[wersja z 8 XII 2009]

Analiza Matematyczna
część 2

Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki

Akademia Świętokrzyska 2009/10

Wojciech Broniowski

Ciągi i szeregi

Przestrzeń metryczna

Metryka: $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ - parze punktów liczbę nieujemną

$$\forall x, y \in X :$$

$$(a)\ \ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(b)\ \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$$

$$(c)\ \ \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \qquad \text{(warunek trójkąta)}$$

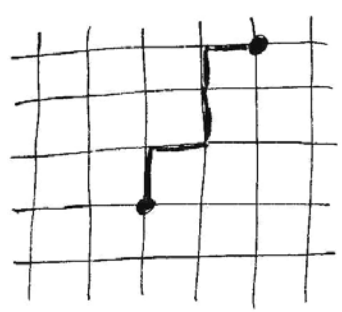
Przestrzeń metryczna: para (X, ρ)

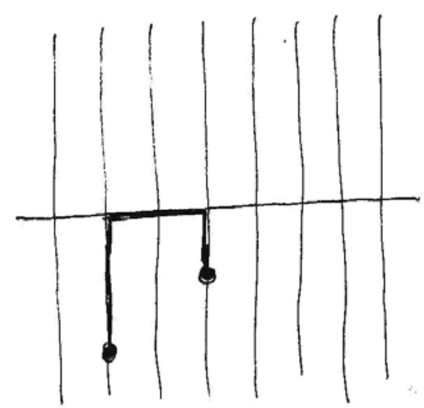
Przestrzeń R^n, n - wymiar, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, x_k – współrzędna

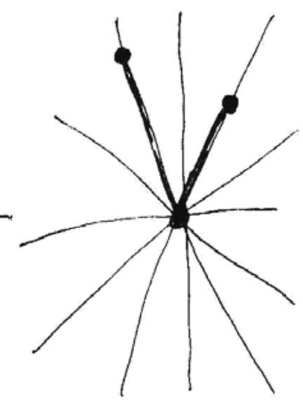
Metryka euklidesowa: pomiar linijką

$$\rho_E(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Inne przykłady (miejska,
wiejska (leśna),
węzła kolejowego,
max, dyskretna,
z funkcją rosnącą)







Przykłady dla R^2

Metryka miejska: $\rho_M((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

(a,b) oczywiste

(c) wynika z $|a+b| \leq |a|+|b|$

$$|x_1 - z_1| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|$$

$$|x_2 - z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$$

Metryka dyskretna: $\rho_D(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x = y \\ 1 \text{ dla x} \neq y \end{cases}$

(a,b) oczywiste (c) - przypadki

Metryka maximum: $\rho_{max}((x_1,y_1)),(x_2,y_2)) = \max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$

Nierówność Schwarza:

liczby rzeczywiste $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

liczby zespolone $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$$

D: Rozważenie trójmianu w zmiennej t w rozwinięciu lewej strony nierówności

$\sum_{k=1}^{n}(a_k t + b_k)^2 \geq 0$ daje natychmiast dowód dla przypadku rzeczywistego.

Dla przypadku zespolonego mamy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left|a_k \bar{b}_k\right|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$$

Z nierówności Schwarza dla liczb rzeczywistych wynika nierówność

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^{\,2}}$$

(D: podniesienie obu stron do kwadratu i uproszczenie). Stąd wynika warunek trójkąta dla metryki euklidesowej - wystarczy przyjąć $a_k=x_k-y_k$, $b_k=z_k-y_k$.

Metryka produktowa: (X,ρ_1), (Y,ρ_2) – przestrzenie metryczne. Możemy wprowadzić metryki

$$\rho_E((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{\rho^2_{1,E}(x_1,x_2)+\rho^2_{2,E}(y_1,y_2)}$$

$$\rho_M((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \rho_{1,M}(x_1,x_2)+\rho_{2,M}(y_1,y_2)$$

$$\rho_{\max}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(\rho_{1,\max}(x_1,x_2)+\rho_{2,\max}(y_1,y_2))$$

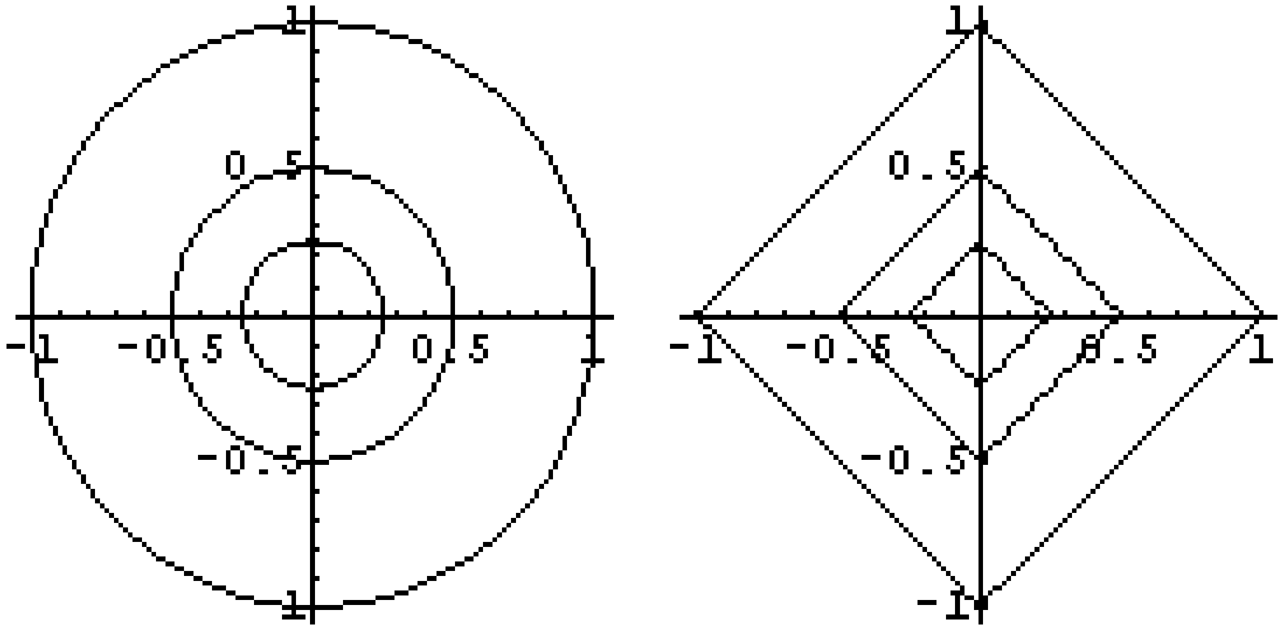
Metryka indukowana – metryka na niepustym podzbiorze A zbioru X

Metryka w zbiorze liczb zespolonych C: $\rho(z_1,z_2) = |z_1-z_2|$

Kule (otoczenia) domknięte i otwarte:

$$\overline{K}(x_0,r) = \{x\in X : \rho(x_0,x)\le r\}$$

$$K(x_0,r) = \{x\in X : \rho(x_0,x) < r\}$$



Kule w R^2 z metryką euklidesową i miejską

W metryce dyskretnej kulami są zbiory punktowe lub cała przestrzeń

Kule w metryce indukowanej: $\overline{K}_A(x_0, r) = \overline{K}(x_0, r) \cap A$

Metryka ρ_1 jest silniejsza niż ρ_2 jeśli

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : K_1(x, \delta) \subset K_2(x, \varepsilon)$$

(dla dowolnego x i dla dowolnie małego ε można dobrać takie δ, że kula w metryce silniejszej o promieniu δ zawiera się kuli w metryce słabszej o promieniu ε)

Metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne jeśli ρ_1 jest silniejsza niż ρ_2 i jednocześnie ρ_2 jest silniejsza niż ρ_1

Przykład metryk równoważnych: euklidesowa, miejska, maksimum

Wiejska jest silniejsza od euklidesowej, wiejska nie jest silniejsza od kolejowej, a kolejowa nie jest silniejsza od wiejskiej!

Metryka dyskretna jest najsilniejsza i nie jest równoważna z euklidesową

Metryki ρ_1 i ρ_2 są jednostajnie równoważne jeśli

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ \forall x, y \in X : \alpha\rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le \beta\rho_1(x, y)$$

Ciąg

Definicja ciągu: funkcja $a : \mathbb{N} \to A$

Notacja: $a_1, a_2, a_3, \ldots \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)$

ciąg n-wyrazowy, ciąg liczbowy

Ciąg arytmetyczny: a_0, a_0+r, a_0+2r, a_0+3r, ..., a_0+(k-1)r
Ciąg geometryczny: a, aq, aq^2, aq^3, ... , aq^{k-1}
Ciąg Fibonacciego: 1,1,2,3,5,8,13,21,34, ... $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla n>2 (rekurencja)

Zbieżność ciągu

Ciąg (x_n) jest **zbieżny** do **granicy** x jeśli dla każdego (dowolnie małego) $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 (w ogólności zależne od ε) takie, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi, że x_n należy do $K(x, \varepsilon)$ („prawie wszystkie" wyrazy ciągu należą do dowolnie małej kuli o środku w x)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon{>}0 \exists n_0 \forall n > n_0 :\ x_n \in \mathrm{K}(x,\varepsilon)$$

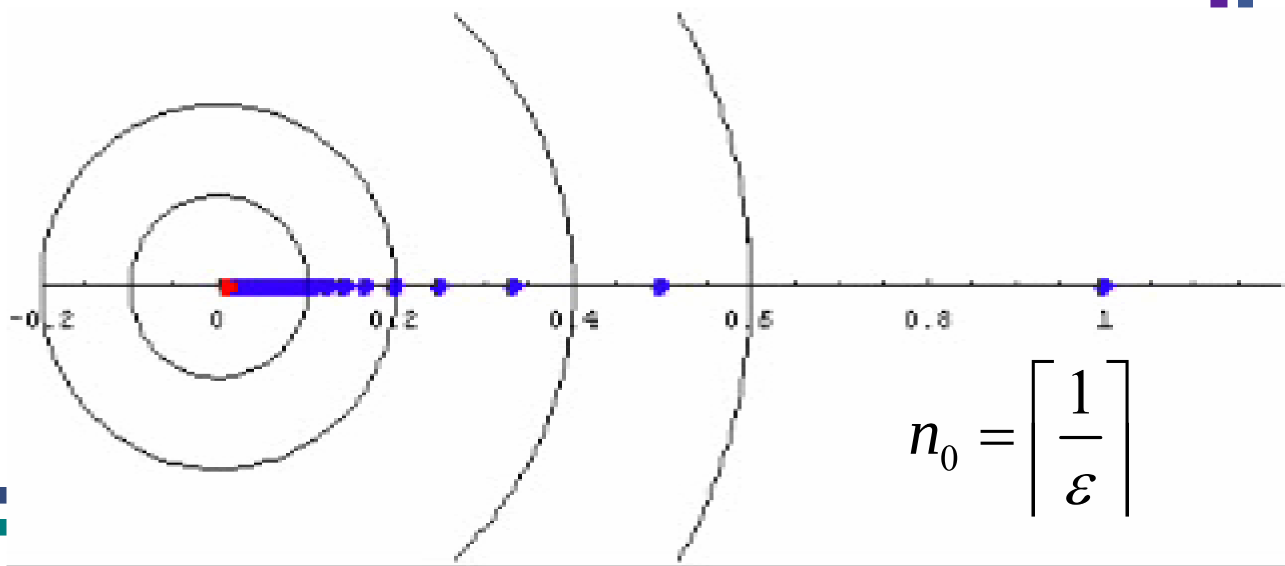
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon{>}0 \exists n_0 \forall n > n_0 :\ \rho(x_n, x) < \varepsilon$$

inna notacja: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Przykład:

