

Zestaw 3 - Równania różniczkowe cząstkowe

1. Struna o długości L drgająca z małą amplitudą w płaszczyźnie jest zamocowana w jednym końcu, a drugi koniec pozostaje swobodny (należy wiedzieć, że w swobodnym końcu struna ma strzałkę, tj. w każdej chwili maksymalne wychylenie). Prędkość rozchodzenia się fali wynosi v .
 - (a) Oznacz wychylenie struny od położenia równowagi przez $u(x, t)$. Napisz stosowne równanie i *warunki brzegowe*.
 - (b) Zastosuj metodę separacji zmiennych. Rozważ część przestrzenną równania, znajdź rozwiązania spełniające warunek brzegowy (drżania własne lub mody) i znajdź widmo częstości drgań (tj. rozwiąż problem Sturm-Liouville'a).
 - (c) Załóż warunek początkowy $u(x, 0) = x$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0$. Znajdź współczynniki rozwinięcia $u(x, 0)$ w postaci szeregu drgań własnych, następnie zapisz $u(x, t)$ w postaci szeregu.
2. Stosując metodę separacji zmiennych, znajdź widmo drgań prostokątnego bębna o bokach długości a i $2a$. Prędkość rozchodzenia się fali wynosi v .
3. Rozważ bardzo cienką rurę o długości $2L$. W środku rury znajduje się przegroda, oddzielająca gaz znajdujący się po jej lewej stronie od próżni po stronie prawej. Stała dyfuzji wynosi D . Gęstość gazu wynosi n_0 . W pewnej chwili przegroda zostaje usunięta. Stosując metodę, jak w powyższych zadaniach, znajdź szereg opisujący zależność koncentracji gazu od położenia i czasu. Jakie jest rozwiązanie dla $t \rightarrow \infty$?