Wykład XVIII Mechanika kwantowa

Rozpraszania twardych kul

Rozważamy oddziaływanie „twardych kul” opisywane potencjałem

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a, \\ 0, & r \geq a. \end{cases}$$

Ponieważ potencjał jest sferycznie symetryczny, funkcję falową można zapisać w postaci

$$\varphi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

gdzie $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ to harmoniki sferyczne. Rozpraszanie nie zależy od kąta azymutalnego φ, więc jedyną dopuszczalna wartością *m* jest $m = 0$, co daje

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l R_l(r) P_l(\cos\theta),$$

ponieważ $Y_{l0}(\theta,\varphi) \sim P_l(\cos\theta)$, gdzie $P_l(\cos\theta)$ jest wielomianem Legendre'a.

Dla $r \geq a$ mamy do czynienia ze swobodnym równaniem, więc radialna część funkcji falowej równa jest

$$R_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr),$$

gdzie $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ jest wektorem falowym, $j_l(x)$ i $n_l(x)$ to sferyczne funkcje Bessela, A_l i B_l stałe normalizacyjne. Ponieważ dla $r < a$ potencjał jest nieskończony, więc $R_l(r) = 0$. Nakładając warunek ciągłości na funkcję falową w $r = a$, dostajemy równanie na stałe A_l i B_l

$$A_l j_l(ka) + B_l n_l(ka) = 0.$$

Rozważamy teraz rozwiązanie granicę dużych odległości $kr >> l(l+1)$, kiedy funkcje Bessela można przybliżyć jako

$$j_l(kr) \approx \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right), \quad n_l(kr) \approx -\frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right).$$

Radialna funkcja falowa przyjmuje postać

$$R_l(r) = \frac{A_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) - \frac{B_l}{kr}\cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right). \qquad (*)$$

Radialna funkcja falowa wyrażona przez przesunięcie fazowe δ_l równa jest

$$R_l(r) = \frac{C_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right).$$

Korzystając z tożsamości $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, dostajemy

$$R_l(r) = \frac{C_l}{kr}\cos\delta_l \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) + \frac{C_l}{kr}\sin\delta_l \cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right). \qquad (**)$$

Żądając równości funkcji falowej w postaci (*) i postaci (**) dostajemy równania

$$\begin{cases} A_l = C_l \cos\delta_l \\ B_l = -C_l \sin\delta_l \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\delta_l = -\frac{B_l}{A_l}.$$

Uwzględniając warunek ciągłości w $r = a$ mówiący, że $B_l = -A_l \dfrac{j_l(ka)}{n_l(ka)}$, ostatecznie dostajemy

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}}$$

Granica niskoenergetyczna

Rozkład na fale parcjalne jest szczególnie użyteczny, gdy energia niesiona przez rozpraszaną cząstkę jest na tyle mała, że $ka \ll 1$. Wówczas możemy zastosować przybliżenie

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \qquad n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \qquad x \ll 1,$$

gdzie $(2l+1)!! \equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2l+1)$. Tak zatem

$$\mathrm{tg}\,\delta_l = -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!}.$$

Widzimy, że $\mathrm{tg}\,\delta_l$ jest małą liczbą, więc $\mathrm{tg}\,\delta_l \approx \delta_l$, co daje

$$\delta_l = -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!}.$$

Ponieważ $ka \ll 1$, kolejne przesunięcia fazowe szybko ubywają. Pierwsze trzy znajdujemy jako

$$\delta_0 = -ka, \qquad \delta_1 = -\frac{(ka)^3}{3}, \qquad \delta_2 = -\frac{(ka)^5}{45}.$$

Skoro kolejne przesunięcia fazowe szybko ubywają, uzyskujemy dobre przybliżenie przekroju czynnego, uwzględniając zaledwie pierwsze fale parcjalne.

Pierwsza fala parcjalna (*l* = 0)

Najgrubsze przybliżenie polega na wzięciu pod uwagę tylko pierwszego wyrazu rozwinięcia. Wówczas amplituda rozpraszania równa jest

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\left(\exp\left(i2\delta_0\right) - 1\right)P_0(\cos\theta) = \frac{\delta_0}{k} = -a \,.$$

Skorzystano tutaj z przybliżenia $\exp\left(i2\delta_0\right) \approx 1 + 2i\delta_0$ i uwzględniono, że $P_0(\cos\theta) = 1$. A więc różniczkowy przekrój czynny wynosi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta) \right|^2 = a^2 \,,$$

zaś całkowity przekrój czynny to

$$\sigma = 4\pi a^2 \,.$$

Otrzymane wyniki maja dwie ciekawe cechy: różniczkowy przekrój czynny nie zależy od kąta rozpraszania, czyli jest izotropowy; całkowity zaś przekrój czynny jest cztery razy większy od przekroju czynnego na zderzenie klasycznych kul o średnicy a, który wynosi $\sigma_{\text{klas}} = \pi a^2$. Widzimy też, ze nie jest spełniona teza twierdzenia optycznego (amplituda jest czysto rzeczywista), co jest spowodowane przybliżonym charakterem uzyskanych wyników.