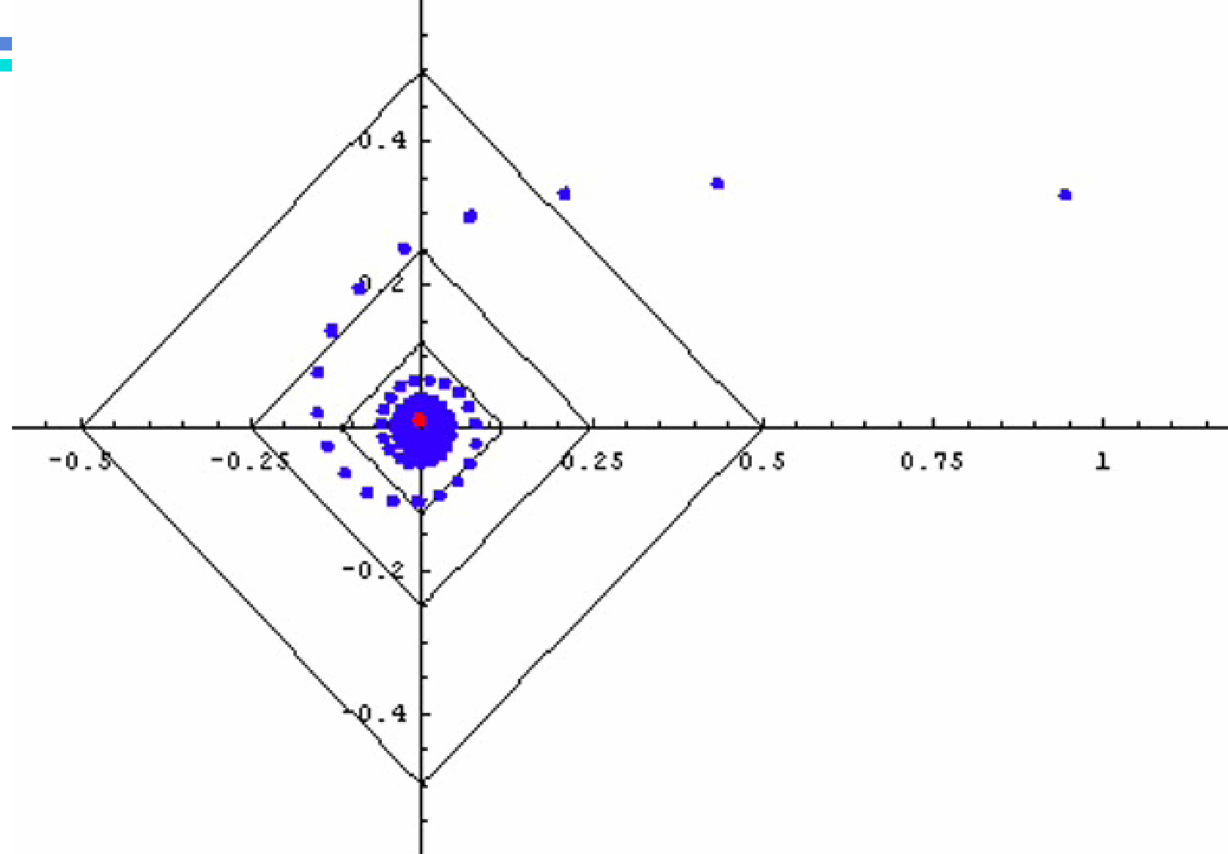
$$x_n = 1/n$$

(metryka euklidesowa)



$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

Przykład ciągu w R^2
z metryką maksimum
zbieżnego do (0,0)



Prawie wszystkie
(z wyjątkiem skończonej
liczby) wyrazy ciągu
znajdują się w dowolnie
małej kuli o środku w
punkcie będącym granicą
ciągu

Przykład ciągu rozbieżnego: cos(4n)

Inny ciąg rozbieżny: $a_n=(-1)^n$

Ciąg, który nie ma granicy nazywamy **rozbieżnym**

Ciąg, dla którego $x_n=x$ dla $n > n_0$, nazywamy ciągiem **stałym.**
Jego granicą jest x.

Ciąg jest ograniczony jeśli $\exists x \in X \ \exists r > 0 \ \forall n : x_n \in \overline{K}(x,r)$
(wszystkie wyrazy ciągu należą do pewnej, dowolnie dużej, kuli)
Przykłady: $1/n$, $(-1)^n$, kontrprzykłady: n, $(-1)^n n^2$

Tw. **Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę**
D (przez sprzeczność):
Załóżmy, że ciąg ma dwie różne granice x_1 i x_2. Weźmy $\varepsilon = \rho(x_1, x_2)/3$ (wolno nam!) Wtedy z nierówności trójkąta oraz z faktu, że dla $n>n_0$ element x_n musi jednocześnie należeć do otoczenia punktu x_1 i x_2 dostajemy sprzeczność:

$$\rho(x_1, x_2) \le \rho(x_n, x_1) + \rho(x_n, x_2) < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\rho(x_1, x_2)$$

Tw. **Ciąg zbieżny jest ograniczony**

D: Jeśli x jest granicą (x_n), to istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ zachodzi $\rho(x_n, x) < 1$. Weźmy $r = \max(1, \rho(x_1,x), \rho(x_2,x), \dots, \rho(x_{n_0},x))$. Z konstrukcji $\forall n : x_n \in \overline{K}(x,r)$, więc ciąg jest ograniczony.

Przykład: $1/n^2$

Przeciwstawnie: **ciąg nieograniczony nie może być zbieżny**

Tw. **Ciąg zbieżny w metryce silniejszej jest zbieżny w metryce słabszej**.
Jeśli metryki są równoważne, to ciąg jest zbieżny w obu metrykach, albo rozbieżny w obu metrykach.

D: Korzystamy z faktu, że otoczenia metryki silniejszej zawierają się w otoczeniach metryki słabszej.

Tw. **Ciąg (x_n) jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb $\rho(x_n,x)$ jest zbieżny do 0.**

D: Wynika bezpośrednio z definicji kuli.

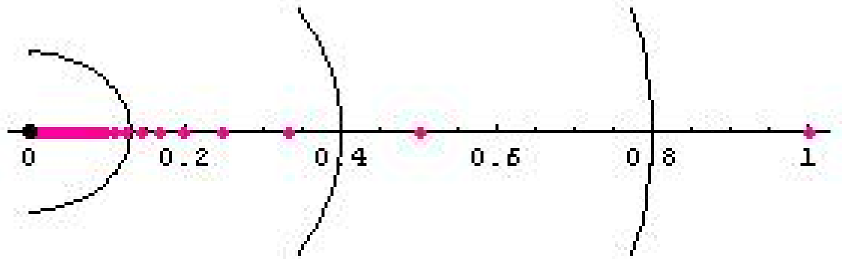
Podciąg: mając dany ciąg (x_n) oraz rosnący ciąg liczb naturalnych (p_n), tzn. $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ definiujemy ciąg (y_n) taki, że $y_n = x_{p_n}$

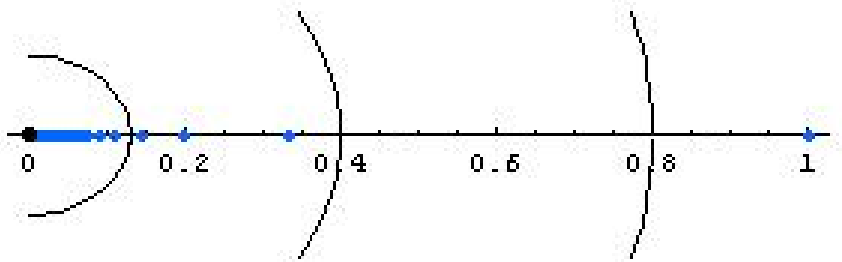
Przykład: $(x_n) = (1,-1,1,-1,1,-1,1,\dots)$, $(p_n) = (1,3,5,7,\dots)$, $(y_n) = (1,1,1,1,\dots)$

Granicę podciągu (y_n) nazywamy **granicą częściową** ciągu (x_n)

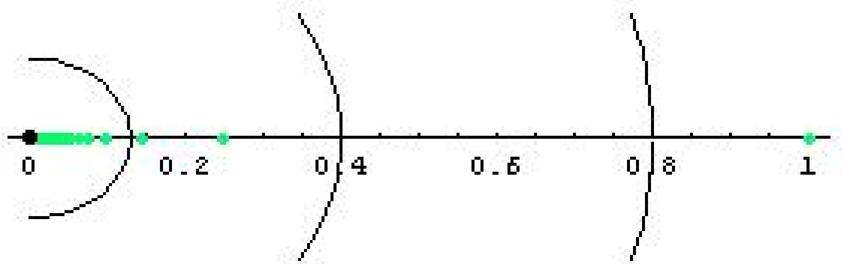
Tw. **Ciąg jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny do x**

$x_n = 1/n$





co drugi wyraz, $(p_n) = (1,3,5,7,\dots)$



co trzeci wyraz, $(p_n) = (1,4,7,10,\dots)$

Wszystkie podciągi zbieżne do x=0

Tw. **O granicy sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$$

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$$

Dowód tw. 1:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \;\; \forall n > n_1 : -\frac{\varepsilon}{2} < x - x_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_2 \;\; \forall n > n_2 : -\frac{\varepsilon}{2} < y - y_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = \max(n_1, n_2) \; \forall n < n_0 : -\varepsilon < (x + y) - (x_n + y_n) < \varepsilon$$

Tw. **O zachowaniu relacji $\leq$ w granicy**:

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : x_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

D (przez sprzeczność): Oznaczmy $z_n=y_n-x_n$, $z=\lim z_n$, oraz $z=y-x$. Załóżmy wbrew tezie, że $z<0$ i weźmy $\varepsilon=-z/2$. Z def. granicy dla x i y wiemy, że dla dalekich n zachodzi $|x_n-x| < \varepsilon$ i $|y_n-y| < \varepsilon$, a więc

$$z_n - z \leq \ |(y_n - x_n) - (y - x)| \ = \ |(y_n - y) + (x_n - x)|$$

$$\leq \ |y_n - y| + |x_n - x| \ < 2\varepsilon = -z$$

$$\Rightarrow z_n < 0 \Rightarrow x_n > y_n$$

co przeczy założeniu.

(Uwaga: Analogiczne tw. nie zachodzi dla nierówności ostrej: $1/n < 2/n$, a obydwa ciągi mają tę samą granicę równą 0)

Tw. **O trzech ciągach** (inaczej „O dwóch policjantach i aresztancie”)

$$\exists k: \; n \geq k \Rightarrow x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

D: Z definicji granicy dla $n>n_0$ mamy $|x_n-a|<\varepsilon$ oraz $|z_n-a|<\varepsilon$. W szczególności dla $n>n_1=\max(k,n_0)$ zachodzi $a-\varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a+\varepsilon$, co oznacza z definicji że (y_n) ma granicę a.

Ciąg monotoniczny to ciąg niemalejący lub nierosnący, tj.

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{lub} \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Tw. **Ciąg monotoniczny w R jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony**

Przykład: $x_n = 1-1/n$ jest rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny, natomiast ciąg $x_n = 2n$ jest rosnący i nieograniczony, a więc jest rozbieżny

Dla ciągu niemalejącego (nierosnącego) granicą jest sup{a_n} (inf{a_n})

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Ciąg jest **rozbieżny do plus nieskończoności**, gdy

$$\forall M > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > M$$

a do **minus nieskończoności**, gdy

$$\forall M > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n < -M$$

Przykłady: n, n^2

-n, -n!

co piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

$$x = \infty \text{ lub } x = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

$$x = 0,\ x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty \text{ lub } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$$

$$a \in R - \{0\}, x = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a x_n) = \operatorname{sgn}(a)\infty$$

$$x, a \in R, y = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (y_n + a x_n) = \infty$$

$$x \in R - \{0\}, y = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (y_n x_n) = \operatorname{sgn}(x)\infty$$

signum - znak

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1 \text{ dla } z > 0 \\ -1 \text{ dla } z < 0 \end{cases}$$

Inny zapis powyższych twierdzeń:

$$n \to \infty$$

$\infty + c = \infty, \quad c \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $n + 2 \to \infty$

$\infty \cdot c = \operatorname{sgn}(c)\infty$ $\qquad$ $3n \to \infty, \quad -2n \to -\infty$

$\infty + \infty = \infty$ $\qquad$ $n + 3n \to \infty$

$\dfrac{c}{\infty} = 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{n} \to 0$

$\dfrac{a}{0} = \pm\infty, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{\frac{1}{n}} \to \infty$

ale: $\infty - \infty, \infty \cdot 0, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ są nieoznaczone

$$(n+2) - n \to 2, \quad n^2 - n \to \infty, \quad n^3 - n^3 \to 0$$

$$n^2 \frac{1}{n} \to \infty, \quad n \frac{1}{n} \to 1, \quad n \frac{1}{n^4} \to 0$$

Granice szczególnych ciągów

ciąg	granica	warunek
1. $\frac{1}{n^a}$	0	$a>0$
2. a^n	0	$0 \le a < 1$
3. $\sqrt[n]{a}$	1	$a>0$
4. $\sqrt[n]{n}$	1	
5. $\frac{n^b}{a^n}$	0	$a>1, b\in R$
6. $\frac{a^n}{n!}$	0	$a>0$
7. $\frac{n!}{n^n}$	0	

Tw. $a_n \to 0,\ \ b_n -$ ograniczony $\Rightarrow a_n b_n \to 0$

Granica ilorazu wielomianów:

$$P^{(k)}(n) = a_k n^k + \ldots + a_0$$

$$Q^{(l)}(n) = b_l n^l + \ldots + b_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^{(k)}(n)}{Q^{(l)}(n)} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & \text{dla } k=l \\ 0 & \text{dla } k<l \\ \operatorname{sgn}(a_k b_l)\infty & \text{dla } k>l \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^a = x^a, \qquad x>0$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x, \qquad a>0$$

$$\lim_{n\to\infty} {y_n}^{x_n} = y^x, \qquad y>0$$

1. Weźmy $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$. Wtedy natychmiast $\frac{1}{n^a} < \varepsilon$

2. Weźmy $n_0 > \log_a \varepsilon$. Wtedy natychmiast $a^n < \varepsilon$

3. Dla $a \geq 1$ mamy $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Weźmy $b_n = \sqrt[n]{a} - 1,$ więc $a = (1 + b_n)^n$.

   Z nierówn. Bernoulliego $a > 1 + nb_n$, zatem $0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$.

   Z tw. o trzech ciągach $\mathrm{b_n} \to 0$, czyli $\sqrt[n]{a} \to 1$.

