[wersja z 5 X 2010]

Analiza Matematyczna

część 1

Konspekt wykładu dla studentów fizyki/informatyki

Uniwersytet Jana Kochanowskiego 2010/11

Prof. dr hab. Wojciech Broniowski

Wstęp

Co to jest analiza matematyczna?

- Rachunek różniczkowy i całkowy, Isaak Newton i Gottfried Wilhelm Leibnitz, XVII w.
- Analiza funkcjonalna, funkcje analityczne, geometria różniczkowa, równania różniczkowe, ...
- Jeden z najbardziej „praktycznych” działów matematyki: nauki ścisłe, inżynieria, inne działy matematyki
- Przykłady, które powinny być znane: badanie funkcji zmiennej rzeczywistej, równanie okręgu, obliczanie powierzchni, ruch jednostajnie przyspieszony ...

Prawa fizyki → równania różniczkowe

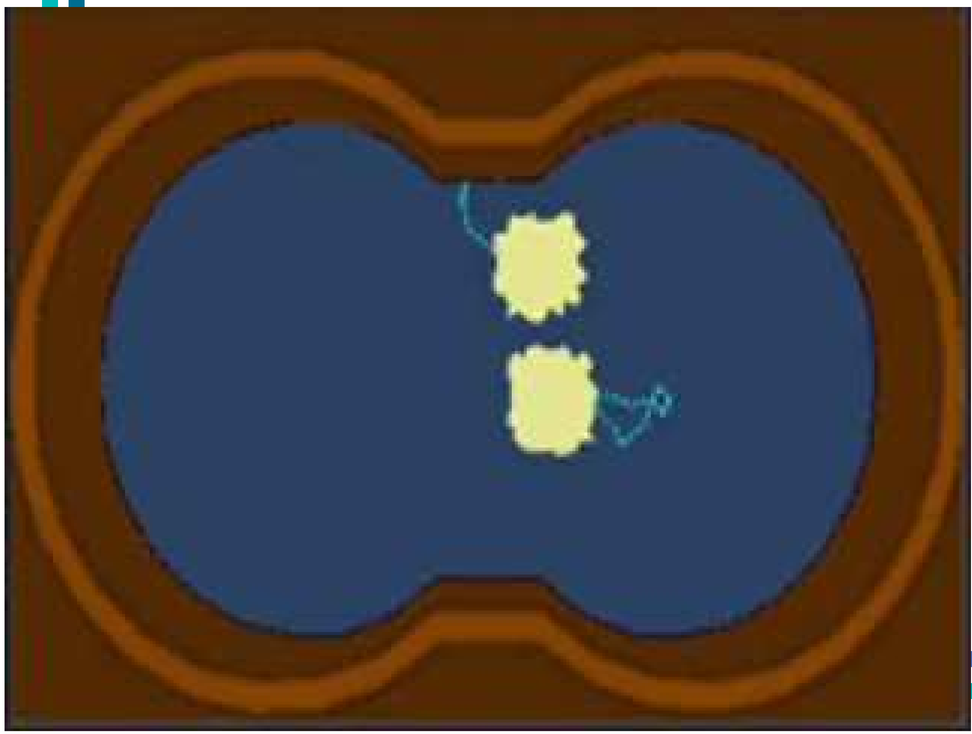
- Mechanika klasyczna
- Elektrodynamika
- Termodynamika
- Mechanika kwantowa
- Teoria pola
- Grawitacja
- Chemia
- ...
- Inżynieria
- Ekonomia

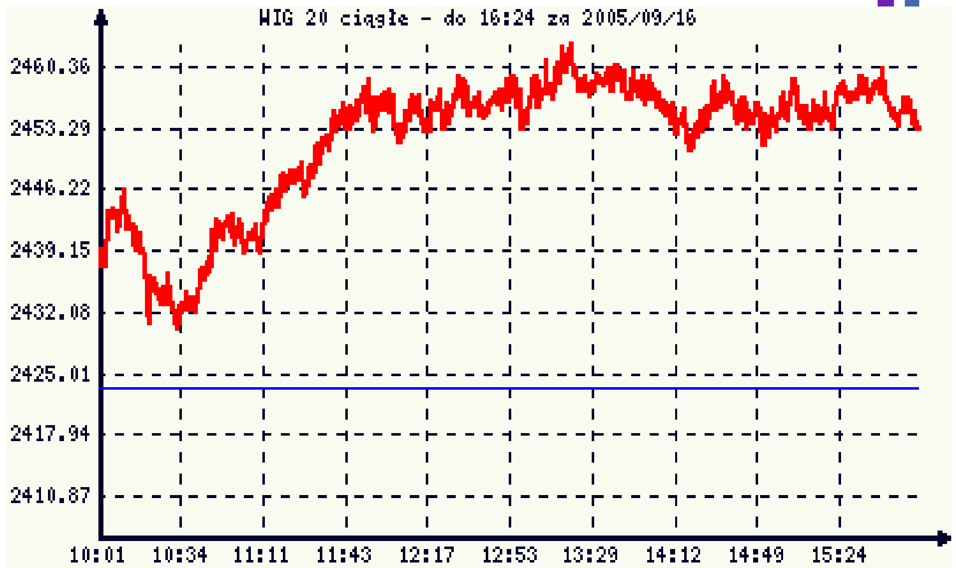
Podstawowe narzędzie badawcze dla fizyka !

Obserwacja komety przez jakiś czas pozwala przewidzieć jej ruch za 100000 lat!

Pojęcie ciągłości

- Intuicja: gładkość, brak przerw, pęknięć, możliwość przewidywania zachowania globalnego z zachowania lokalnego (ruch planet, przedłużenie analityczne)
- Nie zawsze tak jest! (ruchy Browna, kursy giełdowe) – brak ciągłości, szorstkość, brak możliwości dokładnego przewidywania
- Czasoprzestrzeń fizyczna jest ciągła





Cel wykładu

- Poznanie i opanowanie analizy matematycznej w niezbędnym dla fizyka/informatyka zakresie
- Kultura matematyczna: metody rozumowania, dowodzenia twierdzeń, dochodzenia do wyników
- Rozwinięcie rzemiosła matematycznego, oraz sprawności rachunkowej, multum zadań do rozwiązania!
- Wymagana bardzo duża praca i pilność
- Podstawowy wykład!

Informacje praktyczne

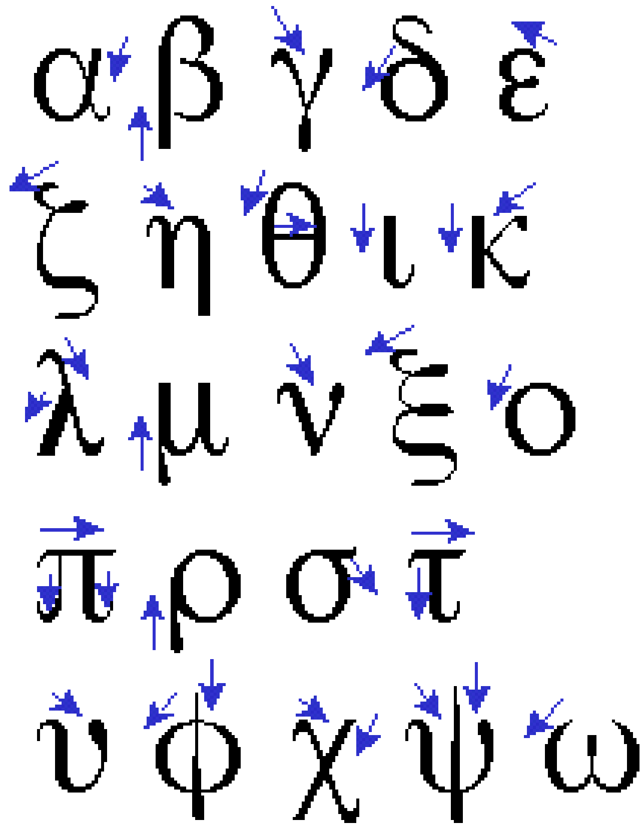
- Ten dokument: http://www.ujk.edu.pl/~broniows
- Konsultacje: wt., od 17:45, pok. 56
- Zestawy zadań: http://www.ujk.edu.pl/~broniows do przerobienia w domu, trudniejsze na konwersatoriach
- Kolokwia/kartkówki (po każdym dziale, co 2-3 tyg.) Zaliczenie konwersatorium, semestralny egzamin pisemny z zadań i teorii

Literatura

- (RR) Ryszard Rudnicki, Wykłady z analizy matematycznej, PWN, Warszawa, 2002
- Franciszek Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa, 1973
- G. M. Fichtenholtz, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa, 1972
- W. Rudin, Podstawy analizy matematycznej, PWN, Warszawa, 1976
- W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I i II, PWN, Warszawa, 2003 (z rozwiązaniami!)
- Marcin Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna, cz, I i II, Ofic. Wyd. GiS, Wrocław, 2003
- D. McQuarrie, Matematyka dla przyrodników i inżynierów, PWN, Warszawa 2005
- (RW) Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, Matematyka dyskretna, PWN, Warszawa, 2005 (logika)
- Rowan Garnier and John Taylor, Discrete Mathematics for New Technology, IoP Publishing, Bristol, 2002
- (ŚM) Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto, Świat Matematyki, PWN, Warszawa, 2001 (eseje z pogranicza matematyki i filozofii)
- (KKŚ) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, Matematyka, podr. do liceów i techników, Oficyna Edukacyjna * K. Pazdro, Warszawa, 2002 – samodzielna powtórka szkoły średniej – b. dobra książka do powtórki!