Pierwsza i druga fala parcjalna (*l* = 0, *l* = 1)

Amplituda rozpraszania równa jest

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\left(\exp\left(i2\delta_0\right) - 1\right)P_0(\cos\theta) + \frac{3}{2ik}\left(\exp\left(i2\delta_1\right) - 1\right)P_1(\cos\theta) \,.$$

Uproszczenie tego wyrażenia jest nieco skomplikowane. Ponieważ δ_1 jest rzędu $(\delta_0)^3$, więc uwzględniając δ_1 należy uwzględnić wkłady od δ_0 aż do trzeciej potęgi δ_0. A zatem przybliżamy

$$\exp\left(i2\delta_0\right) - 1 \approx 2i\delta_0 - 2\delta_0^2 - \frac{4}{3}i\delta_0^3 \,, \qquad \exp\left(i2\delta_1\right) - 1 \approx 2i\delta_1 \,.$$

Pamiętając, że $P_0(\cos\theta) = 1$ i $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ oraz podstawiając $\delta_0 = -ka$ i $\delta_1 = -(ka)^3/3$, amplituda równa jest

$$f(\theta) = -a + ika^2 + \frac{2}{3}k^2a^3 - k^2a^3\cos\theta .$$

Różniczkowy przekrój czynny wynosi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \left(-a + \frac{2}{3}k^2a^3 - k^2a^3\cos\theta\right)^2 + k^2a^4 .$$

Ponieważ wyprowadzając wzór na amplitudę pominęliśmy wyrazy o potędze wyższej niż a^3, a wiodący wkład do amplitudy jest liniowy w a, więc tylko wkłady do przekroju czynnego o potędze a nie większej niż 4 są wiarygodne. Tak zatem dostajemy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = a^2 - \frac{1}{3}k^2a^4 + 2k^2a^4\cos\theta .$$

Widzimy, że po uwzględnieniu fali z $l=1$ różniczkowy przekrój czynny ma zgodnie z oczekiwaniami maksimum dla zerowego kąta rozpraszania $\theta = 0$ i minimum dla $\theta = \pi$.

Rozważmy teraz całkowity przekrój czynny. Ponieważ wkład do różniczkowego przekroju czynnego zależny od kąta (ostatni wyraz) znika, gdy wykonamy całkowanie po pełnym kącie bryłowym, znajdujemy

$$\sigma = 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{3}k^2a^2\right).$$

Całkowity przekrój czynny możemy też wyznaczyć ze wzoru

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \ ,$$

uwzględniając pierwsze dwie fale parcjalne, co daje

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 + \frac{12\pi}{k^2}\sin^2\delta_1 .$$

Przybliżając $\sin\delta_1 \approx \delta_1$, zauważamy, że wkład do całkowitego przekroju czynnego od δ_1 jest rzędu $(ka)^6$. Jeśli tak jak poprzednio ograniczymy się wkładami rzędu $(ka)^4$, możemy więc wkład od δ_1 pominąć. Przybliżywszy

$$\sin\delta_0 \approx \delta_0 - \frac{1}{6}\delta_0^3 \ ,$$

znajdujemy

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\left(\delta_0 - \frac{1}{6}\delta_0^3\right)^2 \approx \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 - \frac{4\pi}{3k^2}\delta_0^4 = 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{3}k^2a^2\right).$$

Całkowity przekrój czynny możemy też znaleźć korzystając z twierdzenia optycznego, które mówi, że $\sigma = \frac{4\pi}{k}\Im f(\theta = 0)$. Ponieważ $\Im f(\theta) = ka^2$, mamy $\sigma = 4\pi a^2$, czyli całkowity przekrój czynny w przybliżeniu pierwszej fali parcjalnej. Chcąc znaleźć dokładniejsze wyrażenie na σ, policzmy amplitudę rozpraszania, uwzględniając tylko pierwszą falę parcjalną, lecz aż do rzędu $(\delta_0)^4$. Przybliżamy więc

$$\exp(i2\delta_0) - 1 \approx 2i\delta_0 - 2\delta_0^2 - \frac{4}{3}i\delta_0^3 + \frac{2}{3}\delta_0^4,$$

co daje amplitudę

$$f(\theta) = \frac{\delta_0}{k} + i\frac{\delta_0^2}{k} - \frac{2}{3}\frac{\delta_0^3}{k} - \frac{1}{3}i\frac{\delta_0^4}{k} = -a + ika^2 + \frac{2}{3}k^2a^3 - \frac{1}{3}ik^3a^4.$$

Ponieważ

$$\Im f(\theta) = ka^2 - \frac{1}{3}k^3a^4,$$

twierdzenie optyczne dostarcza

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\Im f(\theta = 0) = 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{3}k^2a^2\right),$$

czyli ten sam wynik, który znaleźliśmy poprzednio.