   Dla $a \in (0,1)$ mamy $\frac{1}{\mathrm{a}} > 1$, a więc $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1,$czyli tw. dla dowolnego a>0

4. Podobnie, korzystając z

$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1, \; n = (1 + b_n)^n \text{ i nierówn. } (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2,$$

$$\text{mamy n} \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2, \;\text{ zatem }\; 0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Z tw. o trzech ciągach $\mathrm{b_n} \to 0$, czyli $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Przykłady

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

$\sqrt[n]{2} \to 1,$ więc z tw. o trzech ciągach $a_n \to 3.$

$$b_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{2n^3 - 1} = \frac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2 + 5^n}{1 + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2 / 5^n + 1}{1/5^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

$c_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+1},\ x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1} \to 0,$ y$_n$ $\sin n!$ - ograniczony $\Rightarrow c_n \to 0$

$$d_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n} + 1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Hierarchia rozbieżności do nieskończoności

- ...

$$n^{n^n}$$

$$\dots$$

$$n^n$$

$$n!$$

$$a^n, a > 1$$

$$n^a, a > 0$$

$$\log n$$

$$\log(\log n)$$

$$\dots.$$

często spotykane przypadki

szybciej

wolniej

Tw. Stolza

(x_n) i (y_n) takie, że

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } y_{n+1} > y_n \\ \text{b) } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \\ \text{c) istnieje granica } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

Przykład:

$$a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}, \; p \in \mathbb{N}$$

$$x_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p, \; y_n = n^{p+1}$$

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^p$$

$$y_{n+1} - y_n = (n+1)^{p+1} - n^{p+1} = n^{p+1} + \binom{p+1}{1} n^p + \ldots + 1 - n^{p+1} = (p+1)n^p + \ldots + 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1}{p+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{p+1}$$

Liczba e

John **Napier** (1550-1617)

Leonhard **Euler** (1707-1783)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182...$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(a_n) jest rosnący, bo $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} =$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Z nier. Bernoulliego $\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\dfrac{1}{n+1}$, zatem $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

Ciąg (b_n) jest malejący, bo

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) = 1+\frac{1}{n(n+2)^2} > 1$$

Ponieważ $a_n<b_n$ i $b_1=4$, ciąg (a_n) jest rosnący i graniczony. Z tw. o ciągu monotonicznym (a_n) jest zbieżny, $\lim a_n=e$, $2 < e < 4$. Również $\lim b_n=e$, ponieważ $b_n= a_n(1+1/n)$.

Kolejne, coraz lepsze ograniczenia od dołu i od góry na liczbę e:

n	a_n	b_n
1	2	4
2	2.25	3.75
5	2.48...	2.98...
10	2.59...	2.85...
1000	2.716...	2.719...

Interpretacja „bankowa" – procent składany

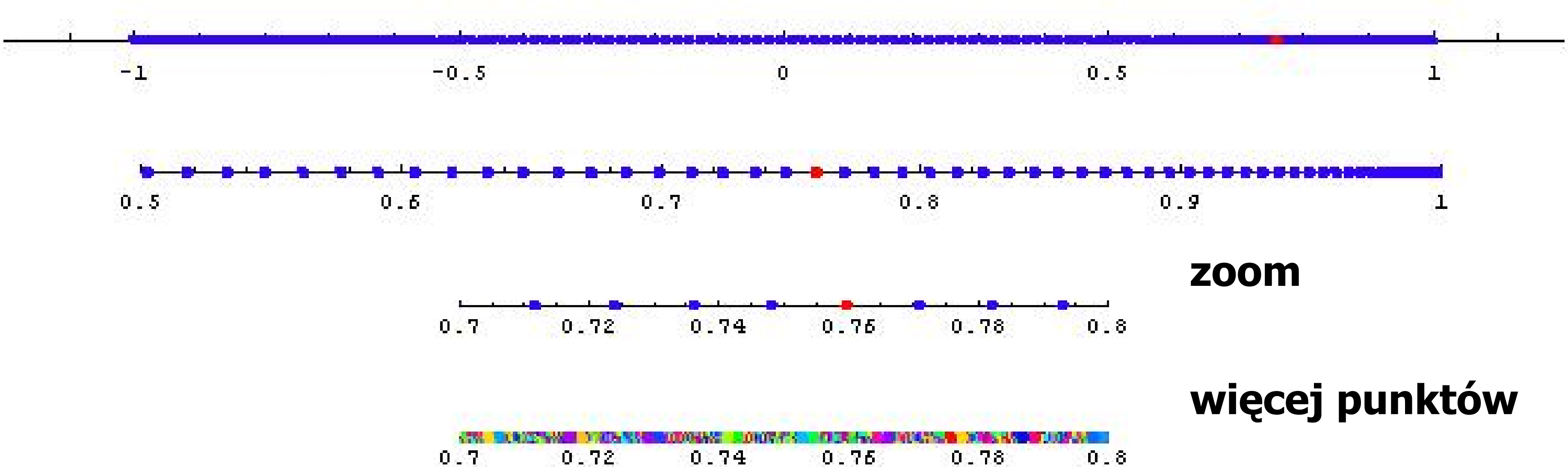
Oto jak można interpretować liczbę e. Pewien bank daje za roczny depozyt 100% zysku. Odsetki mogą być doliczane do kwoty podstawowej w różny sposób. Na przykład odsetki mogą być doliczone na koniec roku. Wówczas inwestując 1 zł, na koniec roku będziemy mieć 2 zł. Jeśli odsetki doliczane są co pół roku (inaczej mówiąc są dwa okresy kapitalizacji), to na koniec roku będziemy mieć $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ [zł]. Jeśliby kapitalizacja odbywała się co kwartał, wówczas na koniec roku mielibyśmy $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}44$ [zł]. Jeśliby odbywała się co miesiąc – mielibyśmy $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61$ [zł], codziennie – $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}71$ [zł]. Gdyby zaś kapitalizacja odbywała się w sposób ciągły (czyli liczba okresów kapitalizacji dążyłaby do nieskończoności), wówczas na koniec roku mielibyśmy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ [zł]}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x$$

Ciągi ograniczone

Tw. **Bolzano-Weierstrassa: Ciąg ograniczony o wyrazach w R posiada podciąg zbieżny**



Przykład: $a_n = \cos(4n)$

D: (konstrukcja poprzez kolejne podziały przedziału [a,b])

(x_n) – ograniczony $\Rightarrow x_n \in [a,b]$

Jeden z przedziałów $[a,(a+b)/2],[(a+b)/2,b]$

zawiera nieskończenie wiele elementów, itd.

Konstruujemy indukcyjnie przedzialy $P_k = [a_k, b_k]$:

1. $b_k - a_k = 2^{-k}(b-a)$
2. $a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_k$
3. P_k zawiera nieskończenie wiele elementów (x_n)

Wówczas można zdefiniować rosnący ciąg n_k oraz $y_k = x_{n_k} : a_k \le y_k \le b_k$.

Ponieważ (a_k) jest rosnący i ograniczony, (a_k) jest zbiezny do granicy g.

Nastepnie $\lim_{\mathrm{k}\to\infty} b_k = \lim_{\mathrm{k}\to\infty}(a_k + 2^{-k}(b-a)) = g$.

Z Tw. o trzech ciągach również $\lim_{\mathrm{k}\to\infty} y_k = g \quad \therefore$

Tw. **Ciąg ograniczony o wyrazach w $\mathbf{R^n}$ ma podciąg zbieżny**

Tw. **Zbiór granic częściowych ciągu ograniczonego zawiera element największy i najmniejszy (granice dolna i górna)** granica górna: $\limsup_{n\to\infty} x_n$

granica dolna: $\liminf_{n\to\infty} x_n$

Dla ciągu zbieżnego granice dolna i górna są równe granicy ciągu

Tw. $(x_n),(y_n)$ – ograniczone ciągi w $\mathbb{R}$.

Oznaczmy $\underline{x}_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, $\overline{x}_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Wtedy

a) $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n$

b) gdy $x_n \le y_n$ to $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n$, $\limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n$

Przykład: $x_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k}+1\right) = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-1\right) = -1$$

Jeszcze o liczbie e

$x_n \to \infty,\ y_n \to 0,\ y_n \neq 0 \Rightarrow$

a) $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$, b) $\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{-x_n} \to e$, c) $(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} \to e$

D: a) $p_n = [x_n]$ - najwieksza liczba $\in \mathbb{Z}$ nie większa od x_n. Wtedy

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1}$$

Z definicji e i tw. o granicach częsciowych ciągu zbieżnego dwa skrajne ciągi dążą do e, więc z tw. o trzech ciągach wynika a).

D: b) $\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{-x_n} = \left(\frac{x_n}{x_n-1}\right)^{x_n} = \left(1+\frac{1}{x_n-1}\right)^{x_n-1}\left(1+\frac{1}{x_n-1}\right) \to e$

D: c) bierzemy $y_n = \frac{1}{x_n}$

$$y_n \to 0, \quad y_n \neq 0, \quad a_n \to a$$

Wtedy $\left(1+y_n\right)^{\frac{a_n}{y_n}} = \left[\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{a_n} \to e^a$

np. $\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{3n-1} = \left[\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{3n-1}{2n+1}} \to e^{\frac{3}{2}}$

Szeregi

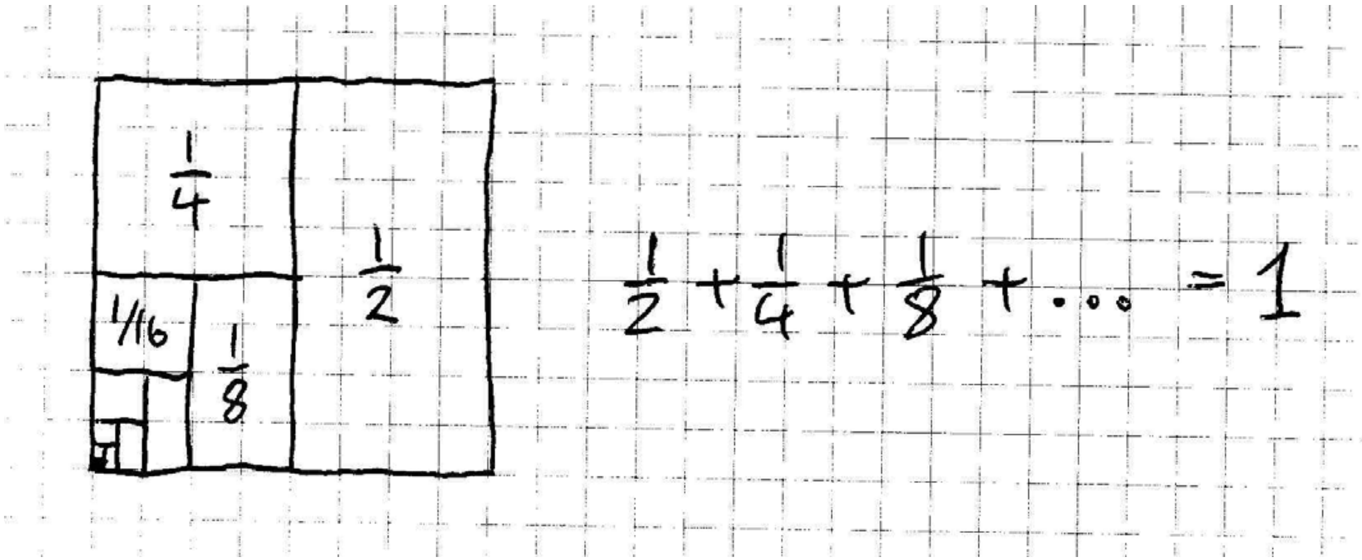
Paradoks Zenona z Elei (ok. 500 p.n.e.) – Achilles nigdy nie dogoni żółwia
Achilles porusza się z prędkością v_1, a żółw z prędkością $v_2 = qv_1 < v_1$. Początkowa odległość wynosi a. Jeśli Achilles przebiegnie drogę długości a, to żółw przejdzie w tym czasie drogę qa. Po pokonaniu przez Achillesa drogi qa żółw pokona drogę q^2a, która znowu pozostaje do pokonania Achillesowi, w kolejnym kroku q^3a, itd. A zatem Achilles nigdy nie dogoni żółwia!

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{(D. przez indukcję)}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1}{1-q}, \text{ ponieważ } |q|<1 \text{ (suma szeregu geometrycznego)}$$

$$t = \frac{S}{v_1} = \frac{a}{(1-q)v_1} = \frac{a}{v_1 - v_2} \quad \text{- czas, po jakim A. dogoni ż.}$$

Interpretacja geometryczna szeregu geometrycznego



Nieindukcyjne wyprowadzenie wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$S(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = 1 + q(1 + q + q^2 + \ldots) = 1 + qS(q)$$

(co ma sens, gdy szereg jest zbieżny, tu: $|q| < 1$)

Wtedy $S(q) = \dfrac{1}{1-q}$

Definicja **szeregu**:

$(a_k), a_k \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ wyjściowy ciąg liczbowy

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$ **sumy częściowe** szeregu

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$ **ciąg sum częściowych = szereg**

$S_n = a_1 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n$$

granica ciągu sum częściowych
- suma szeregu (też: szereg)

jeśli istnieje – szereg **zbieżny**

czasem wygodniej zacząć od $n = m \in \mathbb{Z}$: $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$

Dygresja - przenumerowanie sumy: $\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{l=m+1}^{N+m} a_{l-m}, \quad l = k + m$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$ bo

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Tw: Warunkiem **koniecznym** zbieżności szeregu jest zbieżność wyrazów do zera:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Nie jest to warunek dostateczny

$$\text{D:} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$$

(geometryczny zbieżny dla |q|<1,
rozbieżny dla |q| ≥1)

Szereg **harmoniczny:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots$$

podciąg ciągu sum częściowych

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2\cdot\frac{1}{4} = S_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\cdot\frac{1}{8} = 1 + 3\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 1 + 4\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} \to \infty \qquad S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} > S_{2^{n-1}} + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = 1 + n\cdot\frac{1}{2}$$

Tw. Suma i różnica szeregów, mnożenie przez liczbę:

$$\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n,\ \ \sum(a_n-b_n)=\sum a_n-\sum b_n,\ \ \sum ca_n=c\sum a_n$$

Tw. Dwa szeregi różne skończoną liczbą wyrazów są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Tw. **Kryterium porównawcze**:

$$\exists n_0 \forall n>n_0:\ \ |z_n|\le a_n \Rightarrow \left(\sum a_n \text{ - zbieżny} \Rightarrow \sum z_n \text{ - zbieżny}\right)$$
$$\wedge\left(\sum z_n \text{ - rozbieżny} \Rightarrow \sum a_n \text{ - rozbieżny}\right)$$

Tw. (*) **Kryterium ilorazowe**: (a_n) i (b_n) – ciągi liczb rzeczywistych, $b_n>0$, oraz $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ =c. Wówczas

a) $\sum b_n$ - zbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ - zbieżny

b) $c\neq 0$, $\sum b_n$ - rozbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ - rozbieżny

Szereg $\sum z_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**, jeśli $\sum |z_n|$ jest zbieżny

W przeciwnym razie mówimy o zbieżności warunkowej.