Alfabet grecki

Α α	alfa
Β β	beta
Γ γ	gamma
Δ δ	delta
Ε ε ϵ	epsilon
Ζ ζ	zeta
Η η	eta
Θ θ ϑ	theta
Ι ι	jota
Κ κ	kappa
Λ λ	lambda
Μ μ	mi
Ν ν	ni
Ξ ξ	ksi
Ο ο	omikron
Π π ϖ	pi
Ρ ρ	ro
Σ σ ς	sigma
Τ τ	tau
Υ υ	ipsilon
Φ ϕ φ	fi
Χ χ	chi
Ψ ψ	psi
Ω ω	omega



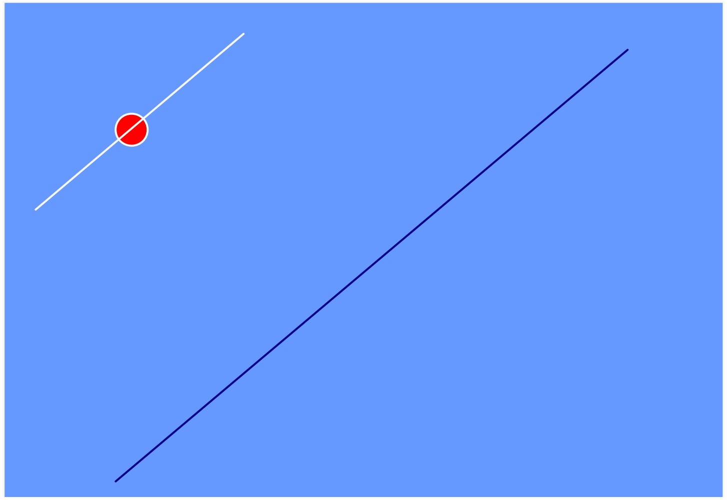
Elementy teorii matematycznej

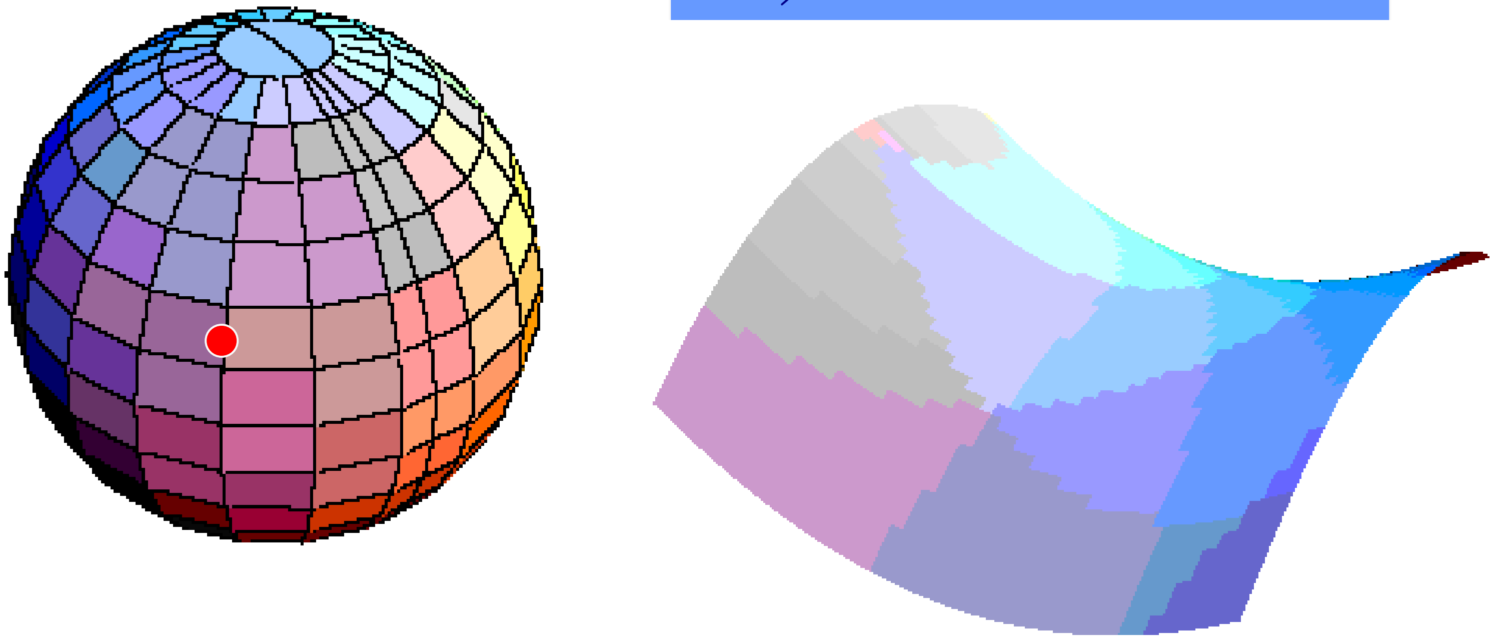
Gdzieś trzeba zacząć!
„Jajko czy kura"

Pojęcia pierwotne - nie definiowane
Aksjomaty (pewniki) – „oczywiste" prawdy dotyczące pojęć pierwotnych, zdania przyjęte za prawdziwe bez dowodu (doświadczenie, akt wiary!) Wymóg niesprzeczności
Definicje – określenia złożone z pojęć pierwotnych i innych definicji
Twierdzenia – zdania prawdziwe uzyskane z aksjomatów i innych twierdzeń z pomocą rozumowania logicznego

Przykład systemu formalnego: geometria euklidesowa, „Elementy"
- punkt, prosta, płaszczyzna (poj. pierwotne)
- Piąty postulat: przez punkt leżący poza prostą p przechodzi dokładnie jedna prosta nie mająca punktów wspólnych z p
- okrąg to zbiór wszystkich punktów odległych od punktu A (środek) o promień r > 0 (definicja)
- prosta przechodząca przez środek okręgu dzieli go na dwie równe części (twierdzenie) - ten oczywisty fakt wymaga dowodu!

Geometria euklidesowa i geometrie nieeuklidesowe (zależność teorii od przyjętych postulatów)





geometrie nieeuklidesowe

Elementy logiki
i teorii mnogości

Jak rozstrzygać o prawdzie?

Sąd tak zdecydował…

Profesor tak powiedział…

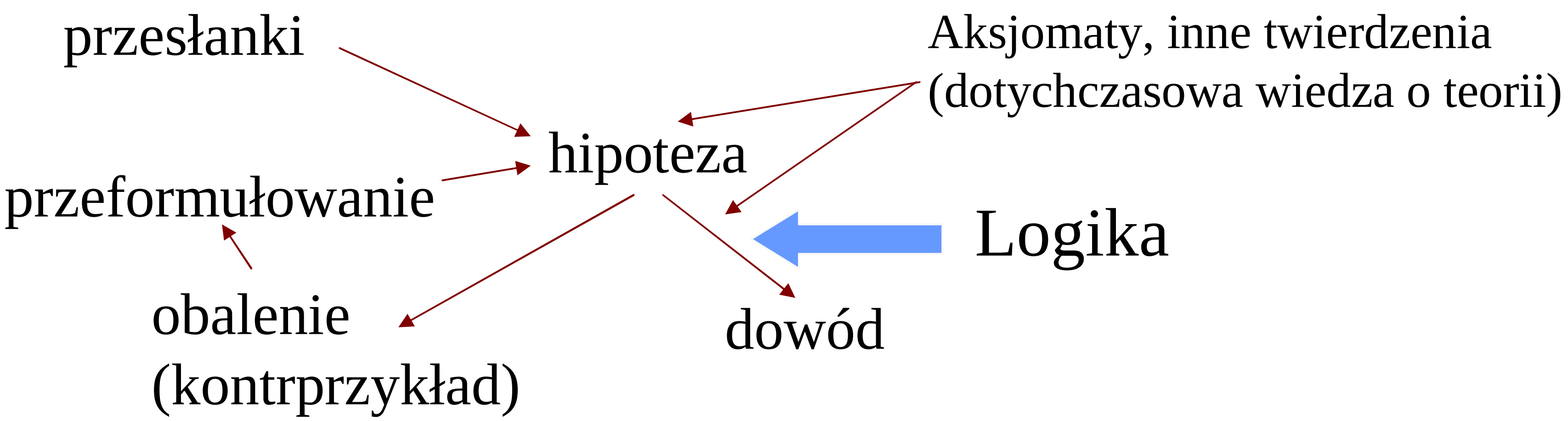
Doświadczenie tak mówi…

Wewnętrzne przekonanie, kobieca intuicja

Próbkowanie statystyczne

Logika matematyczna

Heurystyka, systemy formalne



Przykład
Przesłanki: liczba 2 jest podzielna przez 2, 12 też, 92 też, ...
Hipoteza: każda liczba kończąca się cyfrą 2 jest podzielna przez 2
Dowód: zapis liczby kończącej się cyfrą 2 na postać
$10*q+2=2(5q+1)$, co dzieli się przez 2 (q.e.d.)
(hipoteza staje się twierdzeniem)
Uogólnienie: każda liczba kończąca się cyfrą c jest podzielna przez c
Kontrprzykład: c=4 nie dzieli liczby 14

Rachunek zdań

Zdanie logiczne jest to zdanie gramatyczne, o którym można (w zasadzie) powiedzieć, że jest prawdziwe (wartość 1 lub T - true), bądź fałszywe (wartość 0 lub F- false)

Przykłady: trawa jest zielona, lubię sernik, 7 jest liczbą pierwszą, jestem kielczaninem, d/dx sin(x)=cos(x), 2=1, obecna temperatura powietrza na zewnątrz jest między 20 a 22 st. C

Zdania, które nie są zdaniami logicznymi: 1) idź do domu!, 2) chyba będzie padać deszcz, 3) Kreteńczyk mówi, że tak, jak wszyscy Kreteńczycy, kłamie

Funktory zdaniotwórcze (spójniki logiczne): **nie** - zaprzeczenie, **i** - koniunkcja, **lub** – alternatywa (uwaga na znaczenie potoczne), **albo** – alternatywa wykluczająca, **jeżeli ... to** - implikacja, **wtedy i tylko wtedy, gdy** – równoważność (różne notacje, matryce/tabelki logiczne)

Zdania złożone składają się ze zdań prostych połączonych funktorami zdaniowymi

Lubię sernik lub jestem kielczaninem (alternatywa)

Albo jestem kielczaninem albo jestem krakowianinem (alternatywa wykluczająca)

Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury (implikacja)

przyczyna → skutek

poprzednik → następnik

warunek dostateczny → warunek konieczny

Warunkiem koniecznym, aby padał deszcz, jest zachmurzone niebo.

Warunkiem dostatecznym, aby stwierdzić, że na niebie są chmury, jest padanie deszczu.

Jestem pełnoletni wtedy i tylko wtedy, gdy mam ponad 18 lat (równoważność)

Warunkiem **koniecznym i dostatecznym** pełnoletniości jest wiek 18 lat.

