Fale elektromagnetyczne

Synteza praw elektromagnetyzmu dokonana przez Jamesa Clerka Maxwella ok. roku 1860 nie była prostą sumą dotychczasowej wiedzy. Jak pamiętamy, Maxwell zmodyfikował prawo Ampère'a, a w konsekwencji stwierdził, że pole elektryczne i magnetyczne może rozchodzić się w pustej przestrzeni jako fala. Tym samym przewidział istnienie fal elektromagnetycznych, których szczególnym przypadkiem są fale świetlne. Teoretyczne wnioski Maxwella zostały potwierdzone doświadczalnie pod koniec XIX wieku głównie za sprawą Heinricha Hertza. Dzięki odkryciu fal elektromagnetycznych, elektrodynamika objęła swoim władaniem nie tylko elektryczność i magnetyzm, lecz również optykę.

Równanie falowe

Punktem wyjścia naszych rozważań są równania Maxwella, w których nieobecne są zewnętrzne ładunki i prądy. Dla ogólności naszej analizy wyjdziemy od równań Maxwella zachodzących nie w próżni, lecz w ośrodku materialnym:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}(t,\vec{r})}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

Jak pamiętamy, pary pól $\vec{D}$ i $\vec{E}$ oraz $\vec{H}$ i $\vec{B}$ spełniają związki materiałowe, które przyjmiemy w prostej, znanej już postaci

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon\, \vec{E}(t,\vec{r}), \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mu\, \vec{H}(t,\vec{r}), \tag{2}$$

gdzie ε i μ są przenikliwościami, odpowiednio, elektryczną i magnetyczną ośrodka.

Uwzględniwszy związki materiałowe, równania Maxwella (1) wyglądają następująco

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}. \end{cases} \tag{3}$$

Biorąc pochodną czasową trzeciego równania i rotację czwartego, możemy wyeliminować pole elektryczne i znajdujemy równanie

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B}(t,\vec{r}) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Lewą stronę powyższego równania przekształcamy z pomocą tożsamości

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B}, \tag{5}$$

a uwzględniając drugie równanie Maxwella, znajdujemy związek

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\Delta \vec{B}, \tag{6}$$

który podstawiony do równania (4) daje

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(t,\vec{r}) = 0, \tag{7}$$

gdzie $v \equiv c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Takie samo równanie znajdujemy dla pola $\vec{E}$, czyli

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(t,\vec{r}) = 0, \tag{8}$$

z tym, że na początek bierzemy pochodną czasową czwartego równania Maxwella i korzystamy z trzeciego. Następnie wykorzystujemy tożsamość (5) i pierwsze równanie Maxwella.

Równania (7) i (8) mają postać równania falowego, opisującego rozchodzenie się fal z prędkością fazową v. Fakt, że pola elektryczne i magnetyczne spełniające równania Maxwella spełniają automatycznie równanie falowe, wskazuje na istnienie fal elektromagnetycznych.

Zwróćmy uwagę, że w próżni, gdzie $\varepsilon = \mu = 1$, prędkość fazowa $v = c$. W ośrodku natomiast prędkość fazowa fali elektromagnetycznej może być zarówno mniejsza jaki i większa od c. Nie występuje tu jednak konflikt z teorią względności, głoszącą, że prędkość światła jest maksymalną prędkością przesyłania informacji. W przypadku bowiem ruchu falowego, transport energii, a więc i informacji, odbywa się z tzw. prędkością grupową, która różni się od fazowej.

Fale płaskie

Rozwiązań równań falowych (7) i (8) będziemy szukać w postaci fal płaskich, czyli

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \tag{9}$$

gdzie ω jest częstością fali, $\vec{k}$ wektorem falowym, zaś $\vec{B}_0$ i $\vec{E}_0$ są amplitudami. Pola elektryczne i magnetyczne są wielkościami rzeczywistymi zaś wyrażenia (9) są zespolone. Za fizyczne pola będziemy więc uważać części rzeczywiste wyrażeń (9). Jak pamiętamy,

$$\Re e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{10}$$

Jeśli przyjąć, że $\vec{k} = (k, 0, 0)$ zaś $\vec{r} = (x, y, z)$, fala plaska ma postać

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - kx)}. \tag{11}$$

Funkcja (11) jest okresowa, a okres to $T = 2\pi/\omega$. Długość fali wynosi $\lambda = 2\pi/k$. Śledząc przesuwanie się garbu fali, zadanego, dla przykładu, równaniem $\omega t - kx = 0$, którego rozwiązaniem jest

$$x = \frac{\omega}{k}\, t \tag{12}$$

widzimy, że fala porusza się z prędkością fazową $v = \omega/k$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że $\lambda = vT$.

Podstawiając fale płaskie (9) do równań falowych (7) i (8), znajdujemy równanie

$$\vec{k}^2 - \frac{1}{v^2}\,\omega^2 = 0. \tag{13}$$

A zatem częstość ω i wektor falowy $\vec{k}$ muszą spełniać relację

$$\omega = v|\vec{k}|, \tag{14}$$

aby fale płaskie (9) były rozwiązaniami równań (7) i (8).