Tw. **Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny**.

Przykłady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)m}=1,\quad \frac{1}{n^2}\le\frac{1}{(n-1)n},\quad n\ge 2\quad\left(\text{mamy }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\frac{1}{n^a}\ge\frac{1}{n},\quad a\le 1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}\ \text{- rozbieżny dla } a\le 1\ \text{(uogólniony harmoniczny)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}=\zeta(a)\quad\text{(dzeta Riemanna) - zbieżny dla a>1, bo}$$

$$S_{2^n}=1+\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right)+\left(\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{7^a}\right)+\ldots\le 1+\frac{2}{2^a}+\frac{4}{4^a}+\ldots=$$

$$=1+2^{1-a}+2^{2(1-a)}+\ldots=\frac{1}{1-2^{1-a}}=M$$

S_{2^n} - ograniczony $\Rightarrow S_n$ - ograniczony $\wedge$ S_n - rosnący $\Rightarrow S_n$ - zbieżny

P(n),Q(n) - wielomiany stopnia k i m $\Rightarrow$

$$\sum\frac{P(n)}{Q(n)}\ \text{zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy m>k+1}$$

Kryterium d'Alamberta

a) $\sum a_n$ jest zbieżny, jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

b) $\sum a_n$ jest rozbieżny, jeżeli $\exists n_0 \forall n>n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$

c) $\sum a_n$ jest zbieżny lub rozbieżny, jeżeli $\liminf\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq 1\leq \limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}-\text{zbieżny,bo } \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}<1$$

$$\sum b_n=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\ldots$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n=0,\quad \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}=\infty \quad \text{- brak rozstrzygnięcia}$$

podobnie dla $\sum\frac{1}{n}, \sum\frac{1}{n^2}$

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

Niech $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

a) $\lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - zbieżny

b) $\lambda > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - rozbieżny

c) $\lambda = 1 \Rightarrow \sum a_n$ - zbieżny lub rozbieżny

$$\sum a_n = \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \tfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ - zbieżny}$$

Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze od kryterium d'Alamberta, ale trudniej je stosować. Oba kryteria nie są zbyt subtelne w przypadku rozbieżności, gdyż rozbieżność wynika z faktu, że $\lim a_n \neq 0$.

Kryterium Leibniza

Szereg naprzemienny (znakozmienny):

$$\sum (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,\ \ a_n > 0$$

Kryterium Leibniza: jeżeli (a_n) jest nierosnący i $a_n \to 0$, to $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Szereg **anharmoniczny:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \ln 2$

Inne kryteria zbieżności szeregów

Kryterium zagęszczające:

$$a_n > 0 \wedge a_n \to 0 \wedge a_n > a_{n+1} \Rightarrow \left(\sum a_n - \text{zb.} \Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} - \text{zb.}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} - \text{zb. dla } a > 1, \text{ bo } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \left(\log 2^n\right)^a} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\log 2)^a} - \text{zb. dla } a > 1$$

Kryterium Abela:

$$\sum a_n - \text{zb.} \wedge (b_n) - \text{ograniczony i monotoniczny} \Rightarrow \sum a_n b_n - \text{zb.}$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 1.32\ldots$$

Kryterium Dirichleta:

$$\mathrm{S_m} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{m}} a_n - \text{ograniczony} \wedge (b_n) - \text{ograniczony i monotoniczny} \wedge b_n \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum a_n b_n - \text{zbieżny}$$

$$\sin kx = \frac{\cos((k - \frac{1}{2})x) - \cos((k + \frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \sin nx\right| = \left|\frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((m + \frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}\sin nx < \infty$$

Kryterium Raabego:

$a_n > 0$

a) $\exists r > 0 \ \forall n > n_0 : n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \Rightarrow \sum a_n -$ zb.

b) $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \sum a_n -$ rozb.

Szereg potęgowy $\sum c_n z^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

Tw. Abela: $\exists \beta \in \mathbb{C}: \sum c_n \beta^n$ - zbieżny $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum c_n z^n$ jest bezwzględnie zbiezny dla $|z| < |\beta|$.

$A = \{z : \sum c_n z^n \text{ zbieżny}\}, \quad r = \sup\{|z| : z \in A\}$ promień zbieżności szeregu potęgowego

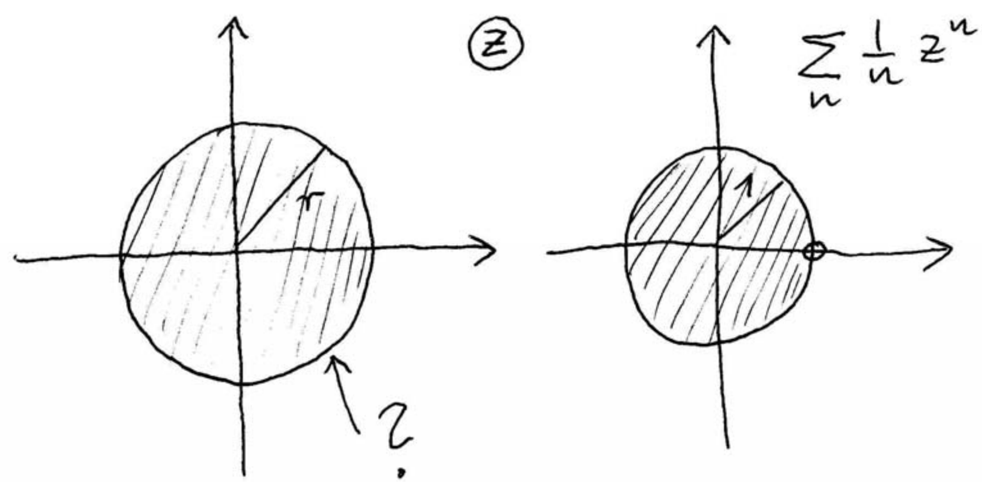
Tw. Jeżeli $\sum c_n z^n$ ma promień zb. r, to jest bezwzględnie zbieżny w kole $|z| < r$ i rozbieżny dla $|z| > r$. Na kole $|z| = r$ tw. nie rozstrzyga.

Tw. Cauchy'ego-Hadamarda: Jeżeli $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, to

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} & \text{dla } \lambda \in (0,\infty) \\ 0 & \text{dla } \lambda = \infty \\ \infty & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}$$

$\sum \dfrac{z^n}{n!}$ - $r = \infty$

$\sum \dfrac{z^n}{n}$ - $r = 1$



Rozwinięcie liczby e w szereg

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$t_n \to e$, (s_n) – monotoniczny i ograniczony, więc zbieżny

$$t_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$t_n \le s_n \Rightarrow e \le \lim_{n\to\infty} s_n \quad (*)$$

Dla $m \le n$ mamy $t_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{m!} = s_m$$

$$e \le \lim_{m\to\infty} s_m \quad (**)$$

$(*)(**) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = e$, czyli $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

Ponadto $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

Zmiana kolejności sumowania

Tw. W szeregu bezwzględnie zbieżnym dowolna zmiana kolejności sumowania nie zmienia granicy, np.

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{128}+\ldots=\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{128}+\tfrac{1}{64}+\ldots$$

Tw. Riemanna: Dla szeregu warunkowo (czyli nie bezwzględnie) zbieżnego odpowiednio zmieniając kolejność sumowania można otrzymać dowolną skończoną granicę lub szereg rozbieżny.

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\ldots=\log 2$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\ldots=2\log 2-\frac{1}{2}$$

Iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n=\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$$

Dla $z=1$ dostajemy z definicji iloczyn Cauchy'ego szeregów.

Tw. $\sum |a_n| \wedge \sum b_n - \text{zbieżne} \Rightarrow \sum c_n - \text{zbieżny}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = c = ab$$

Warunek bezwzględnej zbieżności przynajmniej jednego szeregu jest tu istotny. Iloczyn dwóch szeregów zbieżnych warunkowo może być rozbieżny.

$$e^x e^y=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{l!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{(n-m)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{x^m y^{n-m}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}$$

Iloczyny nieskończone

(a_n) – ciąg liczbowy, $p_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{1})(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\dots(1-\tfrac{(-1)^n}{n}) = \lim_{n\to\infty}\tfrac{2}{1}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{4}{3}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{6}{5}\,\tfrac{5}{6}\dots(1-\tfrac{(-1)^n}{n}) = 1$$

Tw. $\sum a_n$ –bezwzględnie zbieżny $\Rightarrow \prod(1+a_n)$ - zbieżny

Tw. $a_n > -1,\ \ a_n > 0 \vee a_n < 0 \Rightarrow \left(\sum a_n \text{ –zbieżny} \Leftrightarrow \prod(1+a_n) \text{ - zbieżny}\right)$

Ciągi i szeregi funkcyjne

$f_n : X \to \mathbb{C}, \quad f : X \to \mathbb{C}$

Zb. jednostajna (n_0 nie zależy od x):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

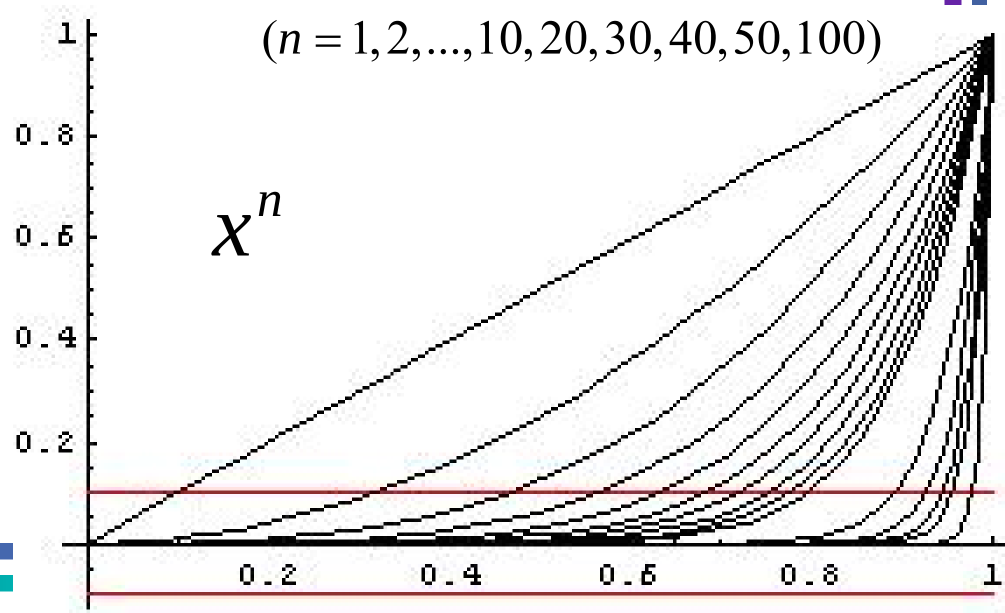
Zb. punktowa (n_0 może zależeć od x):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Leftrightarrow \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

Szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie (punktowo) jeżeli ciąg S_n jest zbiezny jednostajnie (punktowo)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Zbieżność niejednostajna



Kryterium Weierstrassa

Tw. Kryterium Weierstrassa:

$$\exists n_0 \exists (a_n), a_n \in \mathbb{R} \forall n > n_0 : |f_n(x)| \leq a_n \wedge \sum a_n - \text{ zbieżny } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum f_n(x) - \text{jednostajnie zbieżny}$$