Zdanie odwrotne (Jeśli na niebie są chmury, to pada deszcz),

i przeciwstawne (Jeśli na niebie nie ma chmur, to nie pada deszcz)

Zdanie przeciwstawne jest równoważne wyjściowej implikacji. Nie jest tak dla zdania odwrotnego!

Uwagi:
Alternatywa jest prawdziwa, jeśli zachodzi jeden z dwóch warunków, lub jeden i drugi warunek jednocześnie.

Implikacja jest prawdziwa w następujących przypadkach:
- z prawdy wynika prawda (to jest oczywiste)
- z fałszu wynika fałsz (też rozsądnie)
- z fałszu wynika prawda (co nie jest oczywiste)

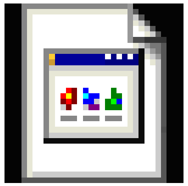
W literaturze jest tu wiele mylących stwierdzeń, więc uwaga! Sprawa jest bardzo prosta. Konstrukcja implikacji logicznej jest tak dobrana, że fałszywe założenie **nie rozstrzyga** o tym, co się stanie, więc fałszywe założenie jest „bezużyteczne”. Może zeń wynikać prawda, może fałsz, czyli wszystko może się zdarzyć. Przykład: „Jeśli będziesz grzeczny, oglądniesz dobranockę”, co oznacza, że jeśli rzeczywiście będziesz grzeczny, to oglądniesz, natomiast jeśli nie będziesz grzeczny, to oglądniesz, lub nie! Przyrzeczenie o niczym tu nie rozstrzyga. Oczywiście, jeśli będziesz grzeczny, a ja nie pozwolę Ci oglądnąć dobranocki, to jestem kłamcą! Tylko w tej sytuacji implikacja jest fałszywa!

Matryca logiczna definiująca
koniunkcję, alternatywę, implikację i równoważność

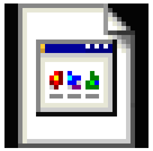
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Bramki logiczne, sieci logiczne

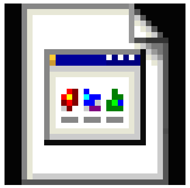
Bramki: OR AND NOT



L1_3.exe



L1_1.exe



L1_5.exe

Prawa rachunku zdań

Tautologia (t) – zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, bez względu na wartość logiczną zdań składowych

Pada deszcz lub nie pada deszcz

Przykład stosowania matryc logicznych: prawa **de Morgana**, kontrapozycji, podwójnego przeczenia,

(RR, str. 14)

Sprzeczność (c) – zdanie zawsze fałszywe

(istnieje liczba rzeczywista x, dla której $x > 2$ i $x < 1$)

Prawa logiczne (RW)

1. $(\neg\neg p) \Leftrightarrow p$	prawo podwójnego przeczenia
2a. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ **b.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ **c.** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	prawa przemienności
3a. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ **b.** $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	prawa łączności
4a. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ **b.** $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	prawa rozdzielności
5a. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ **b.** $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	prawa idempotentności
6a. $(p \vee c) \Leftrightarrow p$ **b.** $(p \vee t) \Leftrightarrow t$ **c.** $(p \wedge c) \Leftrightarrow c$ **d.** $(p \wedge t) \Leftrightarrow p$	prawa identyczności
7a. $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow t$ **b.** $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow c$	
8a. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ **b.** $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **c.** $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ **d.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	prawa De Morgana
9. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	prawo kontrapozycji
10a. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ **b.** $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	określenie implikacji za pomocą alternatywy lub koniunkcji
11a. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ **b.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	
12a. $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$ **b.** $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
13. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	określenie równoważności
14. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	prawo eksportacji
15. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow c]$	reductio ad absurdum

[1] W tej tablicy t jest dowolną tautologią, a c dowolnym zdaniem sprzecznym.

16.	$p \Rightarrow (p \vee q)$	wprowadzanie alternatywy
17.	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	opuszczanie koniunkcji
18.	$(p \rightarrow c) \Rightarrow \neg p$ (c — dowolne zdanie sprzeczne)	sprowadzenie do sprzeczności
19.	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	modus ponendo ponens
20.	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	modus tollendo tollens
21.	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$	modus ponendo tollens
22.	$p \Rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$	
23.	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	przechodniość $\leftrightarrow$
24.	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	przechodniość $\rightarrow$
25a.	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$	
b.	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$	
c.	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	
26a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	prawa dylematu konstrukcyjnego
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$	
27a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)]$	prawa dylematu destrukcyjnego
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\neg q \wedge \neg s) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)]$	

Reguły wnioskowania (RW)

„reguła odrywania”

ponens – poprzez potwierdzenie
ponendo – do potwierdzenia
tollens – poprzez zaprzeczenie
tollendo – do zaprzeczenia

28. $\dfrac{P}{\therefore\ P \vee Q}$ reguła wprowadzania alternatywy

29. $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore\ P}$ reguła opuszczania koniunkcji

30. $\dfrac{P \qquad P \to Q}{\therefore\ Q}$ reguła modus ponendo ponens (w skrócie modus ponens)

31. $\dfrac{P \to Q \qquad \neg Q}{\therefore\ \neg P}$ reguła modus tollendo tollens (w skrócie modus tollens)

32. $\dfrac{P \vee Q \qquad \neg P}{\therefore\ Q}$ reguła modus ponendo tollens

33. $\dfrac{P \to Q \qquad Q \to R}{\therefore\ P \to R}$ reguła sylogizmu hipotetycznego

34. $\dfrac{P \qquad Q}{\therefore\ P \wedge Q}$ reguła wprowadzania koniunkcji

Reguły wnioskowania / dowodzenia

Twierdzenia matematyczne mają postać implikacji

Twierdzenie: założenie $\rightarrow$ teza

Dowód polega na wykazaniu, że z założenia wynika w sposób logiczny teza. W rozumowaniu wykorzystuje się dotychczasową wiedzę (zdania prawdziwe) danej teorii, oraz formalizm logiki matematycznej, czyli reguły wnioskowania

Przykłady:

1. Tw. dowiedzione wprost

Z: Jeśli liczna naturalna n jest podzielna przez 2,

T: to n^2 jest podzielne przez 2

D: Skoro n jest podzielne przez 2, to możemy je zapisać jako 2m, gdzie m jest liczbą naturalną, wobec czego $n^2 = 4\,m^2 = 2(2\,m^2)$, co w oczywisty sposób jest podzielne przez 2

(q.e.d.) [c.b.d.o, kwadracik $\square$, trzy kropki $\therefore$]

2. Tw. odwrotne:
Z: Jeśli kwadrat liczby naturalnej jest podzielny przez 2
T: to ta liczba jest podzielna przez 2

D **(wprost):** Liczbę naturalną n można rozłożyć na czynniki pierwsze:
$n = p_1\, p_2 \ldots p_j$, zatem $n^2 = p_1\, p_1\, p_2\, p_2 \ldots\, p_j\, p_j$. Ponieważ n^2 jest podzielne przez 2, któraś z p_k jest równa 2, a więc n jest podzielne przez 2 (q.e.d.)
(n.p. 154=2 7 11, więc $154^2=2^2 7^2 11^2$. W tym przypadku $p_1=2$, $p_2=7$, $p_3=11$

D **(sprowadzenie do sprzeczności):** Załóżmy, że n nie dzieli się przez 2. Wówczas rozkład n nie zawiera czynnika 2, wobec czego n^2 nie zawiera czynnika 2, zatem nie dzieli się przez 2, co jest sprzeczne z założeniem (q.e.d.)

D **(nie wprost):** Musimy dowieść, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą. Rozkład n nie zawiera czynnika 2, więc n^2 też nie zawiera czynnika 2.

Ponieważ zachodzi tw. i tw. odwrotne (tw. zachodzi **w dwie strony**) , zatem zdania n jest podzielne przez 2 i n^2 jest podzielne przez 2 są równoważne.

3. Tw. Liczba $\sqrt{2}$ nie daje się wyrazić w postaci ułamka (czyli nie jest liczbą wymierną)

D **(przez sprzeczność):** Założmy, że $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdzie liczby naturalne m i n nie mają wspólnych dzielników, a co za tym idzie, nie są jednocześnie parzyste.

Z tezy mamy $2n^2=m^2$, więc m^2 jest parzyste, a więc (poprzednie twierdzenie) m jest parzyste, czyli m=2k, gdzie k jest pewną liczbą naturalną. Mamy zatem $2n^2=4k^2$, czyli $n^2=2k^2$, zatem n jest parzyste. Ponieważ m i n są parzyste, mamy sprzeczność z założeniem (c.b.d.o.).

Fakt ten antyczni trzymali w tajemnicy!

4. Jeśli x=2 to x=1

D **(fałszywy):**

$$x = 2$$

$$x - 1 = 1$$

$$(x - 1)^2 = 1 = x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = x - 1$$

$$x^2 - 2x = x - 2$$

$$x(x - 2) = (x - 2) \qquad | : (x - 2)$$

$$x = 1$$

$$\text{czyli } 2 = 1$$

5. Inne częste fałszywe rozumowanie: niesłuszne założenie, często w bardzo zawoalowany sposób, tego, co chcemy udowodnić.

Z: Ponieważ studenci siedzą na sali,
T: to ten wykład jest ciekawy
D: Ponieważ studenci przyszli na ten wykład, a studenci chodzą na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy wykład jest ciekawy, a więc ten wykład jest ciekawy.

Dowód równoważności - dowód „w dwie strony”

Dowód **Wielkiego Twierdzenia Fermata** zajęło ponad 300 lat!
(Andrew Wiles, 1993)
Dowody komputerowe: tw. o czterech kolorach dot. kolorowania map – długość książki telefonicznej!

Tw. Goedla: W obrębie każdej nie trywialnej teorii istnieją zdania, których prawdziwości bądź fałszywości nie można rozstrzygnąć. Inaczej, nie można dowieść niesprzeczności danej teorii w ramach tej teorii.

Russell i Whitehead byli pionierami zredukowania matematyki do logiki. Tutaj, po 362 stronicach, dochodzi się do arytmetycznego twierdzenia 1 + 1 = 2.

Źródło: *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910.

$*54\cdot42 \quad \vdash ::\alpha\in 2.\supset:.\beta\subset\alpha.\ \exists!\beta.\beta\neq\alpha.\equiv.\beta\in\iota``\alpha$

Dem.

