

# Elektrostatyka w ośrodku dielektrycznym

Poprzednie trzy wykłady poświęcone były elektrostatyce w próżni, czyli opisowi statycznych ładunków i pól elektrycznych w nieobecności jakiegokolwiek ośrodka materialnego. Teraz zobaczymy jak ośrodek modyfikuje sformułowany dotychczas opis. Ograniczymy się jednak tylko do dielektryka, a więc materiału – może to być gaz, ciecz lub ciało stałe, który jest izolatorem. Nie występują więc w nim swobodne ładunki, lecz jedynie elektrycznie neutralne atomy lub cząsteczki. Powietrze jest przykładem takiego ośrodka.

## Polaryzacja ośrodka

Gdy atomy lub cząsteczki znajdują się w polu elektrycznym, ładunki dodatnie, właściwie jony dodatnie, przesuwiają się zgodnie z kierunkiem pola elektrycznego, zaś ładunki ujemne, głównie elektrony, przesuwiają się w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego. Powoduje to, że molekula, która w nieobecności pola elektrycznego nie wykazuje momentu dipolowego, staje się dipolem. Mówimy, że zewnątrzne pole indukuje moment dipolowy.

Opisaną sytuację, określaną jako polaryzację molekuly, ilustruje Rys. 1. Jeśli zewnętrzne pole elektryczne nie występuje, elektrony równomiernie otaczają ładunek dodatni – środek ciężkości elektronów pokrywa się ze środkiem ciężkości ładunku dodatniego. Włączenie pola elektrycznego powoduje rozsuniecie środków ciężkości – pojawia się moment dipolowy.

## Potencjał wytwarzany przez układ dipoli

Jak pamiętamy z Wykładu III, potencjał pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol o momencie dipolowym  $\vec{p}$ , którego środek znajduje się w początku układu współrzędnych, wynosi

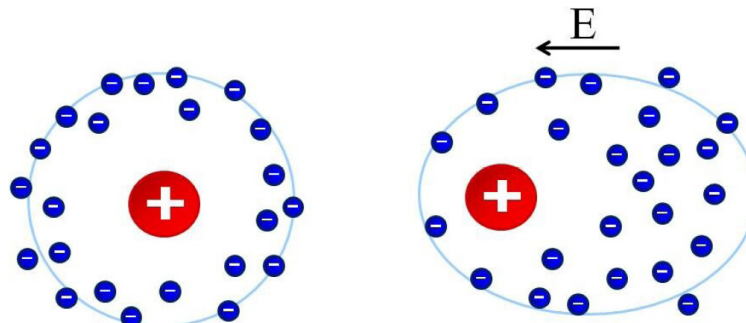
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Jeśli środek dipola jest w punkcie  $\vec{r}'$ , to potencjał (1) przyjmuje postać

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (2)$$

a jeśli mamy  $N$  dipoli, zajmujących położenia  $\vec{r}_1'$ ,  $\vec{r}_2'$ ,  $\dots$ ,  $\vec{r}_N'$ , to

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3}. \quad (3)$$



Rysunek 1: Polaryzacja molekuly na skutek pola elektrycznego

Gdy zaś mamy ciągły rozkład gęstości momentu dipolowego  $\vec{P}(\vec{r})$ , zwany też wektorem polaryzacji, to

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4)$$

Pamiętamy z Wykładu II, że

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5)$$

Jeśli gradient obliczać nie względem współrzędnych wektora  $\vec{r}$ , lecz względem współrzędnych wektora  $\vec{r}'$ , to mamy relację

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6)$$

Skorzystawszy ze wzoru (6), formułę (4) możemy zapisać w postaci

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7)$$

która po wykonaniu całkowania przez części, prowadzi do poszukiwanego wyrażenia

$$\Phi(\vec{r}) = - \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8)$$

Wykonując całkowanie przez części pominieliśmy człon brzegowy, zakładając, że gęstość momentu dipolowego  $\vec{P}(\vec{r})$  znika w nieskończoności.