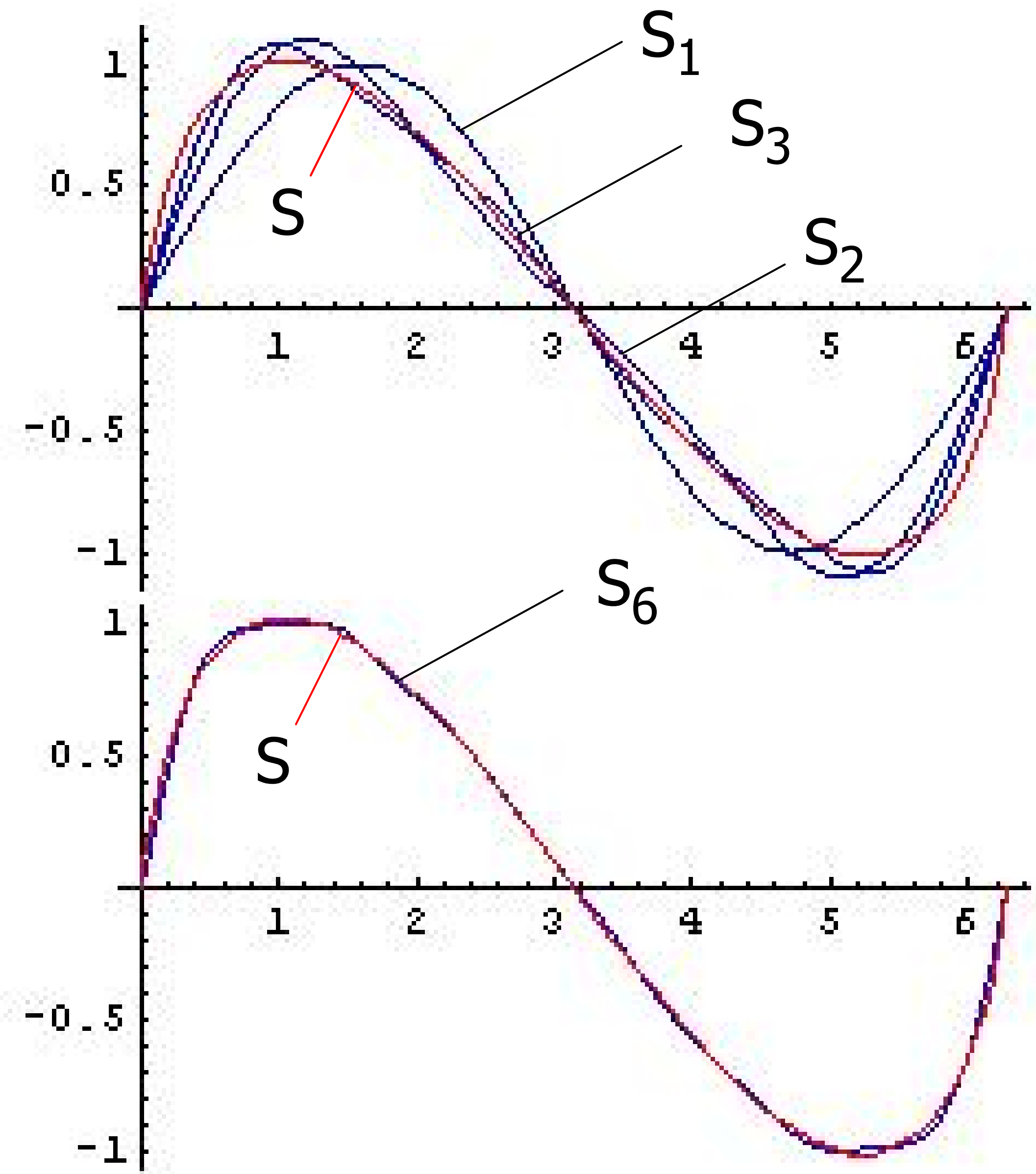
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} - \text{jednostajnie zbieżny}$$

Tw. Szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ o promieniu zbieżnoci r jest jednostajnie zbieżny dla $|z| \leq r_1$, gdzie $0 < r_1 < r$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^2}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

Zbieżność jednostajna



Ciągłość

Zbiory otwarte

Rozważamy przestrzeń metryczną (X,ρ)

Otoczenie punktu x: dowolna kula otwarta K(x,r)

Sąsiedztwo: K(x,r)-{x}

Punkt skupienia x zbioru A: każde sąsiedztwo punktu x zawiera jakiś punkt y zbioru A (x jest różne od y). Uwaga: x nie musi należeć do A

Punkt izolowany (zewnętrzny) x zbioru A: x należy do A ale nie jest punktem skupienia (istnieje sąsiedztwo x które nie zawiera żadnych punktów skupienia)

Punkt wewnętrzny x zbioru A: istnieje otoczenie x zawarte w A

Punkt brzegowy zbioru A: punkt należący do X, który nie jest ani punktem wewnętrznym, ani zewnętrznym zbioru A. Uwaga: nie musi należeć do A

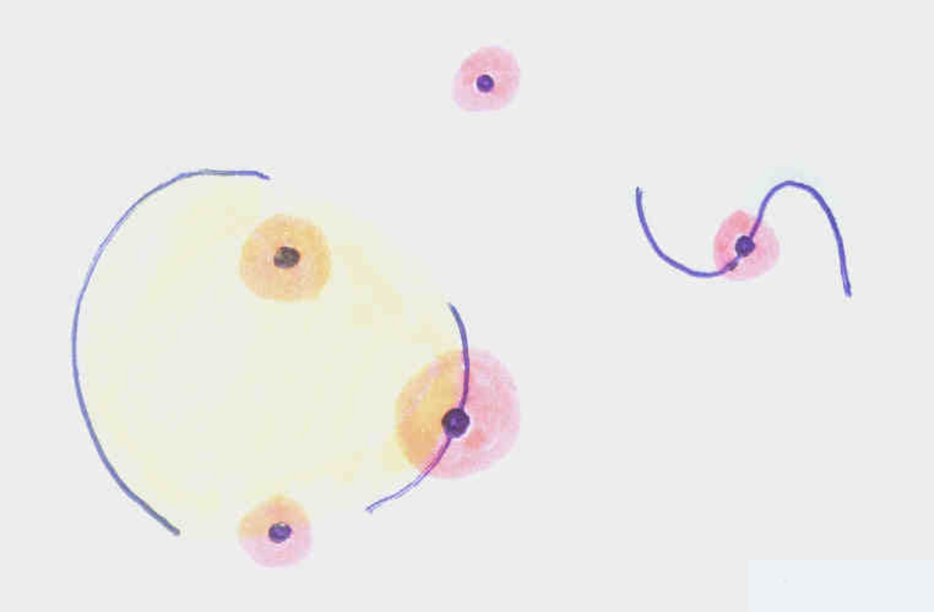
Zbiór otwarty: każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym

Zbiór domknięty: zawiera wszystkie swoje punkty skupienia

Zbiór doskonały: domknięty i każdy jego punkt jest punktem skupienia

Dopełnienie zbioru A: X-A

Zbiór ograniczony A: istnieje liczba M i y należące do X takie, że dla każdego x należącego do A zachodzi $\rho(x,y)<M$

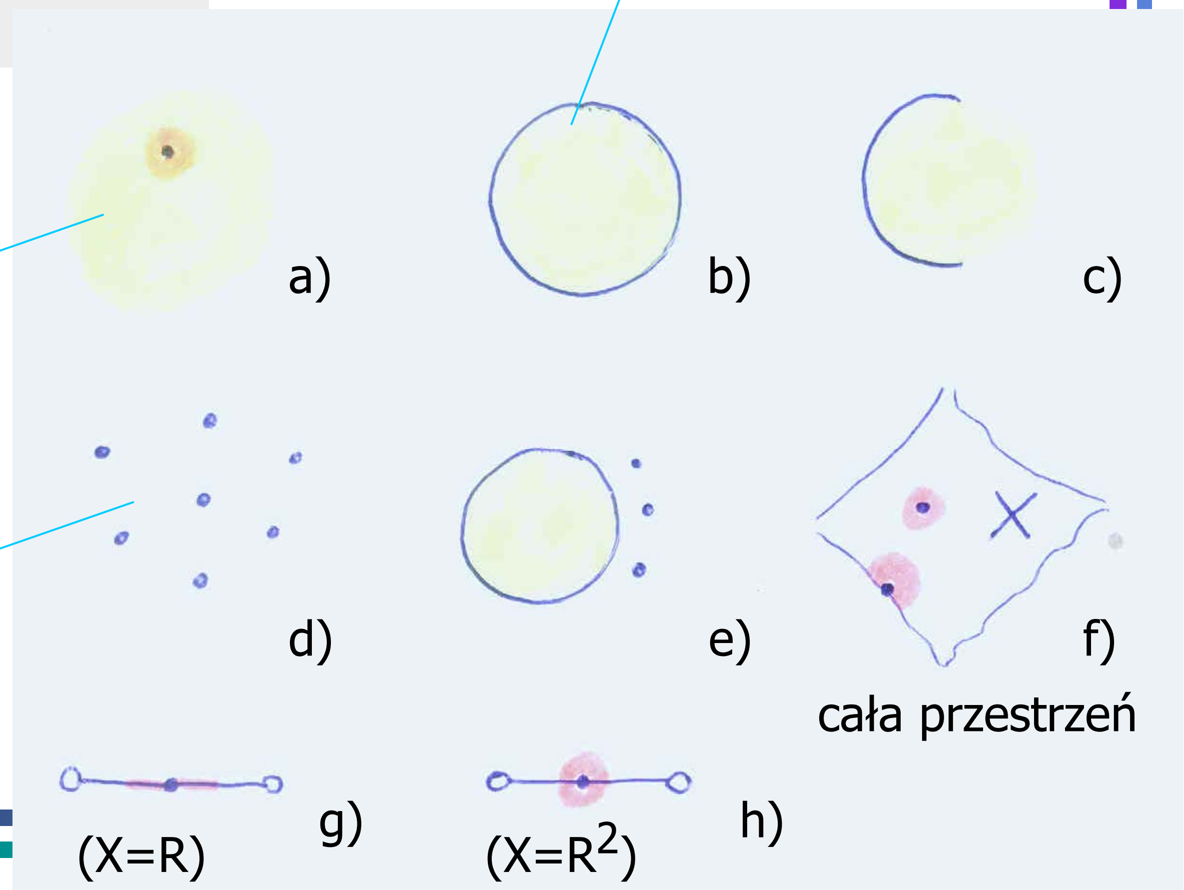


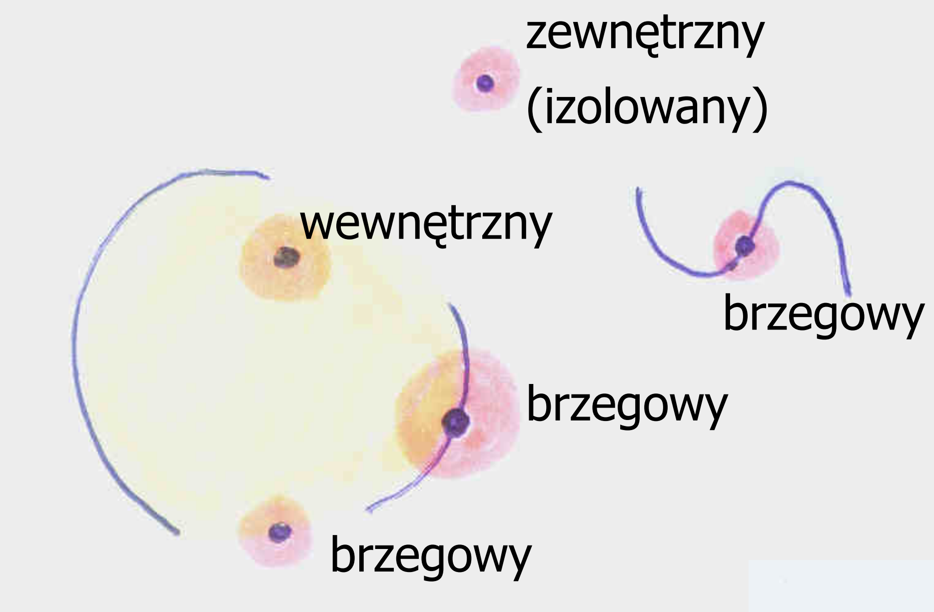
Przykłady

koło wraz z okręgiem

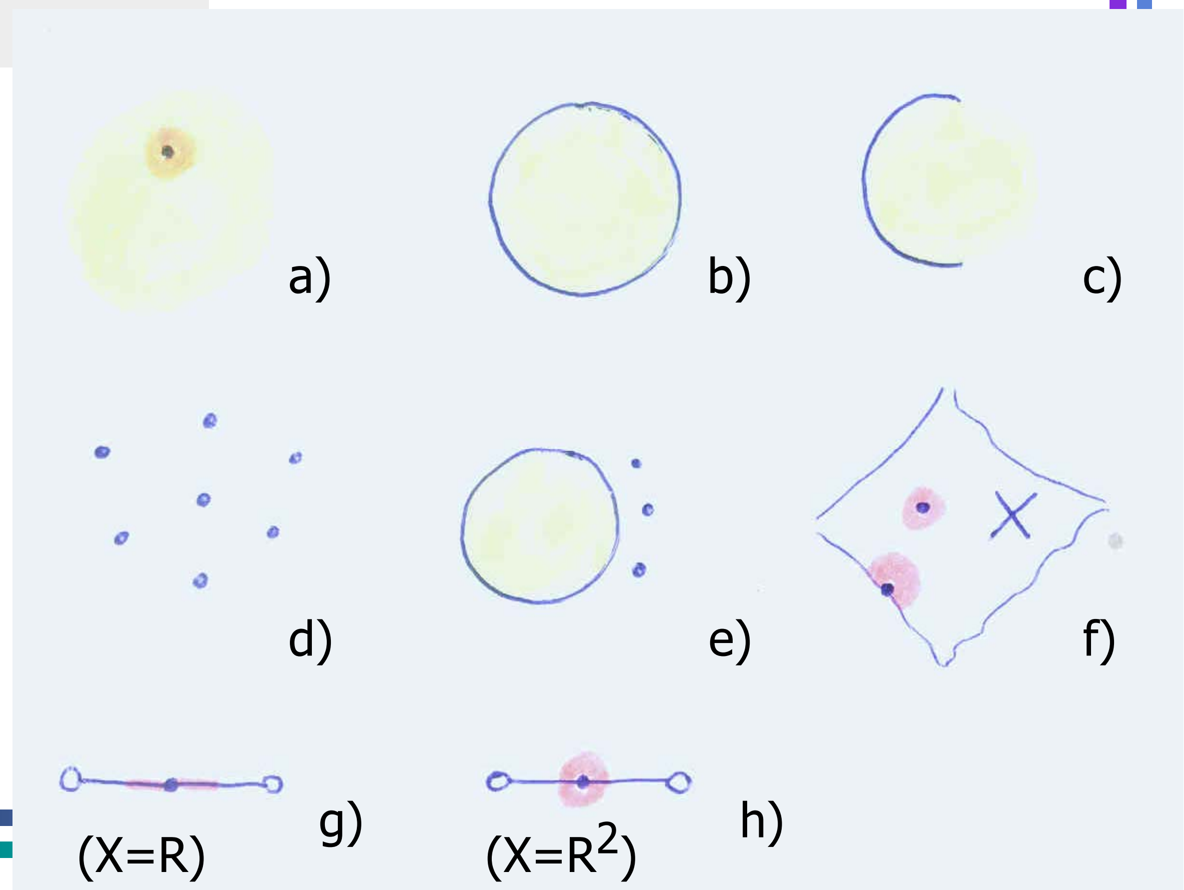
wnętrze koła

pewien skończony
zbiór punktów





	otwarty	domk- nięty	dosko- nały
a)	tak	nie	nie
b)	nie	tak	tak
c)	nie	nie	nie
d)	nie	tak	nie
e)	nie	tak	nie
f)	tak	tak	tak
g)	tak	nie	nie
h)	nie	nie	nie

