Analiza Mat. 3, fizyka, 2008/2009
Prof. dr hab. Wojciech Broniowski

Zestaw 0: Całki wielowymiarowe, liniowe, powierzchniowe, układy współrzędnych krzywoliniowych

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krysicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Oblicz całkę
$$\int\int_D xydxdy$$
po obszarze D będącym wnętrzem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,0)$.

2. Oblicz całkę
$$\int\int\int_V xyz,$$
gdzie obszar V jest sześcianem o wierzchołkach w punktach $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$.

3. Zmień kolejność całkowania w całce
$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x,y).$$
(Wskazówka: potnij obszar całkowania na paski równoległe do osi Ox.)

4. Zmień kolejność całkowania w poniższej całce i pokaż, że można ją zapisać w postaci całki jednokrotnej:
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy f(y).$$

5. Poprzez odpowiedni dobór współrzędnych krzywoliniowych zamień całki dwukrotne na jednokrotne:
$$I_1 = \int_{x^2+y^2\leq R^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, I_2 = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1} f(\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2})dxdy$$

6. Znajdź środek ciężkości ćwiartki kuli, powstałej z kuli przez cięcie wzdłuż płaszczyzny równika i płaszczyzny równoleżnika 0^o.

7. Korzystając ze współrzędnych sferycznych oblicz powierzchnię wycinka sfery między południkami 0^o i 45^o oraz równoleżnikami 30^o i 90^o.

8. *Współrzędne toroidalne.* Torus dany jest parametrycznie jako

$$\begin{aligned} x &= (a+\rho\cos\phi)\cos\alpha, \\ y &= (a+\rho\cos\phi)\sin\alpha, \\ z &= \rho\sin\phi, \\ & \phi\in[0,2\pi],\ \alpha\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,R] \end{aligned}$$

gdzie $R < a$. Zrób stosowny rysunek i podaj interpretację a, R, oraz kątów ϕ i α. Pokaż, że jakobian przekształcenia wynosi

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\alpha)}\right| = \rho(a+\rho\cos\phi).$$

Oblicz objętość torusa z pomocą całek po zmiennych ρ, ϕ, α. Oblicz w analogiczny sposób położenie środka ciężkości połowy torusa powstałej z przecięcia wzdłuż płaszczyzny $y = 0$ (tj. $\alpha \in [0, \pi]$).

9. Znajdź jakobiany J_1, J_2 i J_3, następnie z pomocą wzoru na pole powierzchni w dowolnych współrzędnych (tegoroczny wykład) wyprowadź wzór na pole powierzchni torusa i połowy torusa z poprzedniego zadania.

10. Znajdź momenty bezwładności torusa względem osi Oz i Ox.

11. Celem sprawdzenia, znajdź objętość i pole powierzchni torusa z poprzednich zadań z pomocą reguł Guldina (patrz wykład z zeszłego roku).

12. Oblicz całki krzywoliniowe zorientowane

    (a) $I_1 = \int_C x dx + (1+y)dy$, gdzie C jest krzywą biegnącą wzdłuż prostej od punktu $(0,0)$ do punktu $(2,1)$.

    (b) $I_2 = \int_K y^2 dx + x^2 dy$, gdzie K jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = b\cos t$, oraz $t \in [0,\pi]$.

    (c) $I_3 = \int_L -y dx + x dy - 2y dz$, gdzie L jest krzywą o równaniu parametrycznym $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = bt$ (spirala), oraz $t \in [0, 2\pi]$.

    (d) $I_4 = \int_P x^2 dx + \sqrt{xy} dy$, gdzie P jest ćwiartką okręgu od punktu $(x,y) = (0,R)$ do punktu $(x,y) = (R,0)$, tj. przebieganą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

    (e) $I_5 = \int_S (2y - xy)dx + (x - x^2y^2)$, gdzie S jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $(0,0)$ do punktu (a, a^2).

13. Oblicz całki krzywoliniowe niezorientowane

    (a) $J_1 = \int_L xy ds$, gdzie L jest krzywą o równaniu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a $ds = \sqrt{x(t)'^2 + y(t)'^2} dt$ jest różniczką długości (naszkicuj krzywą!).

    (b) $J_2 = \int_C ds$, gdzie L jest linią śrubową $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \lambda t$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) $J_3 = \int_A x^2 y$, gdzie A jest łukiem elipsy leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

14. Z pomocą wzoru Greena oblicz całkę

$$\oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy,$$

gdzie K jest dodatnio zorientowanym konturem będącym brzegiem trójkata o wierzchołkach $(-1,0)$,$(0,1)$ i $(1,0)$.

15. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} x^2 dx + (y^2+2) dy$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz. Znajdź odpowiedni potencjał.

16. Sprawdź, że całka

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2 - 5yz) dx + (y^3 - 5xz) dy + (z^3 - 5xy) dz$$

nie zależy od drogi całkowania, a nastepnie ją oblicz.

17. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_S (x^2+y^2) dS,$$

gdzie S jest półsferą $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z \geq 0$.

18. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_S x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną półsfery $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z \geq 0$.

19. Korzystając ze wzoru Gaussa oblicz całkę

$$\int_S (x-y) dy dz + (y-z) dx dz + (z-x) dx dy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną (pobocznica plus podstawa) stożka $x^2+y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$.

20. Korzystając ze wzoru Stokesa zamień całkę

$$\oint_L x^2 y^2 dx + z dy - y dz,$$

gdzie L jest okręgiem $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, na całkę po półsferze $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z \geq 0$.

21. Korzystając ze wzoru Stokesa oblicz pracę W wykonaną przez siłę

$$\vec{F} = (x+z, x-y+2z, y-x)$$

po drodze zamkniętej biegnącej wokół trójkąta $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ (pamiętamy, że $dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$). Czy siła jest potencjalna?