## Równania elektrostatyki w ośrodku

Wyobraźmy sobie, że mamy pewien rozkład ładunku  $\rho(\vec{r})$  w ośrodku, w którym pole elektryczne wytworzone przez  $\rho(\vec{r})$  indukuje gęstość momentu dipolowego, czyli wektor polaryzacji  $\vec{P}(\vec{r})$ . Jak pamiętamy z Wykładu II, potencjał pola elektrycznego wytwarzanego przez  $\rho(\vec{r})$  wynosi

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9)$$

Jeśli uwzględnić wkład od gęstości indukowanego momentu dipolowego  $\vec{P}(\vec{r})$ , który dany jest wzorem (8), to otrzymujemy

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') - \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10)$$

Tak dochodzimy do bardzo ważnego wniosku: dywergencja gęstości momentu dipolowego  $\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$  daje wkład do gęstości ładunku  $\rho(\vec{r})$ . A zatem, różniczkowe prawo Gaussa w ośrodku wygląda następująco

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi (\rho(\vec{r}) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})). \quad (11)$$

Jeśli człon zawierający  $\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$  przenieść na lewą stronę równania (12), otrzymujemy

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}), \quad (12)$$

gdzie wektor

$$\vec{D}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}) \quad (13)$$

nosi nazwę indukcji elektrycznej lub wektora przesunięcia. Oznaczenie literą ‘D’ odpowiada angielskiej wersji drugiego określenia czyli *displacement*.

Fakt, że w ośrodku pole elektryczne jest sumą pola zewnętrznego i pola wytwarzanego przez indukowany moment dipolowy nie zmienia natury pola elektrycznego, pozostaje ono bezwiarowe. Innymi słowy, pole elektryczne nadal jest gradientem (minus) potencjału, a zatem

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (14)$$

bo, jak pamiętamy z Wykładu II, rotacja gradientu znika.

Równania elektrostatyki w próżni tworzą układ

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}), \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

w ośrodku zaś mamy

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}), \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Do równania określającego indukcję elektryczną  $\vec{D}(\vec{r})$  wchodzi jedynie gęstość ładunków zewnętrznych – zewnętrznych wobec ośrodka. Nie oznacza to jednak, jak wyjaśnimy w dalszej części wykładu, że przy tym samym rozkładzie ładunku  $\rho(\vec{r})$  pole  $\vec{D}(\vec{r})$  w ośrodku będzie zawsze takie samo jako pole  $\vec{E}(\vec{r})$  w próżni.

### Związek materiałowy

Aby rozwiązać równania (16), należy określić relacje pomiędzy polami  $\vec{D}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  lub  $\vec{E}(\vec{r})$  i  $\vec{P}(\vec{r})$ , czyli wprowadzić związek materiałowy. Bogactwo materiałów o bardzo zróżnicowanych własnościach sprawia, że owe związki mogą być bardzo różne. Ograniczymy się tutaj do najprostszej postaci

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}), \quad (17)$$

gdzie wielkość  $\chi_e$  nazywana jest podatnością elektryczną ośrodka. Związek (17) jest po pierwsze izotropowy tzn. kierunek wektora polaryzacji  $\vec{P}(\vec{r})$  jest zgodny z kierunkiem wektora  $\vec{E}(\vec{r})$ . Związek ten jest również liniowy, czyli długość wektora  $\vec{P}(\vec{r})$  jest proporcjonalna do długości wektora  $\vec{E}(\vec{r})$ . Związek (17) jest w końcu niedyspersyjny – nie zależy od zmienności pola  $\vec{E}(\vec{r})$  w przestrzeni. Wszystkie te własności mają zwykle charakter przybliżony. Izotropowość nie zachodzi dla kryształów, w których mamy wyróżnione kierunki. Proporcjonalność  $\vec{P}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  załamuje się zwykle w przypadku dostatecznie silnego pola  $\vec{E}(\vec{r})$ . Jeśli zewnętrzne pole ulega zmianom na małych długościach, relacja dana równaniem (17) również przestaje obowiązywać.