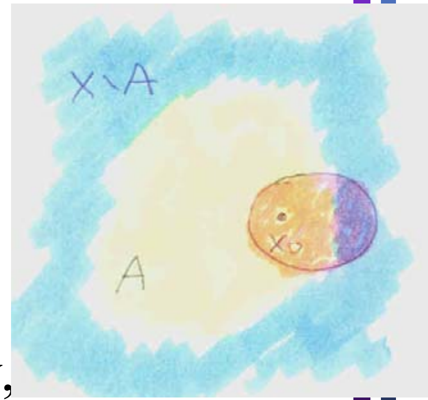


Tw. A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie X-A jest domknięte

1) $q \Rightarrow p$

Weźmy dowolny $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \notin X - A$, bo $A \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow$ x_0 nie jest pkt. skupienia $X - A$ (bo $X - A$ jest domknięty, więc zawiera wszystkie swoje pkt. skupienia) $\Rightarrow$ $\exists K(x_0, r) : K \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow K \subset A \Rightarrow A$ jest otwarty.

2) $p \wedge \sim q$



$X - A$ nie jest domknięty $\Rightarrow$ nie zawiera wszystkich swoich pkt. skupienia $\Rightarrow \exists$pkt. skupienia x_0 zbioru X - A nie należący do X - A, czyli $x_0 \in A$. Zatem każde otoczenie $K(x_0, r)$ zawiera pkt. zbioru $X - A$, czyli $K \cap (X - A) \neq \emptyset$ (*). Z drugiej strony, A jest otwarty, wieęc $\exists K(x_0, r) : K \subset A$, czyli $K \cap (X - A) = \emptyset$, co przeczy (*). A więc $p \Rightarrow q$.

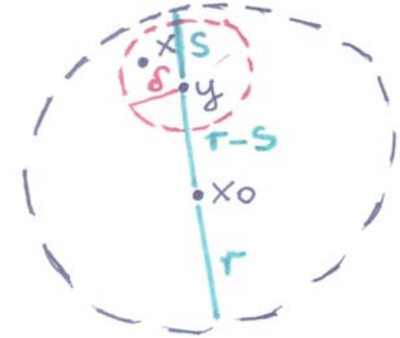
Tw. Otoczenie jest zbiorem otwartym

$$\forall x \in K(x_0, r) \exists \delta : K(y, \delta) \subset K(x_0, r)$$

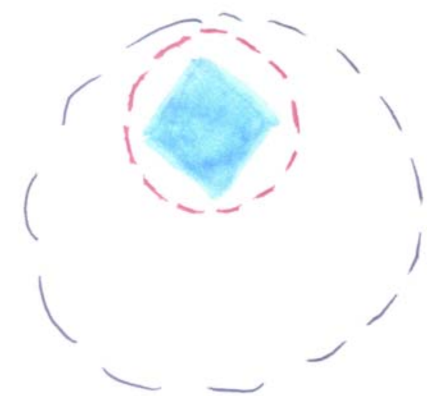
D: Oznaczmy $\rho(x_0, x)$ jako r - s. Wtedy

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_0) < \delta + r - s.$$

Biorąc np. $\delta = s/2$ mamy $K(y, \delta) \subset K(x_0, r)$



Tw. Zbiór otwarty (domknięty) w metryce słabszej jest otwarty (domknięty) w metryce silniejszej. W metrykach równoważnych rodziny zbiorów otwartych są takie same.



Tw. Suma dowolnej (nawet nieskończonej) liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, iloczyn dowolnej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, iloczyn skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Ale: $\bigcup_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0,1)$

Dla X=R otoczeniami są przedziały otwarte (x-r,x+r)

Sąsiedztwa lewo- i prawostronne punktu x: (x-r,x), (x,x+r)

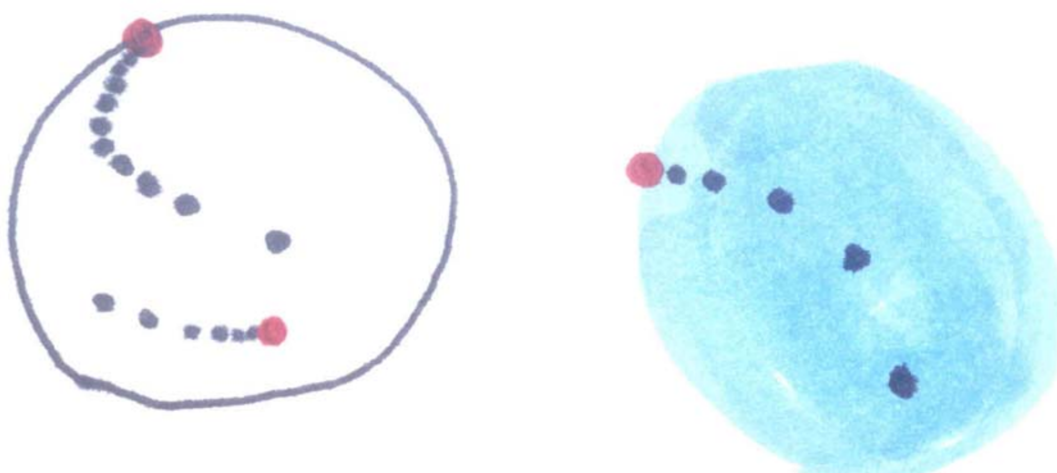
$(a,b),(-\infty,a),(a,\infty),(-\infty,\infty)-$ otwarte

$\{a\},[a,b],(-\infty,a],[a,\infty),(-\infty,\infty)-$ domkniete

Wnętrze zbioru A – największy zbiór otwarty zawarty w A

Domknięcie zbioru A – najmniejszy zbiór domknięty zawierający A

Tw. Zbiór a jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbieżnego punktów ze zbioru A jego granica należy do A



Zbiór A jest zwarty jeśli dowolny ciąg punktów zbioru A zawiera podciąg zbieżny do punktu należącego do zbioru A

Tw. Zbiór domknięty i ograniczony w R jest zwarty

Zbiór B={1,1/2,1/3,1/4,...} nie jest zwarty, bo ciąg (1/n) jest zbiezny to 0, a 0 nie należy do B.

Zbiór C={0,1,1/2,1/3,1/4,...} jest zwarty (uzwarcenie)

Tw. Zbiór domknięty i ograniczony w R^n jest zwarty

Tw. Zbiór zwarty jest domknięty

Ciągi Cauchy'ego, przestrzeń zupełna

Ciąg Cauchy'ego: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathrm{n}_0 \forall n, m > n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

(coraz dalsze wyrazy są coraz bliższe siebie)

W pewnym sensie mówimy o zbieżności bez specyfikowania granicy

Tw. Ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego. Ciąg Cauchy'ego jest ograniczony

Przestrzeń nazywamy zupełną jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny (do granicy należącej do tej przestrzeni)

Tw. Przestrzeń zwarta jest zupełna

Tw. R^n jest zupełna

Granica funkcji

Def. ciągowa (Heinego):

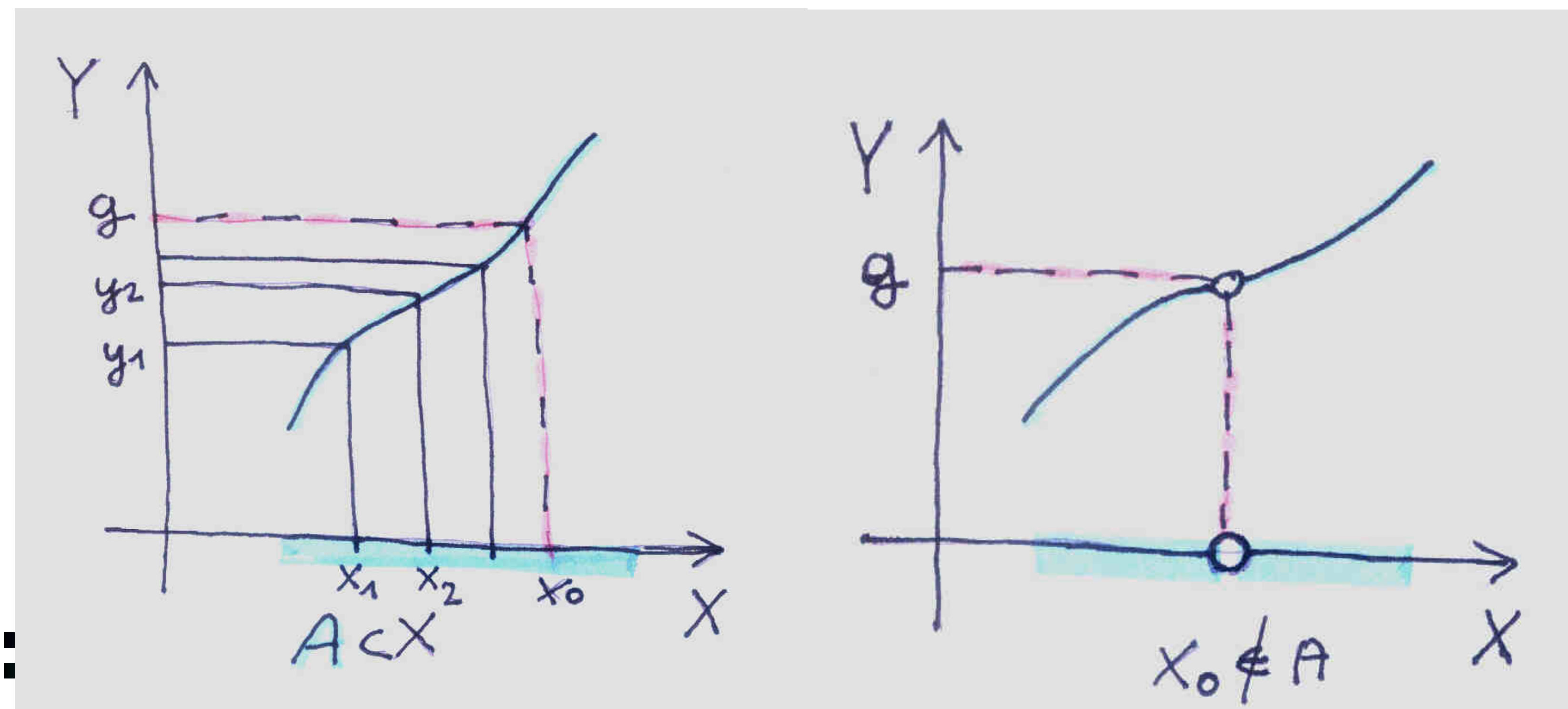
X, Y - przestrzenie metryczne, x_0 - pkt. skupienia zbioru $A \subset X$.