$\vdash .*54\cdot4. \supset\vdash ::\alpha=\iota`x\cup\iota`y.\supset:.$

$\beta\subset\alpha.\exists!\beta.\equiv:\beta=\Lambda.\vee.\beta=\iota`x.\vee.\beta=\iota`y.\vee.\beta=\alpha:\exists!\beta:$

$[*24\cdot53\cdot56.*51\cdot161] \equiv:\beta=\iota`x.\vee.\beta=\iota`y.\vee.\beta=\alpha \quad (1)$

$\vdash .*54\cdot25.\mathrm{Transp}.*52\cdot22.\supset\vdash :x\neq y.\supset.\iota`x\cup\iota`y\neq\iota`x.\iota`x\cup\iota`y\neq\iota`y:$

$[*13\cdot12] \supset\vdash :\alpha=\iota`x\cup\iota`y.x\neq y.\supset.\alpha\neq\iota`x.\alpha\neq\iota`y \quad (2)$

$\vdash .(1).(2)\supset\vdash ::\alpha=\iota`x\cup\iota`y.x\neq y.\supset:.$

$\beta\subset\alpha.\exists!\beta.\beta\neq\alpha.\equiv:\beta=\iota`x.\vee.\beta=\iota`y:$

$[*51\cdot235] \quad \equiv:(\exists z)\cdot z\in\alpha.\beta=\iota`z:$

$[*37\cdot6] \quad \equiv:\beta\in\iota``\alpha \quad (3)$

$\vdash .(3).*11\cdot11\cdot35.*54\cdot101.\supset\vdash .\mathrm{Prop}$

$*54\cdot43. \quad \vdash :.\alpha,\beta\in1.\supset:\alpha\cap\beta=\Lambda.\equiv.\alpha\cup\beta\in2$

Dem.

$\vdash .*54\cdot26.\supset\vdash :.\alpha=\iota`x.\beta=\iota`y.\supset:\alpha\cup\beta\in2.\equiv.x\neq y.$

$[*51\cdot231] \quad \equiv.\iota`x\cap\iota`y=\Lambda.$

$[*13\cdot12] \quad \equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda \quad (1)$

$\vdash .(1).*11\cdot11\cdot35.\supset$

$\vdash :.(\exists x,y).\alpha=\iota`x.\beta=\iota`y.\supset:\alpha\cup\beta\in2.\equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda \quad (2)$

$\vdash .(2).*11\cdot54.*52\cdot1.\supset\vdash .\mathrm{Prop}$

Z tego zdania będzie wynikać, po określeniu arytmetycznego dodawania, że $1+1=2$.

Przykład rachunku formalnego (ŚM)

Zbiory, elementy teorii mnogości

Pojęcia pierwotne: zbiór, element zbioru, przynależność - x należy do A

Przykłady zbiorów, notacja dla zbiorów liczbowych: naturalne $\mathbb{N}$, całkowite $\mathbb{Z}$, wymierne $\mathbb{Q}$, rzeczywiste $\mathbb{R}$, zespolone $\mathbb{C}$, przedziały l. rzeczywistych [a,b], (a,b)

Diagramy Eulera (Venna)
Zawieranie, równość zbiorów
Zbiór pusty i zbiór pełny (przestrzeń)
Podzbiory, podzbiory właściwe
Zbiory rozłączne – nie zawierające wspólnych elementów
Operacje: suma, iloczyn (część wspólna, przecięcie), różnica, różnica symetryczna, dopełnienie
Zbiory (rodziny) zbiorów, zbiór potęgowy
Prawa rachunku zbiorów, analogia do rachunku zdań
Nieskończona (indeksowana) suma i iloczyn zbiorów, prawa de Morgana
Aksjomaty teorii mnogości, pewnik wyboru
Analogia algebry zbiorów i logiki

Takie intuicyjne rozumienie zbioru może czasami powodować pewne kłopoty. Rozpatrzmy bowiem formę zdaniową (zob. str. 21): $X \notin X$. Czy są zbiory, które spełniają tę formę zdaniową (tzn. zbiory, które nie są swoimi elementami)? Takich zbiorów jest oczywiście bardzo dużo, np. $A = \{1,2,3\}$, B – zbiór uczniów danej szkoły, C – zbiór miast w Polsce, $\mathbf{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych. Żaden z tych zbiorów nie jest swoim elementem. Zbiór A ma trzy elementy: 1, 2, 3 i żaden zbiór nie jest elementem A, więc $A \notin A$. Podobnie mamy $B \notin B$, $C \notin C$, $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$. Niech teraz U oznacza zbiór wszystkich takich zbiorów, które spełniają formę zdaniową $X \notin X$. Oczywiście do U należą opisane wcześniej zbiory A, B, C, $\mathbf{R}$. Możemy postawić teraz pytanie: czy zbiór U jest swoim elementem (tzn. czy $U \in U$)? Jeżeli U jest swoim elementem, to znaczy, że spełnia formę zdaniową $X \notin X$ (gdyż w U znajdują się wyłącznie takie zbiory). Zatem: jeśli $U \in U$, to $U \notin U$. Jeżeli natomiast U nie jest swoim elementem, to znaczy, że spełnia formę zdaniową $X \notin X$, czyli $U \in U$. Zatem: jeśli $U \notin U$, to $U \in U$. Otrzymaliśmy więc, że zbiór U jest swoim elementem tylko wtedy, gdy nim nie jest. Sprzeczność ta dowodzi, że zbiór U nie istnieje. Jest to ciekawy rezultat: istnieją elementy, które spełniają formę zdaniową, nie istnieje natomiast zbiór wszystkich takich elementów. Ale nie martw się! W naszych dalszych rozważaniach o zbiorach takie kłopoty się nie pojawią!

paradoks Russela (KKŚ)

Funkcje zdaniowe, kwantyfikatory

Funkcja zdaniowa f(x): wyrażenie zawierające zmienne, które staje się zdaniem logicznym (T lub F), jeśli za zmienne x podstawimy konkretne obiekty

Zbiór argumentów (dziedzina)

Wykres funkcji zdaniowej – zbiór wszystkich x, dla których f(x)=T

Przykład: Zwierzę ma 4 nogi. x – jakieś zwierzę, zbiór argumentów - wszystkie zwierzęta, wykres - te zwierzęta, które mają 4 nogi

Kwantyfikator ogólny (duży): (All) dla każdego x zachodzi ... $\forall x : \mathrm{f}(x)$

Kwantyfikator szczególny (mały): (Exists) istnieje x takie, że ... $\exists x : \mathrm{f}(x)$

Kolejność kwantyfikatorów dużego i małego jest istotna -

(Dla każdego studenta w tej sali istnieje osoba, która jest jego matką,
Istnieje osoba, która jest matką dla każdego studenta w tej sali)

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów, rachunek kwantyfikatorów

$$\sim\left(\forall x \in A : \mathrm{f}(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in A : \ \sim \mathrm{f}(x)\right)$$

$$\sim\left(\exists x \in A : \mathrm{f}(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in A : \ \sim \mathrm{f}(x)\right)$$

$$\boxed{\bigwedge_{x\in A} \quad \bigvee_{M>0}}$$

(Nie ma róży bez kolców ↔ Każda róża posiada kolce)

Konwencja opuszczanie ogólnego kwantyfikatora w sytuacjach oczywistych

(Kot ma cztery łapy ↔ Każdy kot ma cztery łapy)

Relacje

Niech $a \in X,\ b \in Y$

Para uporządkowana wg Kuratowskiego: (a,b)={{a},{a,b}}

Iloczyn kartezjański zbiorów X i Y, oznaczany jako X x Y, to zbiór wszystkich par uporządkowanych (a,b)

Relacja – dowolny podzbiór X x Y

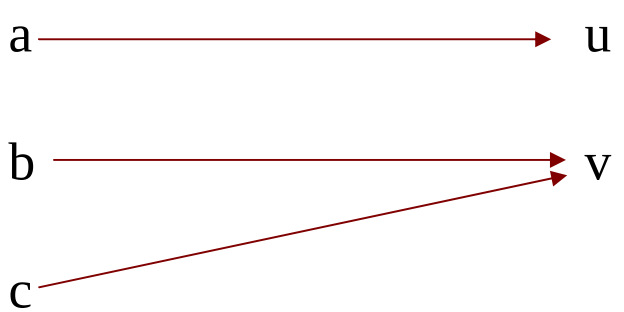
Elementy będące w relacji oznaczamy: xRy

Dziedzina (X) i przeciwdziedzina (Y) relacji

Wykresy i diagramy relacji.

X={a,b,c}, Y={u,v}, X x Y = {(a,u),(b,u),(c,u),(a,v),(b,v),(c,v)}

R={(a,u),(b,v),(c,v)}, aRu, bRv, cRv

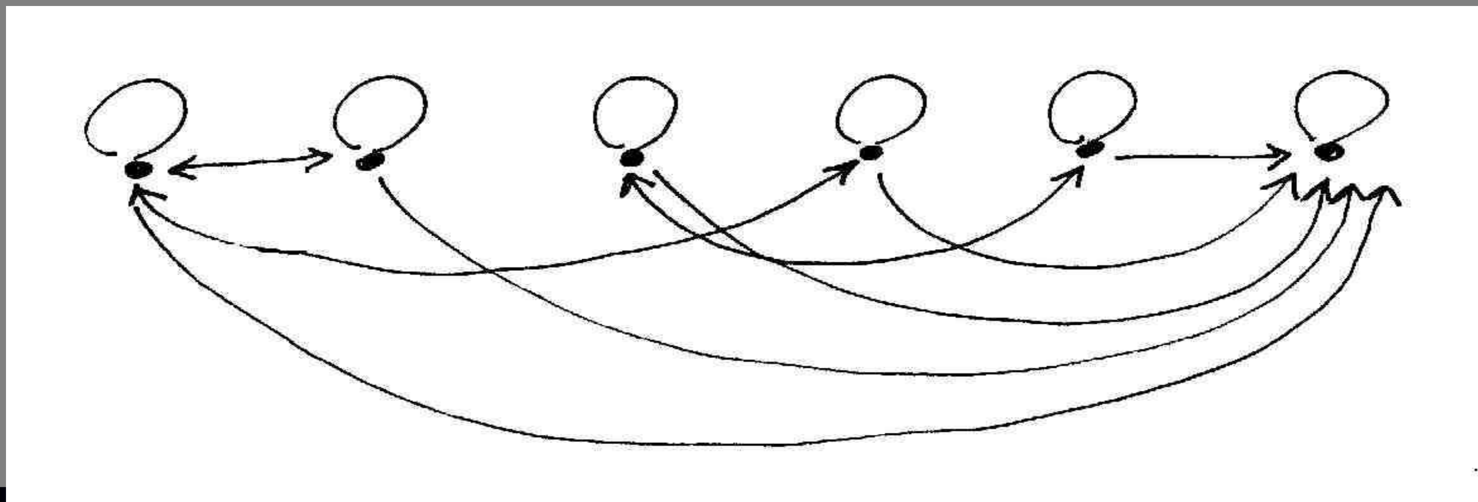


O relacjach na zbiorze X x X mówimy w skrócie „relacja na zbiorze X”

Przykład: X – grupa osób, R – relacja znajomości
aRb – zbiór par osób, gdzie osoba a zna osobę b

Krysia Piotrek Bartek Ania Agnieszka Wojtek

Krysia Piotrek Bartek Ania Agnieszka Wojtek



Cechy niektórych relacji:

Zwrotność (Z) – xRx

Przeciwzwrotność (PZ) – ~xRx

Symetryczność (S) – xRy implikuje yRx

Antysymetryczność (słaba) (AS) – xRy i yRx implikuje x=y

Przechodniość (P) – xRy i yRz implikuje xRz

Relacja równości, równoważności (Z,S,P), porządku (Z, AS, P), porządku ścisłego (PZ,P).

