

Magnetostatyka I

Magnetostatyka opisuje układy prądów i pól magnetycznych, które nie ulegają zmianom w czasie. Na początek będziemy zajmować się magnetostatyką w próżni tzn. przyjmujemy, że prądy występują w próżni lub, co równoważne, pomijamy wpływ materialnego ośrodka, w którym prądy są obecne, na rozważane zjawiska.

Zainteresowanie magnesami sięga wielu wieków, lecz za początek magnetostatyki we współczesnej postaci uznać należy odkrycie Duńczyka Hansa Christiana Oersteda dokonane w roku 1820. Oersted zauważył, że igła magnetyczna, znajdująca się w pobliżu przewodu, w którym płynie prąd, odchyła się, przestając wskazywać północ. Wkrótce potem Francuzi Jean-Baptiste Biot, Félix Savart oraz André-Marie Ampère sformułowali ilościowe prawa, dotyczące pola magnetycznego wytwarzanego przez prądy.

W elektrostatyce, jak już wiemy, kluczową rolę odgrywają ładunki, szczególnie ładunki punktowe. Magnetycznym odpowiednikiem ładunku elektrycznego byłby monopol magnetyczny. Jednak takie obiekty w przyrodzie nie występują. Sprawia to, że magnetostatyka istotnie różni się od elektrostatyki, choć jest wiele analogii.

Gęstość prądu elektrycznego i jego natężenie

Zacznijmy od przypomnienia, że gęstość prądu, którą oznaczamy będziemy jako \vec{j} , jest z definicji *liczbą ładunków dodatnich przepływającą w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku przepływu ładunków*, czyli do wektora \vec{j} . Jeśli ładunki o gęstości ρ poruszają się z prędkością \vec{v} , to wytwarzają gęstość prądu $\vec{j} = \rho \vec{v}$. Gdy prąd jest skutkiem przepływu ładunków ujemnych, a najczęściej tak jest, bo elektrony są zwykle nośnikami prądu, choćby w metalach, kierunek prądu jest przeciwny do ich prędkości. Występowanie prądu jest nieraz efektem jednoczesnego przepływu w przeciwnych kierunkach ładunków ujemnych i dodatnich.

Jeśli prąd płynie w przewodzie, wówczas często posługujemy się pojęciem natężenia prądu, oznaczanego I , zdefiniowanego jako

$$I \equiv \int_A d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{j}, \quad (1)$$

gdzie całkowanie wykonujemy po przekroju poprzecznym przewodu o powierzchni A , $d^2\vec{\sigma}$ jest znanym już zorientowanym elementem powierzchni przekroju poprzecznego. Jeśli przyjąć, że gęstość prądu \vec{j} jest taka sama na całej powierzchni przekroju poprzecznego to $I = A j$. Natężenie prądu mówi o ilości ładunku przepływającego przewodem w jednostce czasu.

Zachowanie ładunku

Ładunek elektryczny jest wielkością zachowywaną, co wyraża tzw. równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho(t, \vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r}) = 0, \quad (2)$$

gdzie dopuszczona została zależność od czasu $\rho(t, \vec{r})$ oraz $\vec{j}(t, \vec{r})$. Równanie (2) orzeka, że zmiana gęstości ładunku jest wynikiem przepływu prądu.

Zachowanie ładunku, jako niezmiennosc w czasie jego wielkości, uzyskujemy z równania (2), wykonawszy całkowanie po objętości V , co daje

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(t, \vec{r}) = - \int_V d^3r \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r}). \quad (3)$$

Wprowadzając ładunek $Q_V(t)$ znajdujący się w objętości V , który wynosi

$$Q_V(t) \equiv \int_V d^3r \rho(t, \vec{r}), \quad (4)$$

i stosując twierdzenie Gaussa do prawej strony równania (3), dostajemy

$$\frac{d}{dt}Q_V(t) = - \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}). \quad (5)$$

A więc zmiana w czasie ładunku w objętości V jest spowodowana przepływem ładunku przez powierzchnię S ograniczającą V . Jeśli zaś ładunek nie przepływa, to Q_V jest wielkością stałą.

