infty dx\; e^{-x}\log x = \gamma$$

Granica pod całką

Tw. f_n calkowalne na $[a,b]$, (f_n) zbieżny jednostajnie do f.

Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int\limits_a^b f(x)$ i zbieżnosć jest jednostajna [można zmienić kolejnosć granicy i calkowania]

Wniosek: Ponieważ szereg jest granicą ciągu sum częciowych, to jeżeli $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i zbieżnosć jest jednostajna, to

$\int\limits_a^b dxs(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b dx f_n(x)$ i zbieznosć jest jednostajna

[można calkować wyraz po wyrazie]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \quad \text{zb. jednostajnie w kole zbieżnosci } |t| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^y dt\ t^n = \int_0^y dt\ \frac{1}{1+t} \quad \text{zb. jednostajnie dla } |y| \le |t| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1} = \ln(1+y) \quad \text{zb. jednostajnie dla } |y| < 1$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots$$

Warunek jednostajnej zbieżnosci jest konieczny. Kontrprzyklad:

$$f_n(x) = nx\exp(-nx^2), \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\int_0^1 dx\, f_n(x) = -\frac{1}{2}\exp(-nx^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\exp(-n))$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 dx\, f_n(x) = \frac{1}{2} \ne \int_0^1 dx\, f(x) = 0$$

Różniczkowanie po parametrze

Tw. $f(x,p)$ ciagla dla zmiennej $x \in [a,b]$ oraz dla parametru $p \in [r,s]$,

ponadto ma ciągla pochodną $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ przy ustalonym x. Oznaczmy

$$I(p) = \int_a^b dx\, f(x,p). \quad \text{Wtedy} \quad \frac{\mathrm{dI(p)}}{\mathrm{dp}} = \int_a^b dx\, \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}.$$

Przyklad: $I(p) = \displaystyle\int_0^y dx\, e^{-px} = \frac{1-e^{-py}}{p}$

Bardzo użyteczna sztuczka!

$$\frac{dI(p)}{dp} = \int_0^y dx\, (-x) e^{-px} = \frac{e^{-py}(1+py)-1}{p^2}$$

[można kontynuować rózniczkowanie]

Uogólnienie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}} \int_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)dx = \int_{a(p)}^{b(p)} dx\, \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} + b'(p) f(b(p),p) - a'(p) f(a(p),p).$$

Całkowanie funkcji oscylujących

$$f(x) - \text{monotoniczna na } [a,\infty),\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\sin(x+\phi)dx - \text{zbieżna}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \text{calki Fresnela}$$