Klasy abstrakcji relacji równoważności: [x] – zbiór y takich, że yRx

Klasy abstrakcji dzielą zbiór na podzbiory rozłączne

Przykład: X - proste na płaszczyźnie, R – relacja równoległości, [a] – zbiór wszystkich prostych równoległych do prostej a (kierunek), liczby wymierne

Funkcje

[Funkcje elementarne – powtórka ze szkoły średniej samemu!]

B. ważne wzory trygonometryczne: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$

Def: Niech relacja f określona na iloczynie kartezjańskim X x Y spełnia warunek

$$\forall x \in X \;\; \forall y_1, y_2 \in Y : \; y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow \; y_1 = y_2$$

Wtedy f nazywamy **funkcją** (odwzorowaniem, przekształceniem), piszemy **y=f(x)**
Innymi słowy, danemu x z **dziedziny** funkcji, X=Df, przyporządkowujemy jeden element **przeciwdziedziny**, Y **(jednoznaczność).**

Zapis: $f : X \longrightarrow Y$ - f ze zbioru X do Y, f przeprowadza X w Y

Przykład: Osobom przyporządkowujemy ich rok urodzenia. Jest to funkcja, ponieważ jedna osoba może mieć tylko jeden rok urodzenia.

Zbiór wartości funkcji: Vf. Oczywiście Vf zawiera się w Y, ale nie musi mu być równy.

Jeśli Vf=Y, to f: $X \xrightarrow{\text{na}} Y$ **(surjekcja)**

Wykres funkcji to zbiór $\{(x,f(x)) : x \in Df\}$

Jeśli $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1=x_2$, to funkcja jest **injekcją** (różnowartościowa)

Inaczej: jeśli $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, to funkcja jest injekcją

bijekcja = surjekcja+injekcja (odwzorowanie **wzajemnie jednoznaczne**,

jeden do jeden, f: $X \xrightarrow{1\text{-}1} Y$)

restrykcja (obcięcie) – ograniczenie dziedziny do jej podzbioru

Działania na funkcjach: składanie i odwracanie, równość funkcji,

funkcja stała: f(x)=c, identyczność: f(x)=id(x)=x

Funkcje **liczbowe** (niekoniecznie wzór, jakikolwiek przepis, funkcja Dirichleta,

długi rachunek komputerowy), wykres funkcji liczbowej - przykłady

Parzystość, nieparzystość, okresowość

Obraz i przeciwobraz, twierdzenia RR, str. 30

Funkcja odwrotna (nie mylić z liczbą odwrotną!)

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad\qquad f^{-1} \circ f = id_X$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad\qquad f \circ f^{-1} = id_Y$$

np. $f(x) = x^2$ jest odwracalna dla $x \in [0, \infty)$.

Funkcją odwrotna jest $f^{-1}(y) = \sqrt{y},\ y \in [0, \infty),$ bo

$$\sqrt{x^2} = x \text{ lub } \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$

Analogicznie dla innych funkcji odwracalnych.

Odwracanie funkcji

$$f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad x \in [1,2]$$

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - xy + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right)$$

$$\vee\ x = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 - 4}\right)$$

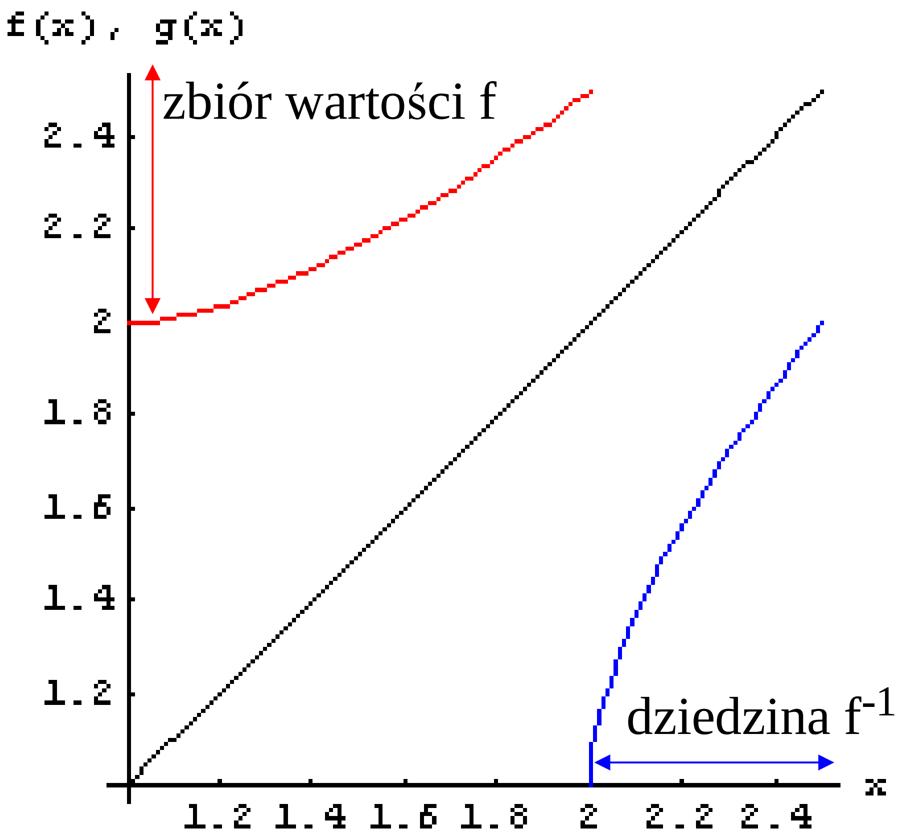
ale dla x=2 mamy y=$\frac{5}{2}$,

więc pozostaje pierwszy przypadek

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right); \quad y \in [2, \frac{5}{2}]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right); \quad x \in [2, \frac{5}{2}]$$

(wykresy funkcji wyjściowej i odwrotnej są symetryczne względem linii y=x)



Zbiór wartości funkcji wyjściowej jest przeciwdziedziną funkcji odwrotnej!

W powyższym przykładzie f([1,2])=[2,3/2]=Df^{-1} (pokaz z kartką papieru)

Funkcje cyklometryczne

arcsin, arccos, arctg, arcctg – arcus sinus, itp.

Trygonometryczne – „mierzące trójkąt” (**sin, cos, tg, ctg, sec, cosec**)

Koło trygonometryczne – przypomnienie

(np. jeśli kąt wynosi 14^o, to ile wynosi y/r?)

Cyklometryczne – „mierzące koło”

(np. jaka jest długość łuku, jeśli x/r = 1.7 ?)

[pokaz z programu Mathematica: cyklo.nb]

Gałęzie, gałąź podstawowa - zawężanie dziedziny tak, aby funkcja odwracana stała się injekcją

Do funkcji arcsin i arccos można dodać liczbę $2k\pi$, do arctg i arcctg liczbę $k\pi$ (k-niezerowa liczba całkowita), w wyniku czego otrzymujemy inne **gałęzie**

Funkcja wykładnicza i logarytm (kompendium)

$y = a^x, \qquad a > 0, a \neq 1, x \in R, y > 0$ - wykładnicza

$x = \log_a y$ - odwrotna do wykładniczej

$\log_e z = \ln z \qquad \mathrm{a}^{\log_\mathrm{a} z} = z$ - a – podstawa logarytmu

$$a = b^c \Rightarrow y = b^{cx} \quad (b > 0, b \neq 1)$$

$$c = \log_b a,\ \ cx = \log_b y \Rightarrow x = \frac{\log_b y}{c} \Rightarrow \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a},\ \ \log_b a \log_a y = \log_b y$$