Beźródłowość prądu w magnetostatyce

Magnetostatyka zajmuje się prądami, które nie ulegają zmianom w czasie, czyli są niezależne od czasu. Jeśli więc w równaniu (2) przyjmujemy, że gęstości ładunku i prądu nie zależą od czasu, to pochodna czasowa $\rho(\vec{r})$ znika i otrzymujemy

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (6)$$

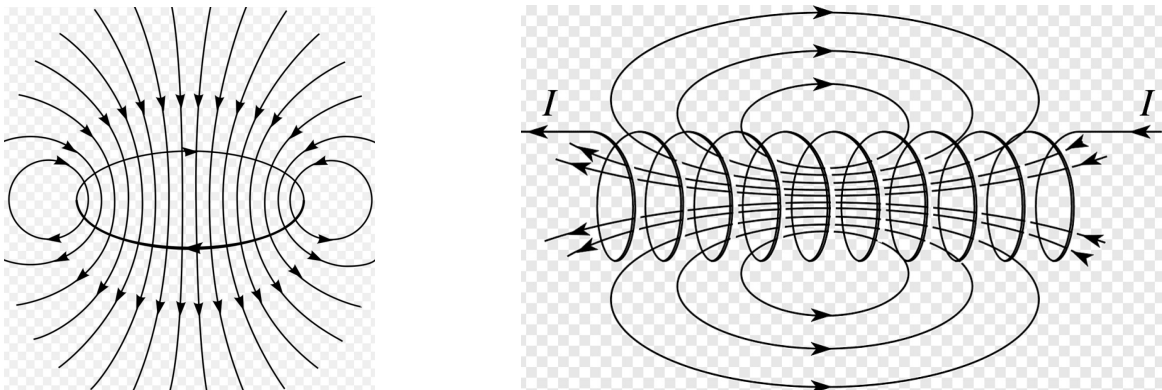
A zatem, prąd w magnetostatyce jest beźródłowy – linie pola \vec{j} nie mają początku, ani końca, lecz tworzą zamknięte pętle.

Prawo Biota-Savarta

Podobną rolę do ładunku punktowego q w elektrostatyce pełni w magnetostatyce nieskończenie cienki przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I . Tak jak prawo Coulomba określa pole elektryczne wytwarzane przez ładunek punktowy, tak prawo Biota-Savarta mówi, jakie jest pole magnetyczne, a dokładniej wektor indukcji magnetycznej \vec{B} , pochodzący od nieskończenie cienkiego przewodu. Dokładniej prawo orzeka, jaki jest wkład infitezymalnie małego odcinka przewodu $d\vec{l}$ (kierunek wektora $d\vec{l}$ jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu) do $\vec{B}(\vec{r})$, czyli

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (7)$$

gdzie przyjęto, że początek układu współrzędnych, a więc i początek wektora położenia \vec{r} , pokrywa się z położeniem odcinka przewodu $d\vec{l}$. Współczynnik $1/c$, w którym c jest prędkością



Rysunek 1: Linie pola magnetycznego pojedynczego zwoju (lewy rysunek) i solenoidu (prawy rysunek)

światła, wiąże się z systemem jednostek CGS, który stosujemy. W układzie SI współczynnik wynosi $\mu_0/4\pi$, gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

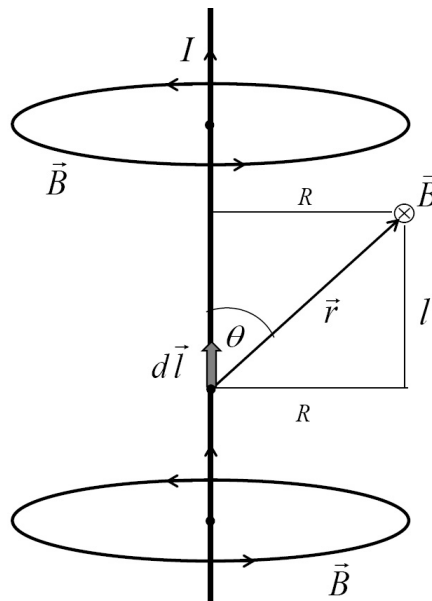
W tym i następnym wykładzie, gdzie omawiamy magnetostatykę w próżni, wektor $\vec{B}(\vec{r})$ będziemy zwykle nazywać polem magnetycznym, choć ściśle rzecz biorąc powinniśmy używać terminu indukcja magnetyczna. Rozróżnienie tych dwóch wielkości staje się istotne, gdy mamy do czynienia z magnetostatyką w ośrodku, którą zajmiemy się w Wykładzie VII.

Linie pola magnetycznego

Jak pamiętamy, linia pola elektrycznego określa kierunek siły, jaka działa na dodatni ładunek próbny znajdujący się w tym polu. Linia pola magnetycznego wskazuje natomiast kierunek siły działającej na północny biegun igły magnetycznej, co sprawia, że igła magnetyczna ustawia się zgodnie z kierunkiem linii pola magnetycznego. Dwa przykłady linii pól magnetycznych pochodzących od pojedynczego zwoju i od solenoidu ukazują Rys. 1.

