

Termin (nieprzekraczalny!): 24.10.07

Analiza Mat. 3, fiz. II, 2007/8

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane. * oznacza zadanie nadobowiązkowe.

Zestaw 1 - Analiza wielowymiarowa

Powtórz niezbędne elementy analizy wielowymiarowej z zeszłorocznego wykładu!

Definicje:

Objętość n -wymiarowej hiperbryły:

$$V = \int \dots \int_A dx_1 \dots dx_n,$$

gdzie A jest obszarem "zajmowanym" przez hiperbryłę. Środek ciężkości jednorodnej hiperbryły ma współrzędne:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{V} \int \dots \int_A dx_1 \dots dx_n x_i.$$

Średni promień kwadratowy definiujemy jako:

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{V} \int \dots \int_A dx_1 \dots dx_n \left((x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2 \right).$$

Wielkość ta jest pewną wygodną miarą rozmiaru hiperbryły.

1. (zadanie trywialne) Rozważ n -wymiarową hiperkostkę, zdefiniowaną jako obszar $0 \leq x_i \leq R$, $i = 1, \dots, n$. Znajdź objętość, środek ciężkości i średni promień kwadratowy. Rób zadanie sprytnie, zauważając faktoryzację całek. Przedyskutuj skalowanie obliczonych wielkości z rozmiarem R .
2. *Sympleks (standardowy)* n -wymiarowy zdefiniowany jest jako obszar $0 \leq x_i$, $x_1 + \dots + x_n \leq R$. Jest to n -wymiarowe uogólnienie trójkąta równobocznego prostokątnego. Nazwijmy R skalą sympleksu.
 - (a) Pokaż, że przekrój sympleksu n -wymiarowego dla ustalonego $x_j = r$, $0 \leq r \leq R$, jest $n - 1$ -wymiarowym sympleksem o skali $R - r$. Zrób ilustracje dla $n = 2$ i $n = 3$.
 - (b) Udowodnij indukcyjnie, że objętość sympleksu wynosi

$$V_n = \frac{R^n}{n!}.$$

Wskazówka: skorzystaj z pkt. 2a.

- (c) W podobny sposób znajdź wzór na środek ciężkości n -wymiarowego sympleksu ...

- (d) * ... średni promień kwadratowy (odp.: $R^2 \frac{n^2}{(n+1)^2(n+2)}$) ...
 (e) ... oraz całkę

$$\int \dots \int_S \frac{1}{\sqrt{x_i}} dx_1 \dots dx_n,$$

$i = 1, \dots, n$, gdzie S oznacza obszar sympleksu. Całka ta będzie pomocna poniżej. Wskazówka: Zauważ, że jak w powyższych zadaniach, całka po $dx_1 \dots dx_{n-1}$ daje objętość $n - 1$ -wymiarowego sympleksu o boku $R - x_n$. Otrzymujemy więc całkę typu

$$\int_0^R dx \frac{(x - R)^{n-1}}{\sqrt{x}},$$

$x = x_n$. Pokaż indukcyjnie, że ta całka wynosi

$$R^{n-1/2} \frac{2^n}{(2n-1)!!}.$$

Sprawdź wzór jawnym rachunkiem dla kilku pierwszych wartości n .

3. *Hiperkula* n -wymiarowa zdefiniowana jest jako obszar $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$.

- (a) Znajdź wzór na objętość hiperkuli w parzystej liczbie wymiarów $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$. W tym celu wprowadź współrzędne biegunowe dla każdej pary współrzędnych, w szczególności $z_k = \rho_k^2 = x_k^2 + x_{k+1}^2$. Pokaż, że wówczas

$$V_n = \pi^k \int \dots \int_A dz_1 \dots dz_k,$$

gdzie A jest obszarem zadanym przez warunki $0 \leq z_k$, $z_1 + \dots + z_k = R^2$. Co Ci to przypomina? Skorzystaj teraz z wyniku zad. 2b. Odp: $V_n = R^{2k} \pi^k / k!$.

- (b) Powtórz powyższy punkt dla nieparzystej liczby wymiarów, $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$. Jedną współrzędną pozostaw, a dla pozostałej parzystej liczby wprowadź współrzędne biegunowe jak wyżej. Następnie skorzystaj z wyniku zad. 2e. Odp: $V_n = R^{2k-1} \pi^{k-1} 2^k / (2k-1)!!$.
 (c) Sprawdź powyższe wzory dla $n = 1, 2, 3$. Dla jakiego n hiperkula o $R = 1$ ma największą objętość? Znajdź granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} V$ i przedyskutuj wynik.
 (d) Znajdź stosunek objętości hiperkuli do opisanej na niej hiperkostki. Przedyskutuj wynik.
 (e) * W podobny sposób znajdź średni promień kwadratowy hiperkuli.

4. Powyższe zadanie można również rozważać przy pomocy współrzędnych hipersferycznych:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \phi_1, \\ x_2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \\ x_3 &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3, \\ &\dots \\ x_{n-1} &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \dots \cos \phi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \dots \sin \phi_{n-1}, \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq r \leq R$, ostatni kąt (tzw. azymutalny) $0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$, natomiast $0 \leq \phi_i \leq \pi$ dla $i = 1, \dots, n-2$. (W zależności od problemu, użycie tych współrzędnych może ułatwić, albo też utrudnić życie!)

- (a) Wyjaśnij, dlaczego kąty mają podany wyżej zakres. Napisz transformację odwrotną, tj. wyrażającą r i kąty poprzez współrzędne kartezjańskie x_1, \dots, x_n .
 - (b) * Wyprowadź wzór na jacobian przejścia (zaczynij od $n = 2$ i $n = 3$...
 - (c) ... i z jego pomocą wzór na średni promień kwadratowy hiperkuli (z pomocą tej metody jest to bardzo łatwe!).
 - (d) Korzystając z faktu, że $n-1$ -wymiarowa hiperpowierzchnia n -wymiarowej hiperkuli wyraża się wzorem $S_n = \frac{d}{dR} V_n$, wyprowadź wzór na S_n . Sprawdź, że $V_n/S_n = R/n$.
5. Wracamy do sympleksów! Zadanie interdyscyplinarne: Zmienna losowa $x \in [0, \infty)$ ma rozkład wykładniczy $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$. Jaki rozkład ma zmienna X będąca sumą n niezależnych zmiennych o powyższym rozkładzie? Jak można przybliżyć uzyskany rozkład dla dużych n (zob. centralne twierdzenie graniczne).
6. Wracamy do trzech wymiarów. Rozważ bryłę powstałą w wyniku przecięcia kuli i walca. Znajdź wzory na objętość i pole powierzchni tej bryły (w ogólności całki eliptyczne).
7. Przecięcie powierzchni kuli o środku $(0,0,0)$ i promieniu $2a$ oraz walca o osi przesuniętej od $(0,0,0)$ o a i promieniu a tworzy tzw. krzywą Vivianiego. Naszkicuj sytuację. Znajdź parametryczne równanie tej krzywej. Czy krzywa leży w płaszczyźnie? Odpowiedź udowodnij.