Rozważmy dowolny $(x_n): x_n \in A, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Mówimy, że

$f: A \to Y$ ma granicę g w x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Jeżeli $g = f(x_0)$, to f jest ciągła w x_0

Jeżeli f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny, to jest ciągła



Granice jednostronne i niewłaściwe

Granica lewostonna (prawostronna): granica funkcji obciętej do zbioru $A \cap (-\infty, x_0)$ $(A \cap (x_0, \infty))$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Ciągłość lewo- i prawostronna

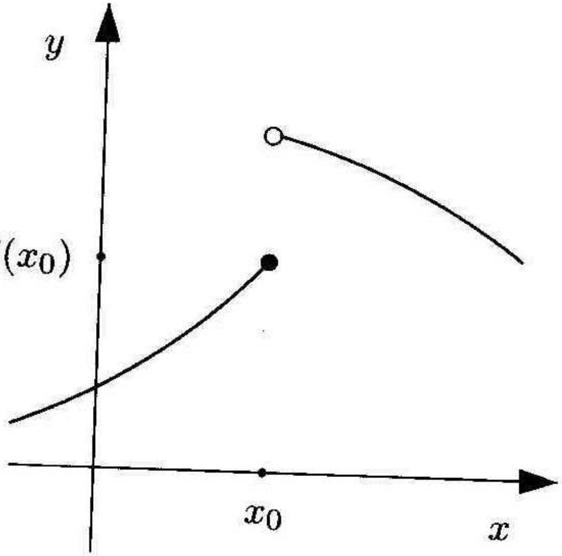
Granice w $\pm\infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = g$$

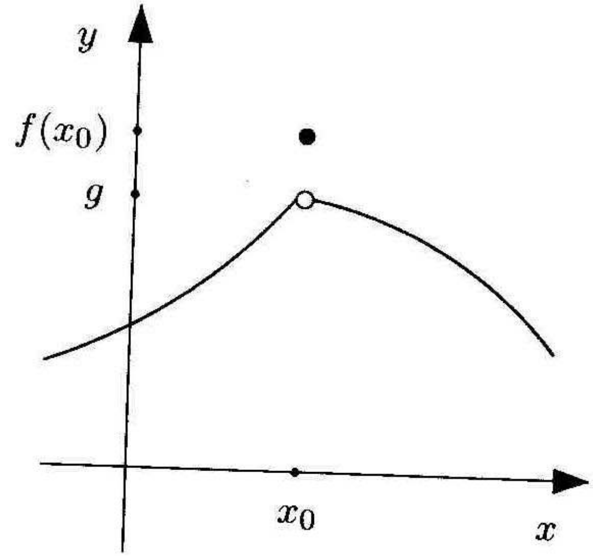
analogicznie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$

Granice nieskończone

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$



Rys. 33

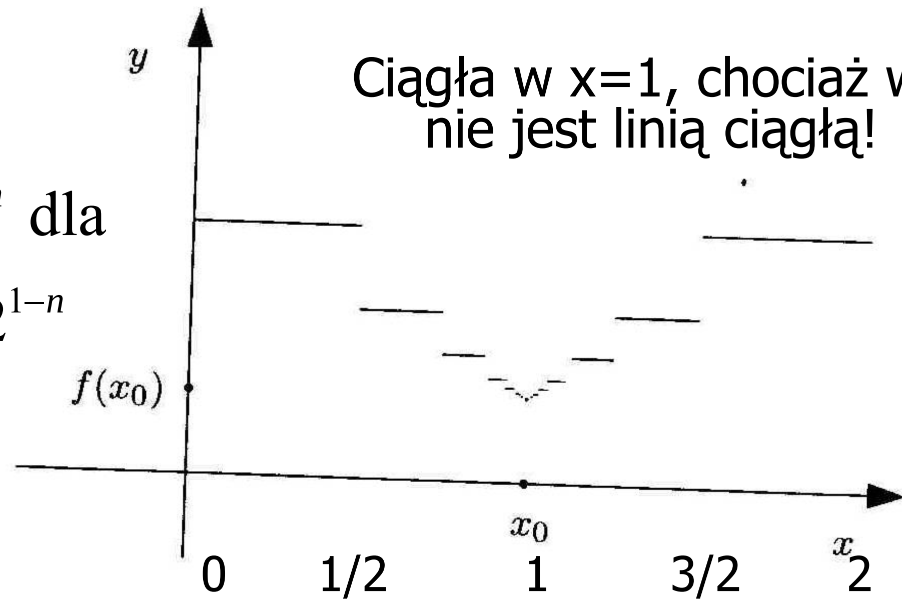


Rys. 34

Ciągła w x=1, chociaż wykres nie jest linią ciągłą!

$$f(x) = \tfrac{1}{4} + 2^{-n} \text{ dla}$$

$$2^{-n} \leq |x-1| < 2^{1-n}$$

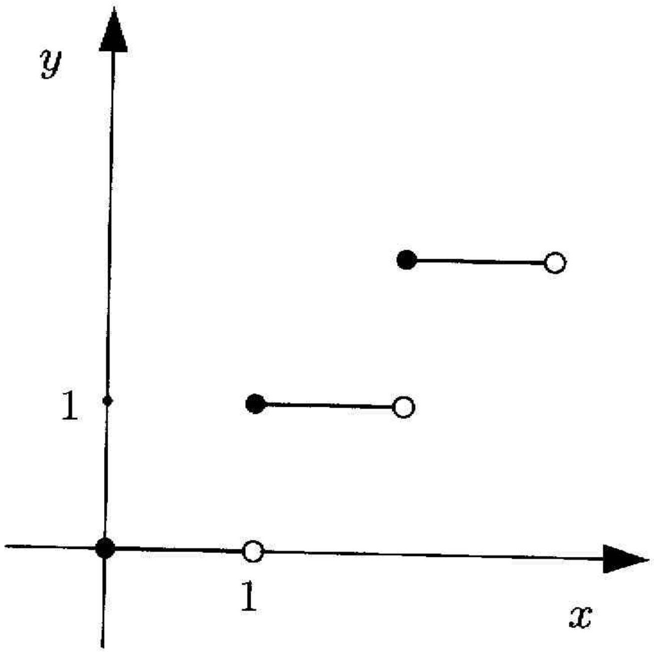


Rys. 35

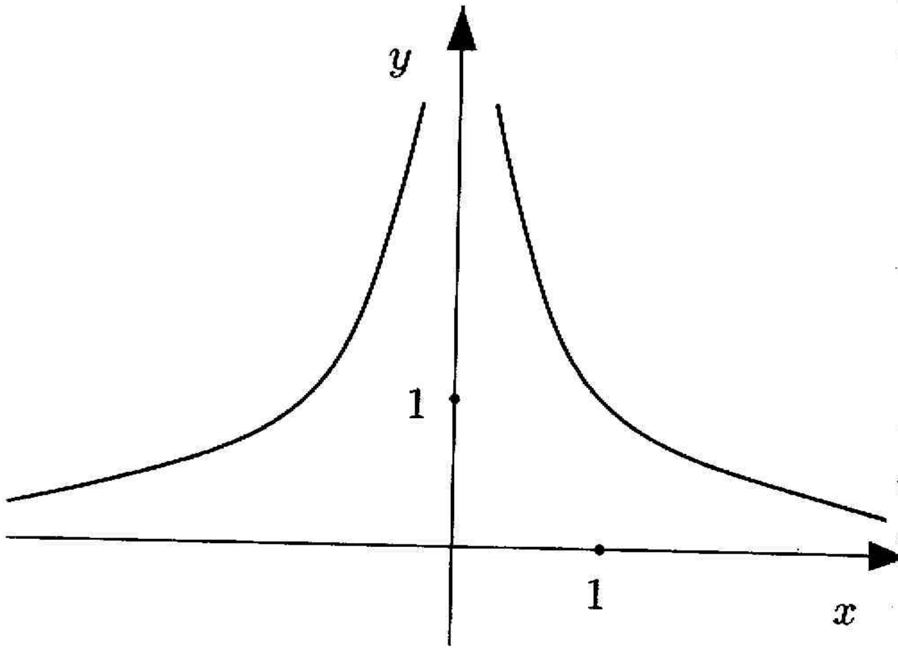
RR

Przykłady:

Część całkowita z liczby, [x]   1/|x|

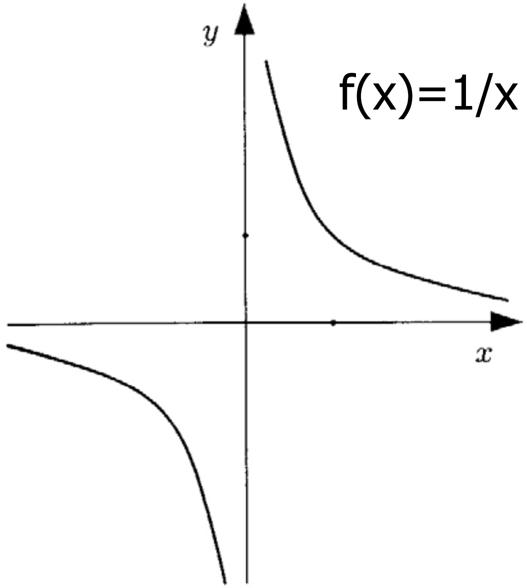


Rys. 36

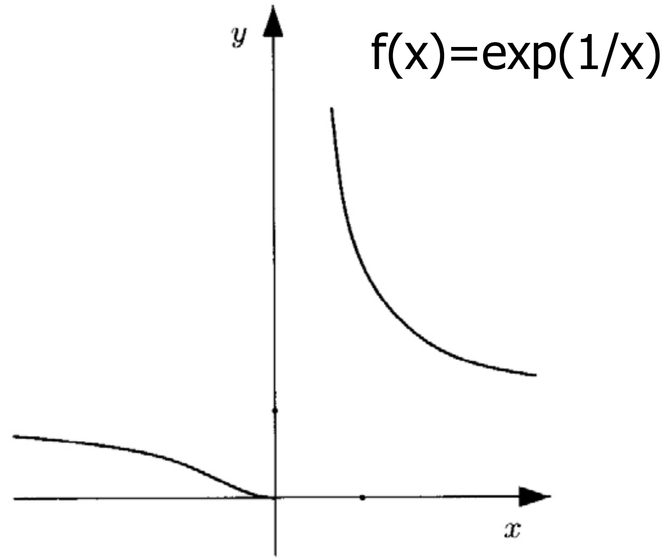


Rys. 37

RR

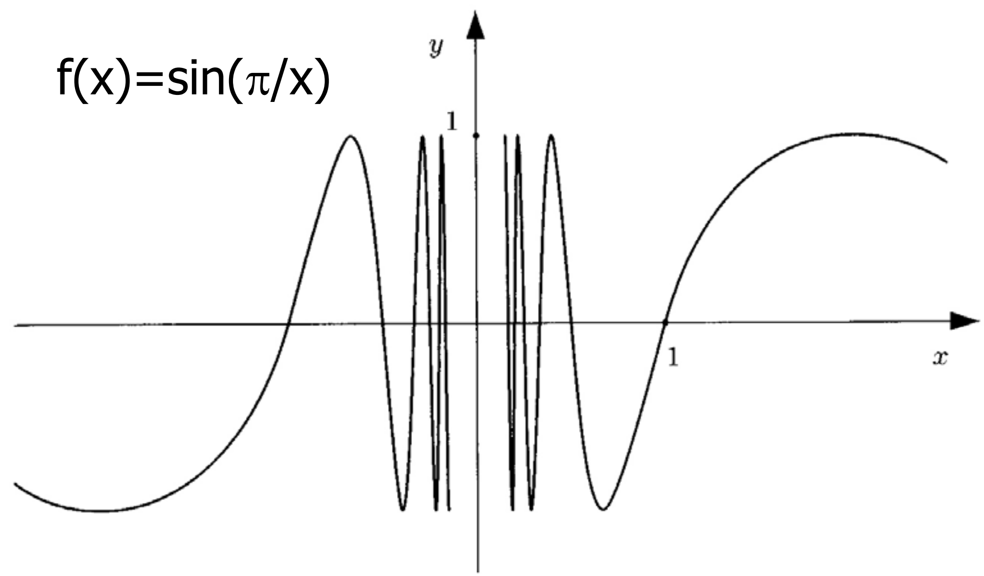


Rys. 38



Rys. 39

(RR)



Rys. 40

Def. otoczeniowa (Cauchy'ego)

Tw. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$

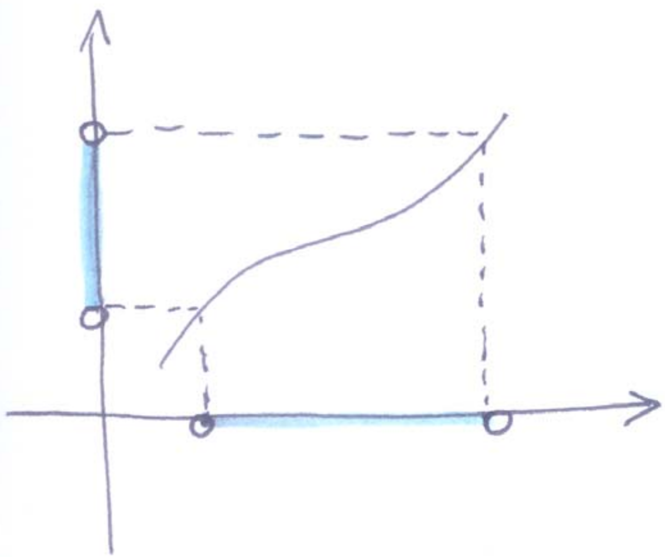
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(g, \varepsilon)$