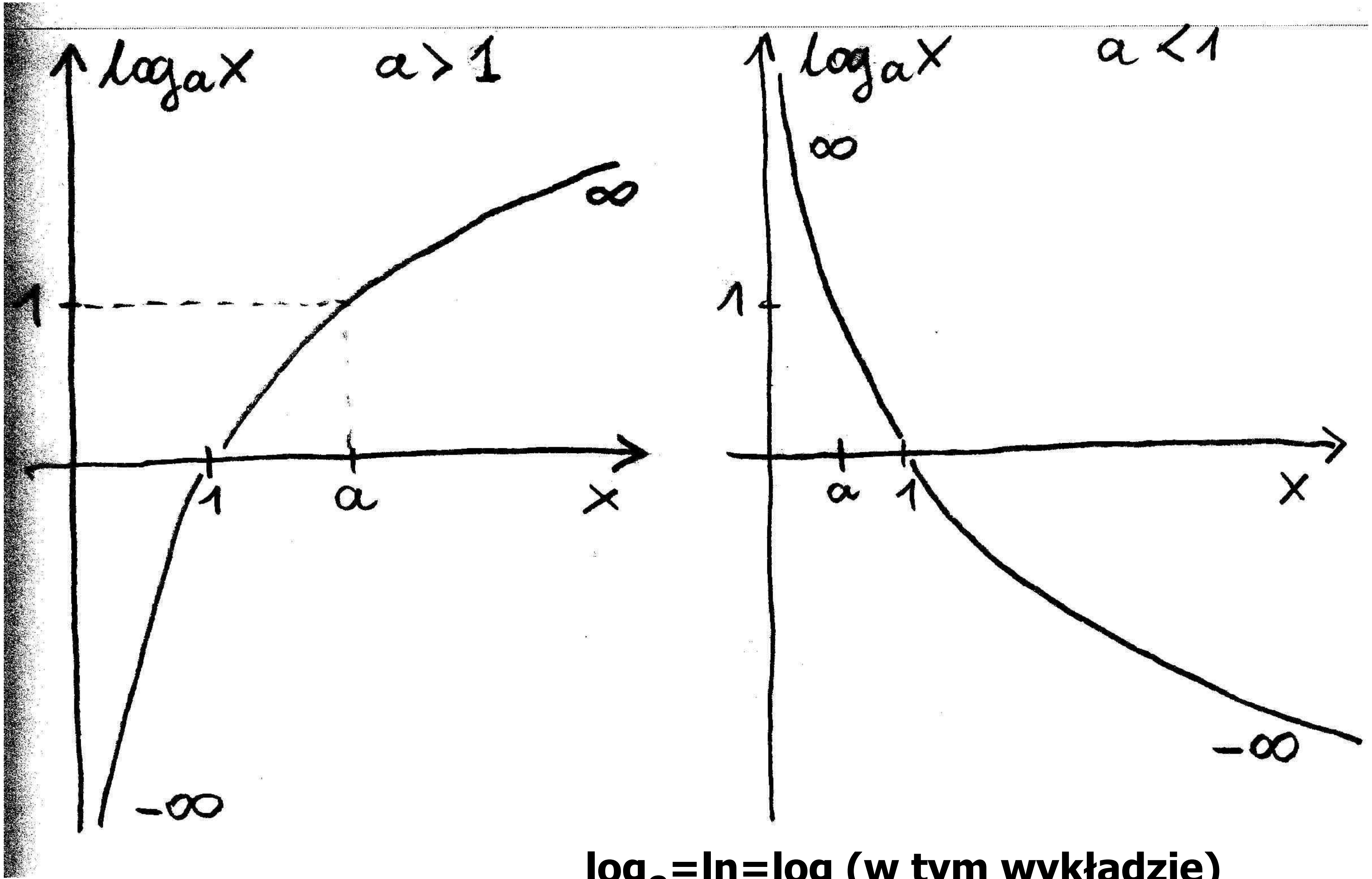
$$\log_z z = 1,\ \ \log_z 1 = 0,\ \ \log_z a = \frac{1}{\log_a z} \qquad (z > 0, z \neq 1)$$

$$y_1 = a^{x_1}, y_2 = a^{x_2}, y_1 y_2 = a^{x_1 + x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_a (y_1 y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a (y_1 y_2)$$

$$y_1 = a^{x_1}, y_2 = a^{x_2}, \frac{y_1}{y_2} = a^{x_1 - x_2} \Rightarrow \log_a y_1 - \log_a y_2 = \log_a \left(\frac{y_1}{y_2} \right)$$

$$y^z = a^{xz},\ z \in R \Rightarrow xz = \log_a y^z \Rightarrow \log_a y^z = z \log_a y$$



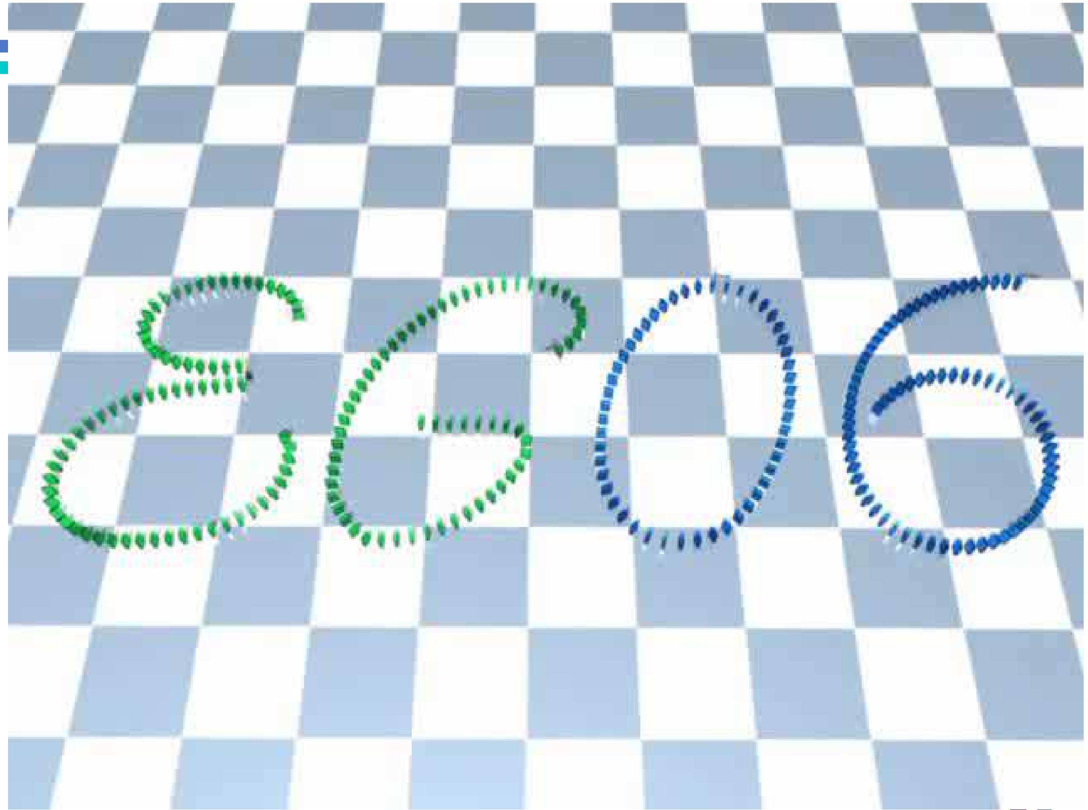
$\log_e$=ln=log (w tym wykładzie)

W fizyce, informatyce, inżynierii zazwyczaj występuje sytuacja a>1:

a=2, e, 10 (logarytm binarny, naturalny, dziesiętny)

Liczby

Zbiory liczbowe



Liczby naturalne, $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,...\}$

klasy zbiorów równolicznych

$1 \ \{\varnothing\}$

$2 \ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$3 \ \{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

...

Zasada indukcji (aksjomat): $1\in A \ \wedge \ n\in A \Rightarrow n+1\in A$. Wtedy A= $\mathbb{N}$.
Sformułowanie ogólniejsze: rozważmy funkcję zdaniową f(n).

$$(f(n_0)=T \ \wedge \ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 : f(n) \Rightarrow f(n+1)) \ \Rightarrow \ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 : f(n)=T$$

(zasada indukcji matematycznej - domino)

Przykład dowodu z pomocą indukcji: **nierówność Bernoulliego**

Tw. Dla $x > -1, x \neq 0, n \geq 2$ zachodzi $(1+x)^n > 1+nx$

D: Dla n=2 mamy $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$.

$(1+x)^{n+1} = \mathbf{(1+x)^n}(1+x) > \mathbf{(1+nx)}(1+x)=1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$

(schemat tego typu dowodów: piszemy lewą stronę tezy, wykorzystujemy założenie + zasadę indukcji, przekształcenia, dostajemy prawą stronę tezy)

Definicja indukcyjna (rekurencyjna)

Przykład: $x^1=x$, $x^{n+1} = x\ x^n$

W ten sposób definiujemy własność dla wszystkich naturalnych n

Symbol Newtona

Silnia: n! = 1*2*3...*n

0!=1, (n+1)! = (n+1)n!

Symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (liczba kombinacji n po k)

Dwumian Newtona: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Trójkąt Pascala:

1	$(a+b)^0$
1 1	$(a+b)^1$
1 2 1	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = \ldots$

współczynniki: symbole Newtona

Ciało (* wykład algebry)

Działanie dwuargumentowe na zbiorze X to odwzorowanie $f : X \times X \longrightarrow X$ (parze przyporządkowany jest element zbioru)

Ciałem nazywamy zbiór X zawierający co najmniej 2 elementy, 0 i 1, w którym określone są działania + (dodawanie) i * (mnożenie) spełniające warunki:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (łączność dodawania)
2. $a + b = b + a$ (przemienność dodawania)
3. $0 + a = a$ (element neutralny dodawania)
4. $\forall a \ \exists b: a + b = 0$ (element przeciwny dodawania)
5. $a * (b * c) = (a * b) * c$ (łączność mnożenia)
6. $a * b = b * a$ (przemienność mnożenia)
7. $1 * a = a$ (element neutralny mnożenia)
8. $\forall a \neq 0 \ \exists b : a * b = 1$ (element odwrotny mnożenia)
9. $a * (b + c) = a * b + b * c$ (rozdzielność mnożenia wzgl. dodawania)

Odejmowanie – dodawanie elementu przeciwnego

Dzielenie – mnożenie przez element odwrotny

Z własności ciała wynika, że nie może być więcej niż jeden elementów 0 oraz więcej niż jeden elementów 1

Element przeciwny oznaczamy jako –a, a odwrotny jako a^{-1} lub 1/a

Znak * często opuszczamy: a * b = a b

Ciało uporządkowane

W ciele wprowadzamy relacje mniejszości $<$ o następujących własnościach:

1. Zachodzi dokładnie jeden z warunków: $a<b$, $a=b$, $b<a$
2. Relacja $<$ jest przechodnia
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. $a < b,\ 0 < c \Rightarrow a * c < b * c$

Ciało z powyższymi własnościami nazywamy **ciałem uporządkowanym**

(ciało uporządkowane liczb wymiernych, rzeczywistych)

Liczby rzeczywiste

Intuicja: odległość punktów w przestrzeni, przekątna kwadratu o boku 1 nie jest liczbą wymierną! Potrzebujemy więcej liczb – liczby niewymierne

Podzbiór A zbioru X jest **ograniczony od dołu** jeśli $\exists m \in X \ \forall a \in A : a \geq m$