Podstawiające związek (17) do równania (13), otrzymujemy

$$\vec{D}(\vec{r}) = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E}(\vec{r}), \quad (18)$$

czyli

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}), \quad (19)$$

gdzie

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi \chi_e \quad (20)$$

jest przenikalnością elektryczną ośrodka. Stosując układ jednostek SI mówimy wtedy o względnej przenikalności elektrycznej, gdyż przenikalność próżni w tym układzie, w przeciwieństwie do układu CGS, jest różna od jedności.

Jak pokazuje Rys. 1, pole elektryczne wytworzone przez indukowany moment dipolowy jest przeciwnie skierowane wobec pola zewnętrznego. A zatem polaryzacja ośrodka osłabia zewnętrzne pole. Oznacza to, że w materiale dielektrycznym  $\varepsilon > 1$ . Do tego samego wniosku dochodzimy rozważając relację (17). Pamiętać przy tym należy, że moment dipolowy jest z definicji skierowany od ładunku ujemnego do dodatniego, co sprawia, że  $\chi_e > 0$ , a po wstawieniu do równania (20) znajdujemy  $\varepsilon > 1$ . Typowe wartości przenikalności elektrycznej są znaczące. Na przykład wody w temperaturze pokojowej wynosi 80.

Rys. 1 pokazuje również, że spolaryzowany materiał jest przyciągany w kierunku przeciwnym do kierunku pola elektrycznego wywołującego polaryzację. Wyjaśnia to zjawisko, od obserwacji którego zaczęła się nauka o elektryczności, czyli przyciągania drobin przez naelektryzowane przedmioty.

## Ośrodek jednorodny

Jeśli ośrodek, w którym występują zewnętrzne ładunki i pola, jest jednorodny, czyli taki sam w całej przestrzeni, wówczas prawo Gaussa (16) dla pól  $\vec{D}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  ma postać

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}), \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(\vec{r}), \quad (21)$$

gdzie skorzystaliśmy z relacji (19). A zatem pole indukcji elektrycznej  $\vec{D}(\vec{r})$  wytwarzane przez rozkład ładunku  $\rho(\vec{r})$  jest takie samo jak pole  $\vec{E}(\vec{r})$  wytwarzane przez  $\rho(\vec{r})$  w próżni. Pole zaś elektryczne  $\vec{E}(\vec{r})$  w ośrodku jest zmniejszone o czynnik  $\varepsilon$  w stosunku do tego, które byłoby w próżni.

Aby znaleźć warunki jakie pola  $\vec{E}(\vec{r})$  i  $\vec{D}(\vec{r})$  spełniają na granicy ośrodków, wykorzystamy twierdzenie Gaussa omówione w Wykładzie II oraz twierdzenie Stokesa, które przedstawimy teraz.

## Twierdzenie Stokesa

Dla dowolnego pola wektorowego  $\vec{G}(\vec{r})$  zachodzi równość

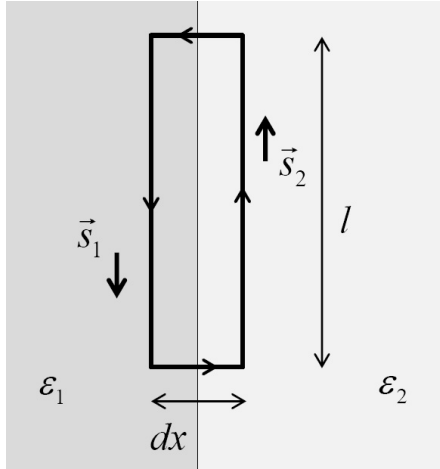
$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{G}(\vec{r}) = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{G}(\vec{r}), \quad (22)$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią ograniczoną gładką krzywą zamkniętą  $C$ ,  $d^2\vec{\sigma}$  jest znanym z twierdzenia Gaussa zorientowanym elementem powierzchni, a  $d\vec{l}$  jest zorientowanym elementem krzywej  $C$  tzn.  $d\vec{l} = dl \vec{s}$ , gdzie  $\vec{s}$  jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej zorientowanym w taki sposób, że krzywą  $C$  obiegamy w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Wielkość po prawej stronie równania (22) nazywa się krażeniem pola  $\vec{G}(\vec{r})$  wzdłuż zamkniętej krzywej  $C$ . Dowód twierdzenia Stokesa jest podobny do dowodu twierdzenia Gaussa.