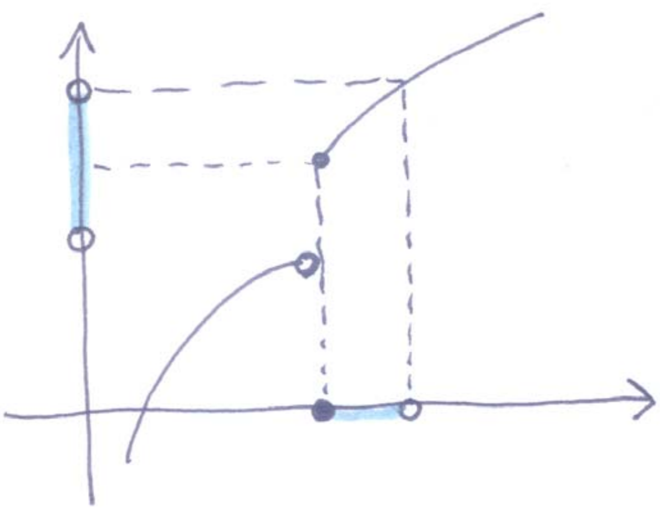
lub $: \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$

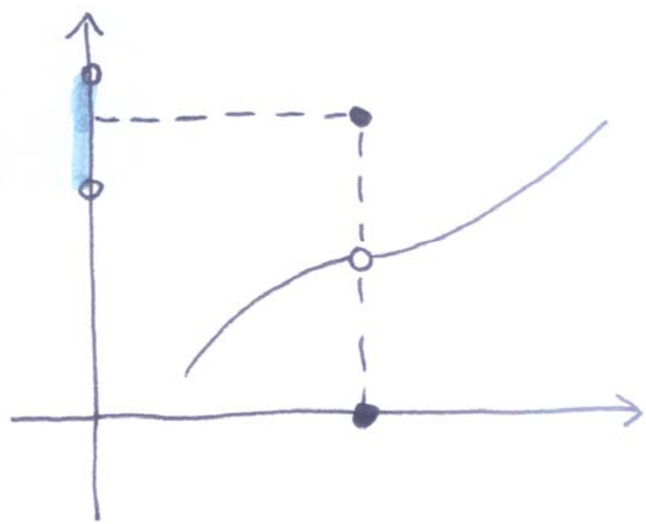
Tw. $f : X \to Y$ ciągla $\Leftrightarrow$ przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym (definicja topologiczna)

Tw. $f : X \to Y$ ciągla $\Leftrightarrow$ przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym

Przykład i kontrprzykłady:







Działania na funkcjach ciągłych

$f : X \to Y,\ g : Y \to Z -$ ciągle $\Rightarrow g \circ f -$ ciągla

X - zwarta, $f : X \to Y -$ ciągla i wzajemnie jednoznaczna

(homeomorfizm) $\Rightarrow f^{-1} -$ ciągla

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = b \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b,\ \lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = ab,$$

$$\lim_{x \to x_0}(cf(x)) = ca,\ \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

$f, g -$ ciągle $\Rightarrow$ suma itd. ciągle

Wielomiany, f. wymierne, trygonometryczne, cyklometryczne, wykładnicza, logarytmiczna - ciągłe

Tw. O trzech funkcjach

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = a \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a$$ D: Z tw. O trzech ciągach

Przykład:

$\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$

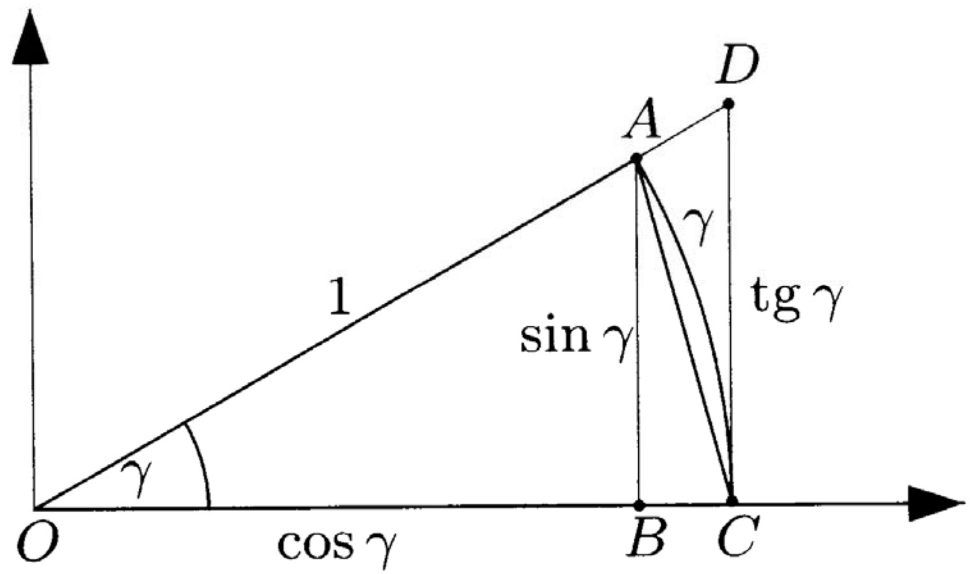
$\gamma > \sin\gamma$

$P_{\text{wycinek } OAC} < P_{\text{trójkąt } ODC} \quad \Rightarrow \quad tg\gamma > \gamma$

$\sin\gamma < \gamma < tg\gamma$

$$1 > \frac{\sin\gamma}{\gamma} > \cos\gamma$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Przykłady:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin\tfrac{1}{x}=0,\quad \text{bo}\quad -|x|\leq x\sin\tfrac{1}{x}\leq |x|$$

Asymptoty

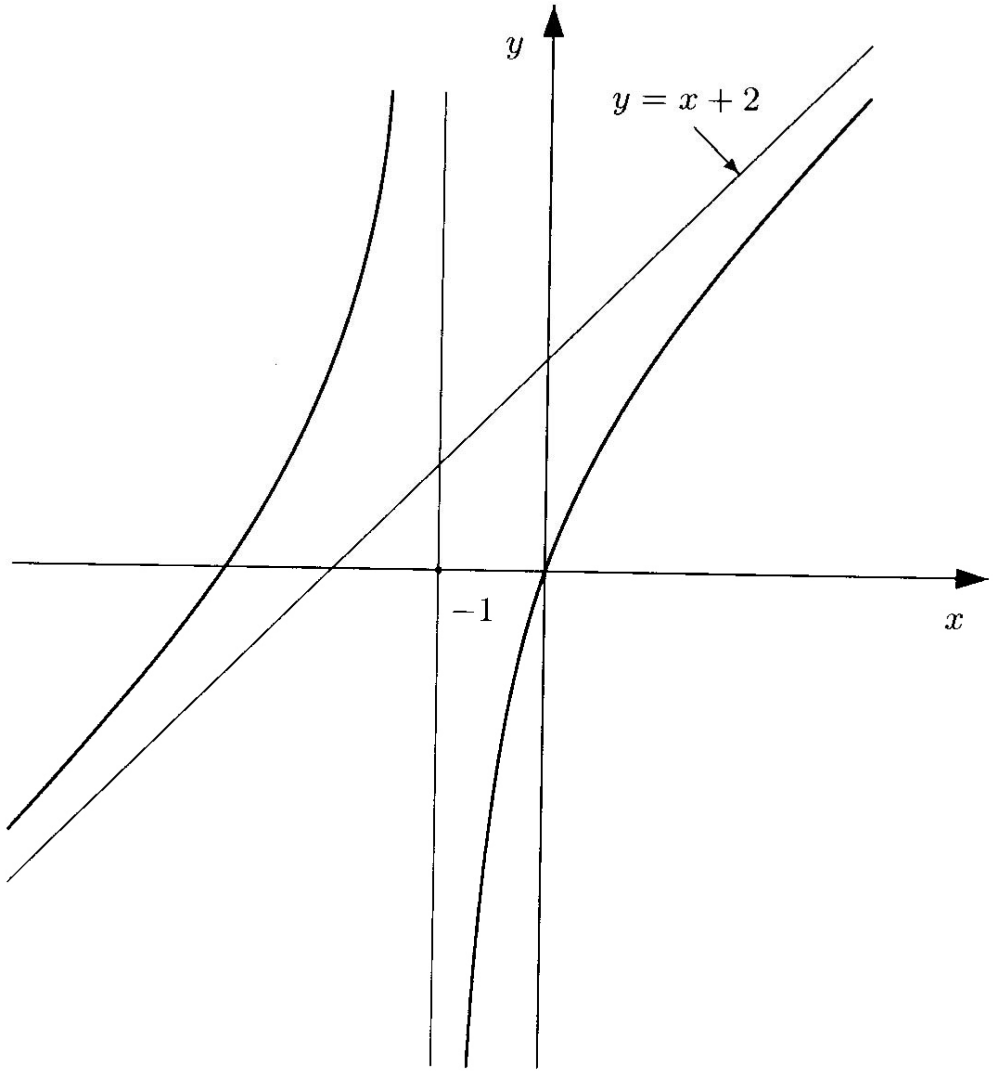
asymptota pionowa $x = x_0$: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

asymptota pozioma $y = g$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g$

asymptota ukosna $y = ax + b,\ a \neq 0$: $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right),\ b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax \right)$$

Asymptota ukośna funkcji f(x)=(x^2-3x)/(x+1) (RR)



Rys. 48

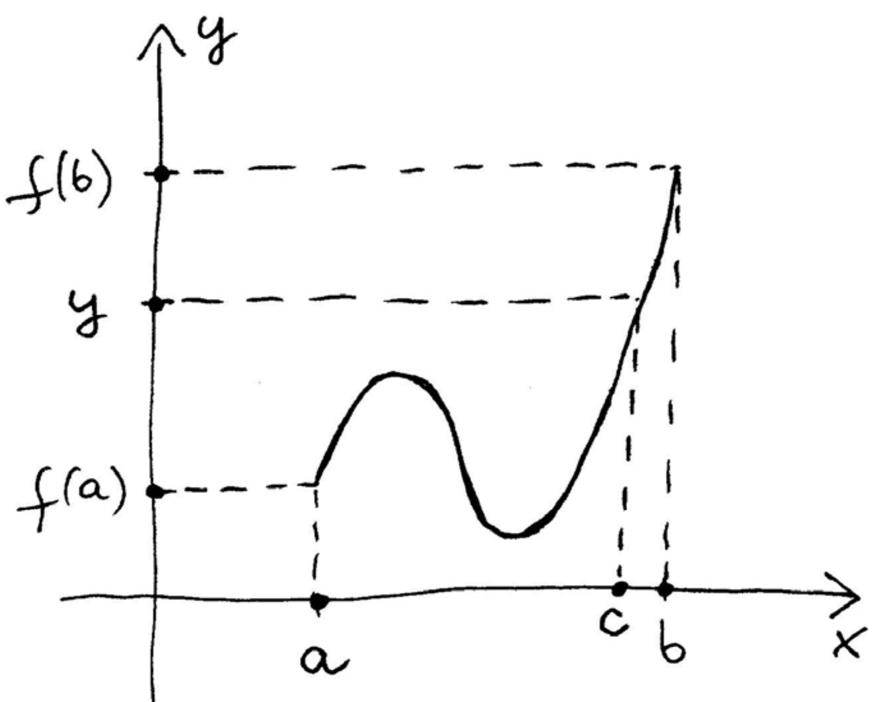
Własności funkcji ciągłych

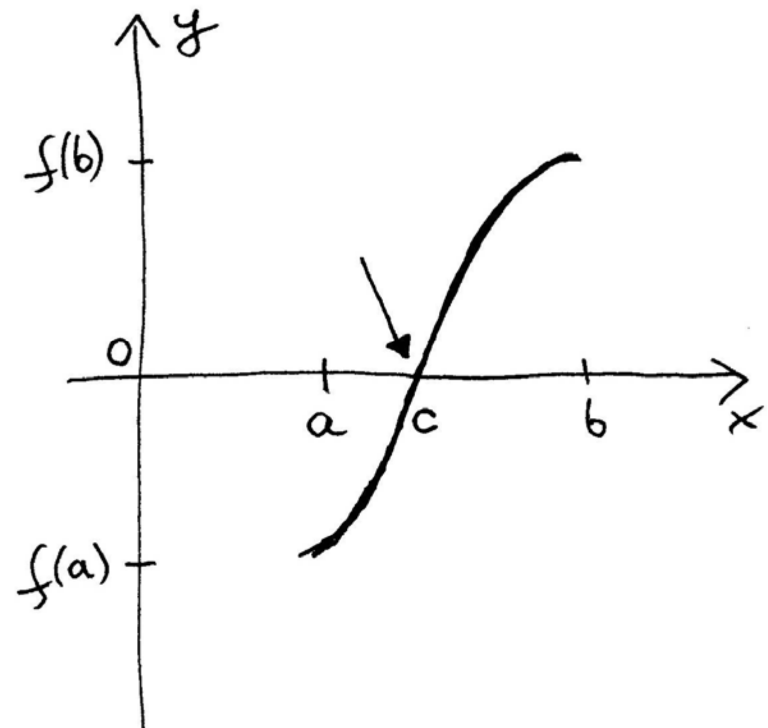
Tw. Darboux

$f:[a,b]\to R,\ f(a)\le f(b),\ y\in[f(a),f(b)]$

$\Rightarrow \exists c\in[a,b]: y=f(c)$

$f(a)<0<f(b)\Rightarrow \exists c\in[a,b]: f(c)=0$





$f : X \to R$ ma w x_0 wartosć najmniejszą (minimum globalne)

jeżeli $\forall x \in X : f(x) \geq f(x_0)$

a największą (maksimum globalne) jeżeli $\forall x \in X : f(x) \leq f(x_0)$

ekstremum = minimum lub maksimum

Tw. Weierstrassa: A - zwarty, $f : A \to R$ - ciagla

$\Rightarrow f$ ma w A oba ekstrema globalne