Prostoliniowy przewodnik

Prawa Biota-Savarta jest niezbyt wygodne, gdy chcemy wyliczyć pole magnetyczne wytwarzane przez jakiś konkretny układ przewodników. Jednym z nielicznych przypadków, gdy rachunek jest stosunkowo prosty, jest nieskończony prostoliniowy, przy tym nieskończenie cienki przewodnik pokazany na Rys. 2. Problem ma symetrię cylindryczną tzn. wielkość pola może zależeć jedynie od odległości od przewodu. Rozważając fragment przewodu nie trudno ustalić, że linie pola \vec{B} tworzą okręgi leżące w płaszczyźnie prostopadłej do przewodu o środkach pokrywających się z położeniem przewodu.



Rysunek 2: Pole magnetyczne wytwarzane przez nieskończenie cienki prostoliniowy nieskończony przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu I . Linie pola \vec{B} tworzą okręgi leżące w płaszczyźnie prostopadłej do przewodu o środkach pokrywających się z położeniem przewodu.

Wkład do pola magnetycznego w odległości R od przewodu, pochodzący od małego fragmentu przewodu $d\vec{l}$, patrz Rys. 2, zgodnie ze wzorem (7) wynosi

$$dB(R) = \frac{1}{c} I \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{1}{c} I \frac{dl r \sin \theta}{r^3} = \frac{1}{c} I \frac{dl R}{(l^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

gdzie ostatnia równość zachodzi, gdyż $R = r \sin \theta$ oraz $r = \sqrt{l^2 + R^2}$. Aby znaleźć wielkość pola $B(R)$ musimy zsumować wkłady od wszystkich fragmentów przewodnika, czyli wykonać całkowanie

$$B(R) = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(l^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{I}{cR} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

gdzie zmienna $x = l/R$. Ostatnią całkę obliczamy, dokonując zamiany zmiennych $x = \sinh t$ i postępując następująco

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt \cosh t}{(1 + \sinh^2 t)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2. \quad (10)$$

Tak zatem ostatecznie znajdujemy

$$B(R) = \frac{2I}{cR}. \quad (11)$$

Siła Lorentza

Aby pole magnetyczne można było traktować jako byt fizyczny, należy wskazać metodę zmierzenia wartości i kierunku pola. Jak pamiętamy, pole elektryczne $\vec{E}(\vec{r})$ określiliśmy poprzez siłę $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$ działającą na ładunek próbny umieszczony w punkcie zadanym przez wektor położenia \vec{r} . W przypadku pola magnetycznego postąpimy podobnie, wykorzystując pojęcie siły Lorentza

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (12)$$

która działa na ładunek q poruszający się z prędkością \vec{v} w polu magnetycznym. Aby określić pole $\vec{B}(\vec{r})$, musimy zatem zmierzyć siłę \vec{F} , gdy ładunek znajduje się w punkcie \vec{r} .

Ze wzoru na siłę Lorentza (12) można łatwo wyprowadzić wyrażenie na siłę działającą na przewodnik z prądem. Zastępując ładunek q przez $\rho(\vec{r}) d^3r$, znajdujemy przyczynę do siły

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} d^3r \rho(\vec{r}) \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (13)$$

a zatem

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (14)$$

Przyjmując, że prąd płynie cienkim przewodem i korzystając ze wzoru na natężenia prądu (1), wyrażenie (14) przekształcamy do postaci

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \int d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (15)$$

gdzie całkowanie wykonujemy wzdłuż przewodu. Do kwestii sił działających na ładunki i prądy, a wywołanych przez pole magnetyczne wrócimy w następnym wykładzie.

Pole magnetyczne generowane przez dowolną gęstość prądu

Prawo Biota-Savarta odnoszące się do ogólnej sytuacji, kiedy mamy do czynienia z polem magnetycznym wytwarzanym nie przez cienki przewód, lecz przez dowolną gęstością prądu $\vec{j}(\vec{r})$, ma postać

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (16)$$

Znany już wzór (7) otrzymamy z formuły (16), zakładając, że prąd płynie w cienkim przewodzie i wykorzystując definicje natężenia prądu (1). Ponadto nie wykonujemy całkowania wzdłuż przewodu i rozważamy jedynie jego fragment znajdujący się w $\vec{r}' = 0$.

Zwróćmy uwagę, że prawo Biota-Savarta w postaci (7) jest magnetycznym odpowiednikiem omówionego w Wykładzie I prawa Coulomba danego wzorem

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (17)$$

Potencjał wektorowy

Jak pamiętamy z Wykładu II, wzór

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (18)$$

podstawiony do równania (17) doprowadził nas do wniosku, że pole elektryczne $\vec{E}(\vec{r})$ jest gradientem potencjału $\Phi(\vec{r})$, czyli

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}), \quad (19)$$

przy czym

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (20)$$

Teraz wzór (18) podstawimy do równania (16), otrzymując

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (21)$$

Ponieważ znak iloczynu wektorowego ulega zmianie, jeśli odwrócimy kolejność mnożonych wektorów ($\vec{G} \times \vec{H} = -\vec{H} \times \vec{G}$), więc znajdujemy

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (22)$$

gdzie wielkość $\vec{A}(\vec{r})$ nazywa się potencjałem wektorowym i wynosi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (23)$$

Beźródłowość pola magnetycznego

Ponieważ pole magnetyczne jest rotacją potencjału wektorowego, dywergencja indukcji magnetycznej znika tj.

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (24)$$

czyli pole magnetyczne jest beźródłowe – linie pola nie mają początku ani końca, lecz tworzą zamknięte pętle. Wynika to ze wspomnianego już faktu nieistnienia monopola magnetycznego.

Prawdziwość równości (24) dowodzimy bezpośrednim rachunkiem:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \epsilon^{ijk} \partial^i \partial^j A^k(\vec{r}) = 0. \quad (25)$$

Zerowanie się powyższego wyrażenia jest skutkiem zwiężenia tensora symetrycznego $\partial^i \partial^j$ z antysymetrycznym ϵ^{ijk} , jak było wyjaśnione w Wykładzie II.

Prawo Ampère'a

Odpowiednikiem prawa Coulomba w magnetostatyce jest prawo Biot-Savarta, odpowiednikiem zaś prawa Gaussa prawo Ampère'a, które w różniczkowej formie wyraża się następująco

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (26)$$

Jak wiemy, dywergencja rotacji znika, zauważmy więc, że biorąc dywergencję obu stron równania (26) znajdujemy $\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$, co pokrywa się równaniem (6).

Postać całkową uzyskujemy, wykonując na początek całkę po powierzchni S obu stron równości (26)

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(\vec{r}). \quad (27)$$

Strumień gęstości prądu przez powierzchnię równy jest natężeniu prądu, więc

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = I_S. \quad (28)$$

Do lewej strony równania (27) stosujemy twierdzenia Stokesa omówione w Wykładzie IV i znajdujemy

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}(\vec{r}), \quad (29)$$

gdzie C jest zorientowaną krzywą zamkniętą otaczającą powierzchnię S , a wielkość po prawej stronie nosi nazwę, jak pamiętamy, krążenia pola \vec{B} wzdłuż krzywej C . Podstawiając wyrażenia (28) i (29) do równania (27), otrzymujemy całkowite prawo Ampère'a

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I_S, \quad (30)$$

które orzeka, że *krążenie indukcji magnetycznej wzdłuż pętli C jest równe natężeniu prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną przez C pomnożonemu przez $4\pi/c$.*

Prostoliniowy przewodnik

Powróćmy do pola magnetycznego wytworzonego przez nieskończenie cienki, nieskończony, prostoliniowy przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu I . Korzystając z prawa Biot-Savarta wyprowadziliśmy wzór (15). Teraz to samo wyrażenie uzyskamy z pomocą prawa Ampère'a (30).

Otoczamy przewód okręgiem o promieniu R , leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do przewodu ze środkiem pokrywającym z położeniem przewodu. Obliczamy krążenie pola \vec{B} wzdłuż okręgu

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_C dl B(R) = 2\pi R B(R), \quad (31)$$

gdzie zauważyliśmy, że w każdym punkcie okręgu, wektor styczny do okręgu $d\vec{l}$ jest równoległy do pola \vec{B} . Ponieważ natężenie prądu płynące przez powierzchnię ograniczoną okręgiem, czyli koło o promieniu R , jest równe natężeniu prądu płynącemu przez przewód, więc prawo Ampère'a (30) prowadzi, oczywiście, do wzoru (15), tyle, że bez wykonywania jakichkolwiek trudniejszych obliczeń.

Równania magnetostatyki

Podsumujmy wykład stwierdzeniem, że równanie (24) oraz prawo Ampère'a (26), czyli

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}), \end{cases} \quad (32)$$

tworzą zupełny układ równań magnetostatyki w próżni.