Pola $\vec{B}$ i $\vec{E}$ powinny spełniać nie tylko równania falowe, lecz również cztery równania Maxwella. Zobaczmy, co z tego wymogu wynika. Podstawiając fale płaskie (9) do, odpowiednio, drugiego i pierwszego równania Maxwella, otrzymujemy warunki

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \qquad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \tag{15}$$

oznaczające, że wektor falowy $\vec{k}$ jest prostopadły do amplitud $\vec{B}_0$ i $\vec{E}_0$, a zatem jest prostopadły do pól $\vec{B}$ i $\vec{E}$.

Jeśli podstawić fale płaskie (9) do trzeciego i czwartego równania Maxwella, znajdujemy relacje

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c}\,\omega\,\vec{B}_0, \qquad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\,\omega\,\vec{E}_0. \tag{16}$$

Jeśli uwzględnić związek (14), to amplitudę pola elektrycznego można wyrazić przez amplitudę pola magnetycznego lub odwrotnie tzn.

$$\vec{B}_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{n} \times \vec{E}_0, \qquad \vec{E}_0 = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\vec{n} \times \vec{B}_0, \tag{17}$$

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem jednostkowym równoległym do wektora falowego $\vec{k}$, czyli $\vec{n} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$. Łatwo sprawdzić, że podstawiając $\vec{B}_0$ dane lewym związkiem do prawego związku otrzymamy tożsamość $\vec{E}_0 = \vec{E}_0$. Zauważmy jeszcze, że

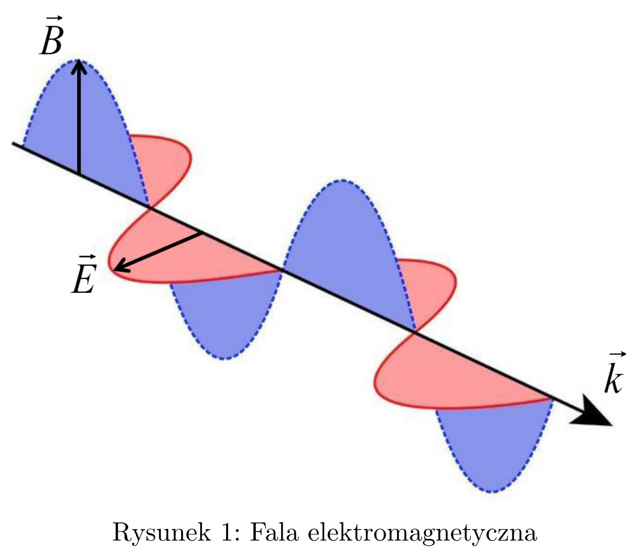
$$\vec{B}_0^2 = \varepsilon\mu\,\vec{E}_0^2. \tag{18}$$

Doszliśmy do wniosku, że wektory $\vec{n}$, $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ tworzą trójkę wektorów wzajemnie prostopadłych. Ponieważ wektor $\vec{n}$ określa kierunek rozchodzenia się fali, więc stwierdzamy, że fala elektromagnetyczna, którą ilustruje Rys. 1, jest fala poprzeczną – oscylujące pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są prostopadłe do tego kierunku.

Energia fali elektromagnetycznej

Gęstość energii pola elektromagnetycznego w ośrodku dana jest wzorem

$$u(t,\vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi}\Big(\vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \vec{D}(t,\vec{r}) + \vec{B}(t,\vec{r}) \cdot \vec{H}(t,\vec{r})\Big). \tag{19}$$



Rysunek 1: Fala elektromagnetyczna

Podstawiwszy cześć rzeczywistą fal płaskich (9) do wyrażenia (19), znajdujemy

$$u(t,\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\Big(\varepsilon\vec{E}_0^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}_0^2\Big)\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{20}$$

Jeśli uśrednimy gęstość energii (20) po jednym okresie fali, to otrzymujemy

$$\langle u\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T dt\, u(t,\vec{r}) = \frac{1}{8\pi T}\Big(\varepsilon\vec{E}_0^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}_0^2\Big)\int_0^T dt\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{21}$$

Pamiętając, że $T = 2\pi/\omega$, występującą tutaj całkę obliczamy następująco

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/\omega} dt\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) &= \frac{1}{\omega}\int_{-\vec{k}\cdot\vec{r}}^{2\pi-\vec{k}\cdot\vec{r}} d\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} d\alpha\cos^2\alpha \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\pi} d\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\pi}{\omega}.\end{aligned} \tag{22}$$

A zatem

$$\langle u\rangle = \frac{1}{16\pi}\Big(\varepsilon\vec{E}_0^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}_0^2\Big). \tag{23}$$