Podzbiór A zbioru X jest **ograniczony od góry** jeśli $\exists M \in X \ \forall a \in A : a \leq M$

Największą z liczb m nazywamy **kresem dolnym** zbioru A (infimum, inf A)

Najmniejszą z liczb M nazywamy **kresem górnym** zbioru A (supremum, sup A)

Aksjomat ciągłości dla zbioru X: każdy niepusty i ograniczony od dołu podzbiór A zbioru X ma kres dolny należący do X

Tw. Niepusty i ograniczony od góry A ma kres górny w X

Kres dolny może należeć lub nie należeć do A

Przykład: przedział otwarty i domknięty zbioru $\mathbb{R}$

Przekroje Dedekinda (*)

(Leja) Przekrój Dedekinda liczb wymiernych: podział zbioru na dwie klasy, górną i dolną

Klasa górna (B) jest domknięta, jeśli zawiera kres dolny

Klasa dolna (A) jest domknięta, jeśli zawiera kres górny

a) B i A są domknięte – niemożliwe, bo średnia kresów, (a+b)/2, która jest liczbą wymierną, nie należałaby do żadnej z klas

b) Żadna z klas nie jest domknięta (przekrój niewymierny)

c) Dokładnie jedna z klas jest domknięta (przekrój wymierny)

Liczba rzeczywista – przekrój Dedekinda

Tw. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie spełnia aksjomatu ciągłości

Rozważmy A={x $\in$ $\mathbb{Q}$: x > 0, x^2 > 2}. A jest ograniczony od dołu. Załóżmy, że p=inf A, p $\in$ $\mathbb{Q}$. Rozważmy liczbę q taką, że (jest to swego rodzaju „sztuczka")

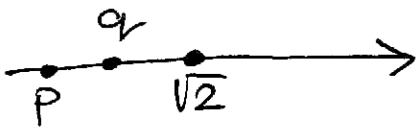
$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2}$$

$$q^2 = 2 + \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}$$

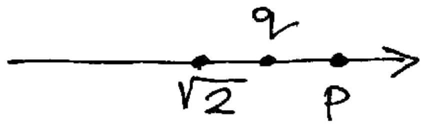
Możliwe 2 przypadki ($p^2 = 2$ wykluczony wcześniej):

1) $p^2 < 2$, wtedy sprawdzamy, że q > p, oraz $q^2 < 2$, czyli q ogranicza A od dołu i jest większe od p, a więc p nie jest kresem dolnym A

2) $p^2 > 2$, wtedy q < p, oraz $q^2 > 2$, czyli q $\in$ A i jest mniejsze od p, zatem wbrew założeniu p nie jest kresem dolnym A



1)



2)

Zatem w obu możliwych przypadkach doszliśmy do sprzeczności, więc A nie ma kresu w $\mathbb{Q}$, co kończy dowód

Liczba jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nie zawiera powtarzających się (okresowych) ciągów cyfr

rzeczywiste = wymierne + niewymierne

niewymierne = algebraiczne + przestępne

algebraiczne: pierwiastki równania $W_n(x)=0$ o współczynnikach całkowitych

przykłady liczb przestępnych: e, π, e^{π}, sin 1, ln 2, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ...

Zasada Archimedesa: dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna n taka, że n > a

Liczby wymierne – „sito” z dziurami! Uszczelniamy dziury liczbami niewymiernymi.
Między dwiema różnymi dowolnie bliskimi liczbami wymiernymi leży liczba niewymierna, a między dwiema różnymi dowolnie bliskimi liczbami niewymiernymi leży liczba wymierna. Jednak liczb niewymiernych jest więcej!

Liczebność zbiorów

Dla zbiorów skończonych moc (kardynalność) |A| zbioru A jest równa liczbie elementów zbioru A. Dla zbiorów nieskończonych liczba elementów jest nieskończona, jednak mamy różne nieskończoności i możemy je klasyfikować.

Zbiory A i B są równoliczne, jeśli istnieje bijekcja $A \xrightarrow{\text{na}} B$.

Zbiory skończone nazywamy przeliczalnymi, a zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ nieskończonymi przeliczalnymi

Dla zbiorów rozłącznych $|A \cup B| = |A| + |B|$

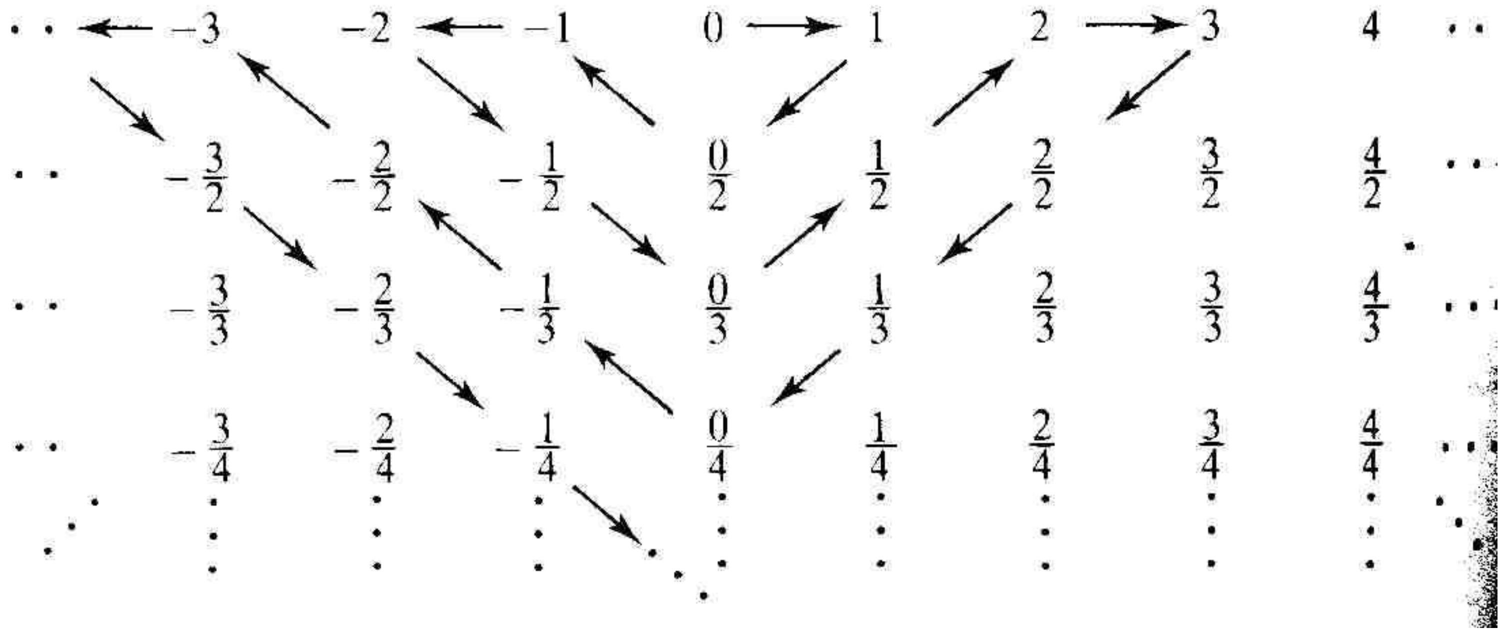
Dla iloczynu kartezjańskiego $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Dla zbioru potęgowego $|2^A| = 2^{|A|}$

Zbiory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ są równoliczne z $\mathbb{N}$, a więc przeliczalne
Zbiory $\mathbb{R}$ i przedział (0,1) są równoliczne

Kardynalność zbioru potęgowego zbioru A wynosi $2^{|A|}$

Notacja: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$



Przeliczalność zbioru liczb wymiernych (GT)

Zbiór, który można uszeregować w listę (choćby nieskończoną) jest z definicji przeliczalny

Argument przekątniowy Cantora

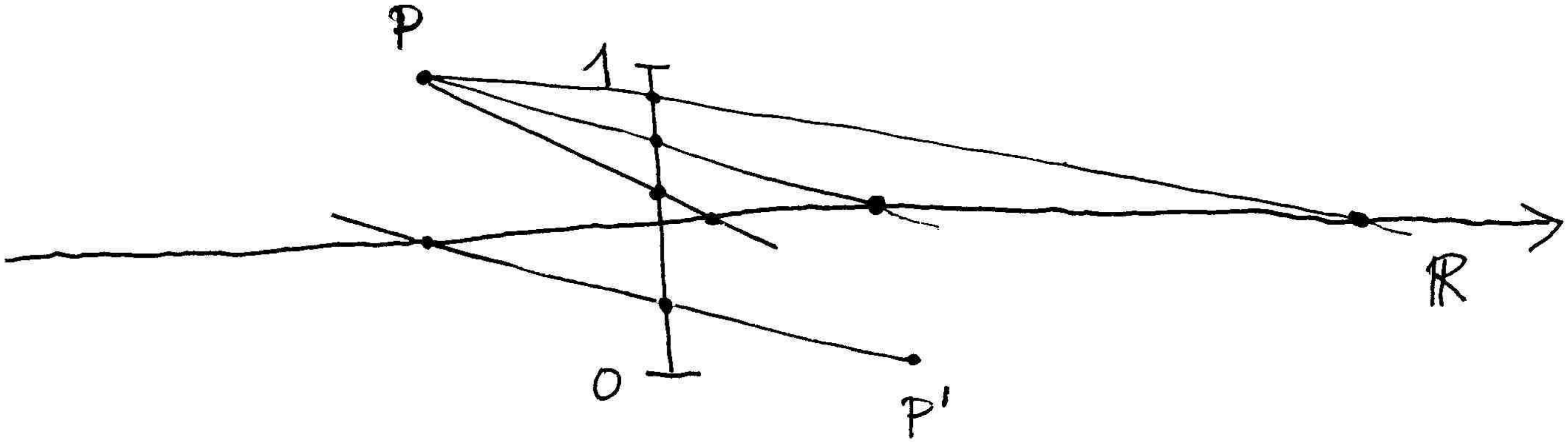
Zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ nie są równoliczne, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
Cantor: nie istnieje bijekcja z $\mathbb{N}$ na (0,1)

D: Nieskończona lista rozwinięć dziesiętnych liczb z przedziału (0,1) ma postać
$.a_0a_1a_2a_3a_4...$
$.b_0b_1b_2b_3b_4...$
$.c_0c_1c_2c_3c_4...$
...