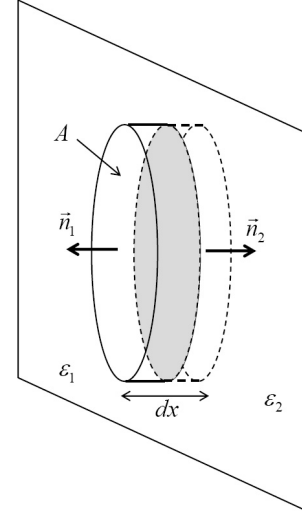
## Wektor $\vec{E}$ na granicy ośrodków

Ponieważ  $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$ , więc z twierdzenia Stokesa wynika, że krażenie pola elektrycznego wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej znika. Rozważmy więc prostokątną pętlę pokazaną na Rys. 2, umieszczoną na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Odcinki pętli równoległe do granicy ośrodków mają długość  $l$ , a długość odcinków prostopadłych jest infinitezymalnie mała i wynosi  $dx$ .

Obliczmy teraz krażenie wzdłuż pętli z Rys. 2, zakładając, że długość  $l$  jest na tyle mała, że pole  $\vec{E}(\vec{r})$  nie zmienia się istotnie, gdy posuwamy się wzdłuż boku pętli, który jest równoległy



Rysunek 2: Prostokątna pętla o długości  $l$  i nieskończenie małej szerokości  $dx$ , ustawiona na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  po lewej stronie i  $\varepsilon_2$  po prawej stronie.



Rysunek 3: Puszka o powierzchni denka  $A$  i nieskończenie małej wysokości  $dx$ , ustawiona na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  po lewej stronie i  $\varepsilon_2$  po prawej stronie.

do granicy ośrodków. Pomijając wkład do krążenia od nieskończenie małych odcinków pętli prostopadłych do granicy ośrodków, znajdujemy

$$0 = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = l\vec{s}_1 \cdot \vec{E}_1 + l\vec{s}_2 \cdot \vec{E}_2 = l\vec{s}_1 \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2), \quad (23)$$

gdzie wielkości z indeksem 1 odnoszą się do ośrodka po lewej stronie, a z indeksem 2 do ośrodka po prawej stronie. W równaniu (23) uwzględniliśmy, że  $\vec{s}_1 = -\vec{s}_2$ . Ponieważ  $\vec{s}_1$  jest wektorem jednostkowym, więc zachodzi równość  $\vec{s}_1 \cdot \vec{E}_1 = E_1^{\parallel}$ , w której  $E_1^{\parallel}$  jest składową pola elektrycznego w ośrodku 1 równoległą do granicznej powierzchni między ośrodkami. A zatem

$$0 = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = l(E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel}). \quad (24)$$

Ponieważ krążenie jest zerowe, otrzymujemy warunek

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}, \quad (25)$$

który wypowiadamy: *składowa pola elektrycznego równoległa do granicy ośrodków jest ciągła*. Zwróćmy uwagę, że pole  $\vec{E}$  ma dwie składowe równoległe do granicy, gdyż ta jest powierzchnią.

## Wektor $\vec{D}$ na granicy ośrodków

Aby sformułować warunek jaki spełnia pole  $\vec{D}(\vec{r})$  na granicy ośrodków, wykorzystamy prawo Gaussa, które orzeka, że

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi Q_V, \quad (26)$$

gdzie  $S$  jest powierzchnia ograniczająca objętość  $V$ , w której znajduje się ładunek  $Q_V$ . Objętość  $V$  wybieramy jako puszkę pokazaną na Rys. 3, umieszczoną na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  w taki sposób, że denka puszki są równoległe do powierzchni granicznej ośrodków. Długość puszki  $dx$  jest nieskończenie mała.