Jeśli uwzględnić jeszcze relację (18), uśredniona gęstość energii fali elektromagnetycznej wynosi

$$\langle u\rangle = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\vec{E}_0^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\,\vec{B}_0^2. \tag{24}$$

Gęstość strumienia energii pola elektromagnetycznego określa wektor Poytinga, który w ośrodku wynosi

$$\vec{S}(t,\vec{r}) \equiv \frac{c}{4\pi}\Big(\vec{E}(t,\vec{r})\times\vec{H}(t,\vec{r})\Big). \tag{25}$$

Podstawiwszy do wzoru (25) rzeczywistą część fal płaskich (9), po dokonaniu uśrednienia po jednym okresie fali, otrzymujemy

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\,\vec{E}_0\times\vec{B}_0. \tag{26}$$

Jeśli skorzystamy z relacji (17), to

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{E}_0^2\,\vec{n} = v\,\langle u\rangle\,\vec{n}, \tag{27}$$

gdzie, jak pamiętamy,

$$v \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad\qquad \vec{n} \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \tag{28}$$

Widzimy więc, że fala elektromagnetyczna niesie energię w kierunku wektora falowego.

Polaryzacja fali elektromagnetycznej

Polaryzacja fali elektromagnetycznej to własność tej fali związana z orientacją wektora pola elektrycznego tworzącego falę. Fakt, że polaryzację wiążemy z polem elektrycznym nie zaś magnetycznym jest kwestią umowy. Równie dobrze można było wybrać pole magnetyczne.

Mówimy, że fala jest spolaryzowana liniowo, jeśli z upływem czasu nie zmienia się kierunek, wzdłuż którego oscyluje pole elektryczne. Tak zatem fala płaska

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\,\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{29}$$

jest właśnie spolaryzowana liniowo.

Jeśli złożymy dwie fale o tych samych częstościach i wektorach falowych, lecz różnych amplitudach, wtedy

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + \vec{E}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{30}$$

i sumaryczna fala jest nadal spolaryzowana liniowo.

Sytuacja staje się ciekawsza, jeśli złożymy dwie fale przesunięte w fazie

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + \vec{E}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi), \tag{31}$$

gdzie ϕ jest różnicą faz. Stosując wzór $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$, wyrażenie (31) możemy zapisać w postaci

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\cos\phi\right)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) - (\vec{E}_2\sin\phi)\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{32}$$

Jeśli amplitudy $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ nie są równoległe do siebie, wówczas względne wkłady pierwszego i drugiego członu do pola elektrycznego (32) zmieniają się z upływem czasu. Kierunek więc, wzdłuż którego oscyluje pole elektryczne, również zmienia się.

Aby uprościć dalszą analizę, przyjmiemy, że wektor $\vec{k}$ jest skierowany wzdłuż osi z, więc pole $\vec{E}$ leży w płaszczyźnie $x-y$. Przyjmiemy również, że amplituda $\vec{E}_1 = (E_1, 0, 0)$ jest skierowana wzdłuż osi x, a amplituda $\vec{E}_2 = (0, E_2, 0)$ wzdłuż osi y. Składowe pola elektrycznego wtedy wynoszą

$$E_x(t,\vec{r}) = E_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}), \tag{33}$$

$$E_y(t,\vec{r}) = (E_2\cos\phi)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) - (E_2\sin\phi)\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{34}$$

Jeśli przyjąć, że różnica faz $\phi = \pm\pi/2$, wówczas mamy

$$E_x(t,\vec{r}) = E_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}), \tag{35}$$

$$E_y(t,\vec{r}) = \mp E_2\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{36}$$

Podnosząc składowe pola do kwadratu, otrzymujemy równania

$$\frac{E_x^2(t,\vec{r})}{E_1^2} = \cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}), \tag{37}$$

$$\frac{E_y^2(t,\vec{r})}{E_2^2} = \sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \tag{38}$$

Po dodaniu równań stronami znajdujemy relację

$$\frac{E_x^2(t,\vec{r})}{E_1^2} + \frac{E_y^2(t,\vec{r})}{E_2^2} = 1, \tag{39}$$

w której rozpoznajemy równanie elipsy zapisywane zwykle w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{40}$$

gdzie a i b są półosiami elipsy. A zatem, gdy różnica faz dwóch fal składowych wynosi $\phi = \pm\pi/2$, <u>składowe pola elektrycznego spełniają równanie elipsy</u>, więc mówimy o <u>polaryzacji eliptycznej</u>. Wybierając dla prostoty $\vec{r} = 0$, nietrudno stwierdzić, że równania (35) i (36) opisują ruch wektora pola elektrycznego po elipsie, przy czym krążenie wektora odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara – lewoskrętnie, gdy $\phi = -\pi/2$, zaś przeciwnie do wskazówek zegara – prawoskrętnie, jeśli $\phi = \pi/2$. Fala spolaryzowana eliptycznie może więc być <u>prawoskrętna</u> lub <u>lewoskrętna</u>.