Załóżmy, że wypisaliśmy (w przeliczalny sposób) wszystkie liczby z (0,1).
Teraz konstruujemy liczbę x w następujący sposób: n-tą cyfrę bierzemy z n-tego rzędu, modyfikując ją następujący sposób: jeśli równa się 4, to zamieniamy na 3, jeśli nie równa się 4, to zamieniamy na 4. Przykład:

.**2**17853...
.6**4**2222... x = .4344...
.01**8**800... x jest z konstrukcji różne od wszystkich wypisanych liczb (co
.987**6**97... najmniej na jednym miejscu), zatem R jest nieprzeliczalny
...

Równoliczność R i przedziału (0,1)



Istnieje bijekcja, więc R i (0,1) są równoliczne

Hipoteza continuum

Kolejne liczby kardynalne otrzymywane przez potęgowanie zbiorów:

$$\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}, \quad \aleph_2 = |2^{2^{\mathbb{N}}}| = 2^{\aleph_1}, \ldots$$

Hipoteza continuum Cantora:

nie ma zbioru o kardynalności pośredniej między $\aleph_0$ i c

$$c = \aleph_1$$

Hipoteza Cantora jest niezależna od postulatów teorii mnogości i nie można jej udowodnić ani obalić! Można ją przyjąć lub odrzucić

Hipoteza Cantora, ŚM 216, Goedel (1938), Cohen (1963)

Liczby zespolone (* algebra)

Liczbą zespoloną z nazywamy parę liczb rzeczywistych (a,b).
a – część rzeczywista, b – część urojona
Dodawanie: (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)
Mnożenie: (a,b) (c,d) = (ac – bd, ad + bc)
Ta konstrukcja spełnia aksjomaty ciała: (0,0) ,(1,0) – elementy neutralne dodawania i mnożenia
Inna, najpopularniejsza notacja: wprowadzamy i = (0,1) i piszemy (a,b) =a + i b.
Wówczas algebrę możemy prowadzić „normalnie”, korzystając z faktu $i^2 = -1$.

Sprzężenie: (a,b)*=(a,–b), lub (a + ib)* = a – ib. Inna notacja: $\overline{z}$
Własności sprzężenia:

$$\overline{(\overline{z})}=z, \quad z+\overline{z}=2x, \quad z-\overline{z}=2iy, \quad z\overline{z}=x^2+y^2$$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad \overline{az}=a\overline{z} \quad (a\in R)$$

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\;\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

Część rzeczywista: Re(a+ib)=a, część **urojona:** Im(a+ib)=b

Wartość bezwzględna (moduł): $|a+ib| = (a^2+b^2)^{1/2}$, $z\, z^* = |z|^2$

Argument: Arg(a+ib) = arctg(b/a)

Interpretacja trygonometryczna: $z = r\,(\cos\phi + i \sin\phi)$

Tw. $z_1 = r_1\,(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2\,(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, to

a) $z_1\, z_2 = r_1\, r_2\,[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$

b) $z_1 / z_2 = r_1 / r_2\,[\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)]$

Mnożenie: obroty na płaszczyźnie zespolonej

Wzór de Moivra: $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ (przez indukcję)

Ponadto $(\cos(-n\phi) + i\sin(-n\phi))\,(\cos n\phi + i\sin n\phi) = 1$, więc

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^{-n} = \cos(-n\phi) + i\sin(-n\phi)$$

Definiujemy $\exp(i\,\phi) = \cos\phi + i\sin\phi$ - funkcja wykładnicza o argumencie zespolonym, $z = r\exp(i\,\phi)$ - moduł r, faza ϕ

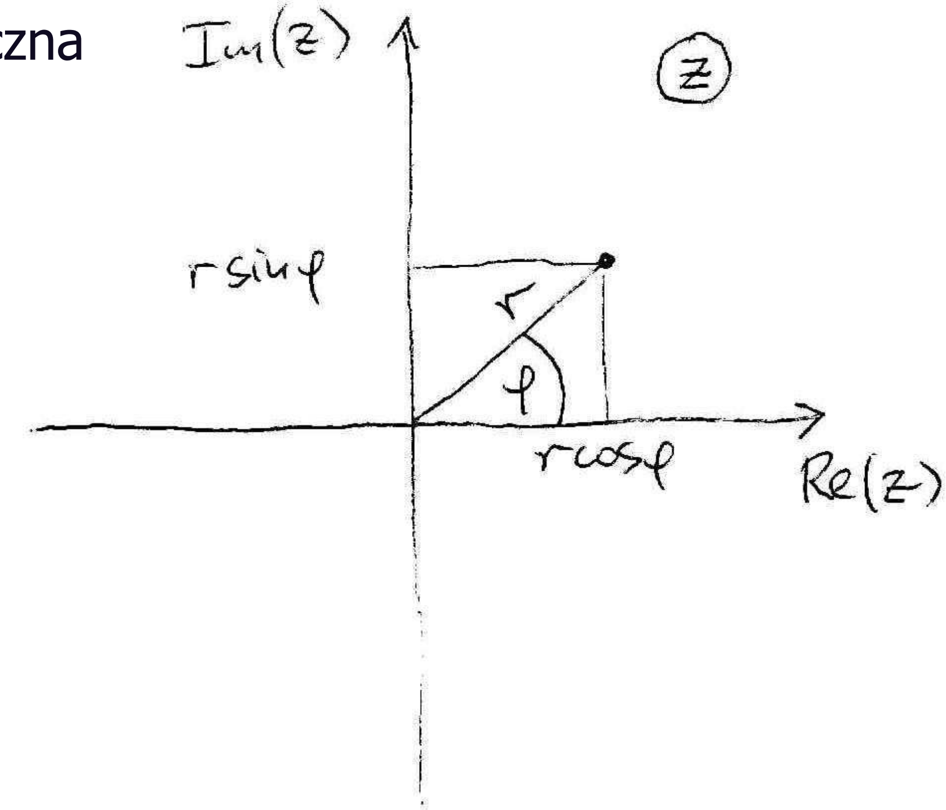
$$\exp(i\phi) \equiv e^{i\phi}$$

Wtedy $z_1\, z_2 = r_1\, r_2 \exp(i\,\phi_1)\exp(i\,\phi_2) = r_1\, r_2 \exp(i\,\phi_1 + i\phi_2)$

Użyteczność liczb zespolonych (fizyka, elektronika, funkcje zespolone)

Pierwiastki zespolone wielomianów

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej:



r – moduł

ϕ - argument

Dalsze własności liczb zespolonych

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

bo $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \le \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2} + \sqrt{a_2{}^2 + b_2{}^2}$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

Euler:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{i\varphi + 2k\pi i} = e^{i\varphi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

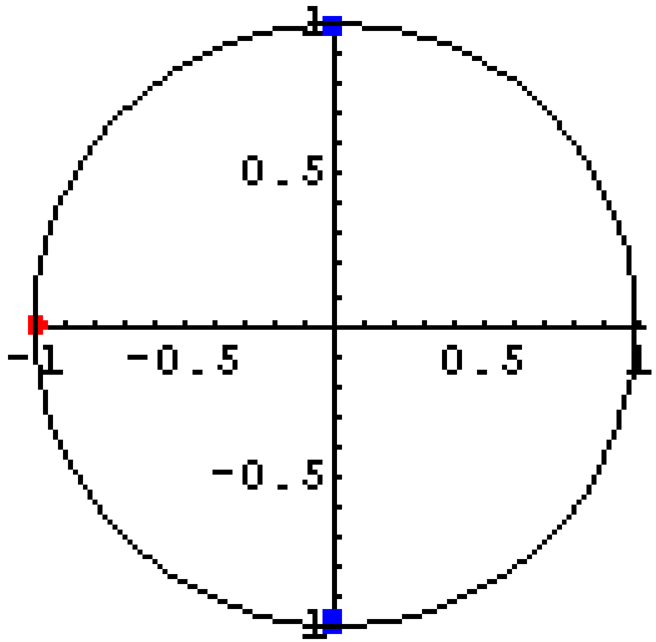
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\ \sqrt[n]{e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\ \sqrt[n]{e^{i\varphi + 2k\pi i}} = \sqrt[n]{r}\ \sqrt[n]{e^{i\varphi + 2k\pi i}} =$$

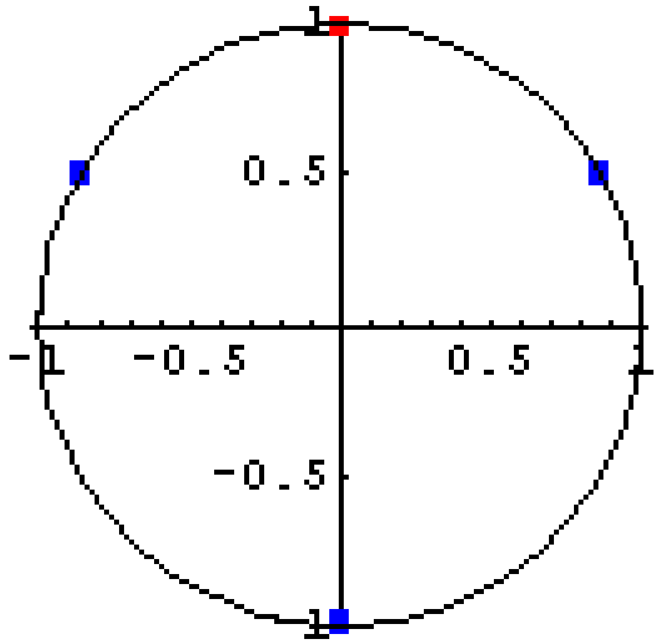
$$= \sqrt[n]{r}\ e^{i\varphi/n + 2k\pi i/n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1)$$

$\sqrt[2]{1} = e^{i0/2 + 2k\pi i/2} \quad (k = 0, 1)$, czyli $\sqrt[2]{1} = 1 \vee \sqrt[2]{1} = -1$

$$\sqrt{-1} = i, -i$$

$\sqrt[3]{i} = e^{i\pi/6 + 2k\pi i/3} \quad (k = 0, 1, 2)$, czyli $\sqrt[3]{i} = e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{i9\pi/6}$





$$\sqrt{-1} = i, -i \qquad \sqrt[3]{i} = e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{i3\pi/2}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych