Prof. dr hab. Wojciech Broniowski
Instytut Fizyki, UJK

Analiza Mat. 3, fiz. II, 2008/9

Zestaw 1 - Analiza wielowymiarowa

Definicje:
Objętość n-wymiarowej hiperbryły:

$$V = \int \ldots \int_A dx_1 \ldots dx_n,$$

gdzie A jest obszarem "zajmowanym" przez hiperbryłę. Środek ciężkości jednorodnej hiperbryły ma współrzędne:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{V} \int \ldots \int_A dx_1 \ldots dx_n \, x_i.$$

Średni promień kwadratowy definiujemy jako:

$$\overline{r^2} = \frac{1}{V} \int \ldots \int_A dx_1 \ldots dx_n \left((x_1 - \bar{x}_1)^2 + \ldots + (x_n - \bar{x}_n)^2 \right).$$

Wielkość ta jest pewną wygodną miarą rozmiaru hiperbryły.

1. (zadanie trywialne) Rozważ n-wymiarową *hiperkostkę*, zdefiniowaną jako obszar $0 \leq x_i \leq R$, $i = 1, \ldots, n$. Znajdź objętość, środek ciężkości i średni promień kwadratowy. Rób zadanie sprytnie, zauważając *faktoryzację* całek. Przedyskutuj skalowanie obliczonych wielkości z rozmiarem R.

2. *Sympleks (standardowy)* n-wymiarowy zdefiniowany jest jako obszar $0 \leq x_i$, $x_1 + \ldots x_n \leq R$. Jest to n-wymiarowe uogólnienie trójkąta równobocznego prostokątnego. Nazwijmy R skalą sympleksu.

   (a) Pokaż, że *przekrój* sympleksu n-wymiarowego dla ustalonego $x_j = r$, $0 \leq r \leq R$, jest $n-1$-wymiarowym sympleksem o skali $R - r$. Zrób ilustracje dla $n = 2$ i $n = 3$.

   (b) Udowodnij indukcyjnie, że objętość sympleksu wynosi

   $$V_n = \frac{R^n}{n!}.$$

   Wskazówka: skorzystaj z pkt. 2a.

   (c) W podobny sposób znajdź wzór na środek ciężkości n-wymiarowego sympleksu ...

   (d) * ... średni promień kwadratowy (odp.: $R^2 \frac{n^2}{(n+1)^2(n+2)}$) ...

(e) ... oraz całkę

$$\int \ldots \int_S \frac{1}{\sqrt{x_i}} dx_1 \ldots dx_n,$$

$i = 1, \ldots, n$, gdzie S oznacza obszar sympleksu. Całka ta będzie pomocna poniżej. Wskazówka: Zauważ, że jak w powyższych zadaniach, całka po $dx_1 \ldots dx_{n-1}$ daje objętość $n-1$-wymiarowego sympleksu o boku $R - x_n$. Otrzymujemy więc całkę typu

$$\int_0^R dx \frac{(x-R)^{n-1}}{\sqrt{x}},$$

$x = x_n$. Pokaż indukcyjnie, że ta całka wynosi

$$R^{n-1/2} \frac{2^n}{(2n-1)!!}.$$

Sprawdź wzór jawnym rachunkiem dla kilku pierwszych wartości n.

3. *Hiperkula* n-wymiarowa zdefiniowana jest jako obszar $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2$.

(a) Znajdź wzór na objętość hiperkuli w parzystej liczbie wymiarów $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. W tym celu wprowadź współrzędne biegunowe dla każdej pary współrzędnych, w szczególności $z_k = \rho_k^2 = x_k^2 + x_{k+1}^2$. Pokaż, że wówczas

$$V_n = \pi^k \int \ldots \int_A dz_1 \ldots dz_k,$$

gdzie A jest obszarem zadanym przez warunki $0 \leq z_k$, $z_1 + \ldots z_k = R^2$. Co Ci to przypomina? Skorzystaj teraz z wyniku zad. 2b. Odp: $V_n = R^{2k}\pi^k/k!$.

(b) Powtórz powyższy punkt dla nieparzystej liczby wymiarów, $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$. Jedną współrzędną pozostaw, a dla pozostałej parzystej liczby wprowadź współrzędne biegunowe jak wyżej. Następnie skorzystaj z wyniku zad. 2e. Odp: $V_n = R^{2k-1}\pi^{k-1}2^k/(2k-1)!!$.

(c) Sprawdź powyższe wzory dla $n = 1, 2, 3$. Dla jakiego n hiperkula o $R = 1$ ma największą objętość? Znajdź granicę $\lim_{n\to\infty} V$ i przedyskutuj wynik.

(d) Znajdź stosunek objętości hiperkuli do opisanej na niej hiperkostki. Przedyskutuj wynik.

(e) * W podobny sposób znajdź średni promień kwadratowy hiperkuli.

4. Powyższe zadanie można również rozważać przy pomocy współrzędnych hipersferycznych:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi_1, \\
x_2 &= r\sin\phi_1\cos\phi_2, \\
x_3 &= r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3, \\
&\ldots \\
x_{n-1} &= r\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3\ldots\cos\phi_{n-1}, \\
x_{n-1} &= r\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3\ldots\sin\phi_{n-1},
\end{aligned}$$

gdzie $0 \leq r \leq R$, ostatni kąt (tzw. azymutalny) $0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$, natomiast $0 \leq \phi_i \leq \pi$ dla $i = 1, \ldots, n-2$. (W zależności od problemu, użycie tych współrzędnych może ułatwić, albo też utrudnić życie!)

(a) Wyjaśnij, dlaczego kąty mają podany wyżej zakres. Napisz transformację odwrotną, tj. wyrażającą r i kąty poprzez współrzędne kartezjańskie $x_1, \ldots, x_n$.

(b) * Wyprowadź wzór na jakobian przejścia (zacznij od $n = 2$ i $n = 3$ ...

(c) ... i z jego pomocą wzór na średni promień kwadratowy hiperkuli (z pomocą tej metody jest to bardzo łatwe!).

(d) Korzystajac z faktu, że $n-1$-wymiarowa hiperpowierzchnia n-wymiarowej hiperkuli wyraża się wzorem $S_n = \frac{d}{dR} V_n$, wyprowadź wzór na S_n. Sprawdź, że $V_n/S_n = R/n$.

5. Wracamy do sympleksów! Zadanie interdyscyplinarne: Zmienna losowa $x \in [0, \infty)$ ma rozkład wykładniczy $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$. Jaki rozkład ma zmienna X będąca sumą n niezależnych zmiennych o powyższym rozkładzie? Jak można przybliżyć uzyskany rozkład dla dużych n (zob. centralne twierdzenie graniczne).

6. Wracamy do trzech wymiarów. Rozważ bryłę powstałą w wyniku przecięcia kuli i walca. Znajdź wzory na objętość i pole powierzchni tej bryły (w ogólności całki eliptyczne).

7. Przecięcie powierzchni kuli o środku (0,0,0) i promieniu $2a$ oraz walca o osi przesuniętej od (0,0,0) o a i promieniu a tworzy tzw. krzywą Vivianiego. Naszkicuj sytuację. Znajdź parametryczne równanie tej krzywej. Czy krzywa leży w płaszczyźnie? Odpowiedź udowodnij.