Obliczamy teraz strumień pola  $\vec{D}(\vec{r})$  przez powierzchnię otaczającą puszkę, pomijając powierzchnię boczną ze względu na nieskończenie małą długość puszki. Rachunek sprowadza się

do policzenia strumienia przez denka. Zakładamy przy tym, że rozmiary denek są tak małe, że pole  $\vec{D}(\vec{r})$  na całej powierzchni  $A$  każdego z denek jest takie samo. Znajdujemy wtedy strumień

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{D} = A\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + A\vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2 = A\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2), \quad (27)$$

który wstawiony do równania (26) daje relację

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 4\pi\sigma, \quad (28)$$

gdzie

$$\sigma \equiv \frac{Q_V}{A} \quad (29)$$

jest gęstością powierzchniową zewnętrznego ładunku znajdującego się na powierzchni rozgraniczającej ośrodki. Ponieważ  $\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 = D_1^\perp$ , gdzie  $D_1^\perp$  jest składową pola  $\vec{D}$  prostopadłą do powierzchni rozgraniczającej ośrodki, relację (28) zapisujemy jako

$$D_1^\perp - D_2^\perp = 4\pi\sigma. \quad (30)$$

Jeśli nie ma ładunku zewnętrznego na granicy ośrodków ( $\sigma = 0$ ), warunek (30) orzeka, że *składowa indukcji elektrycznej prostopadła do granicy ośrodków jest ciągła*. Jeśli natomiast ładunek zewnętrzny występuje to, *składowa indukcji elektrycznej prostopadła do granicy ośrodków doznaje skoku o wysokości  $4\pi\sigma$* .

### Załamane linii pól $\vec{E}$ i $\vec{D}$ na granicy ośrodków

Aby uchwycić sens relacji (25) i (30), rozważmy, co się dzieje z linią pola elektrycznego na granicy dwóch ośrodków o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Zakładamy, że na granicy ośrodków nie występuje powierzchniowy ładunek zewnętrzny, więc relacje (25) i (30) zapisujemy jako

$$E_1^\parallel = E_2^\parallel, \quad \varepsilon_1 E_1^\perp = \varepsilon_2 E_2^\perp. \quad (31)$$

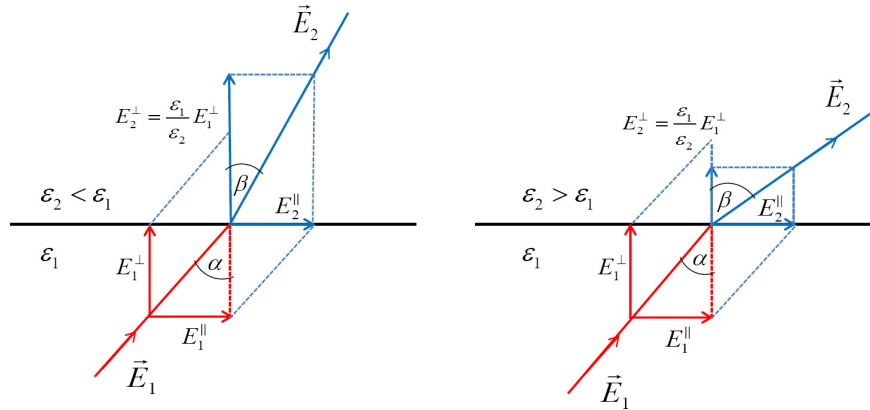
Jak widzimy, składowa pola elektrycznego równoległa do granicy ośrodków nie ulega zmianie, natomiast składowa poprzeczna skokowo wydłuża się lub skraca w zależności od tego czy  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , czy też  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Linia pola elektrycznego ulega więc załamaniu. Cały problem jest zilustrowany na Rys. 4. Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia z sytuacją podobną do załamania promienia światła na granicy dwóch ośrodków, opisywanego przez prawo Snella. Prawo załamania linii pola elektrycznego możemy zapisać w postaci

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (32)$$

kąty  $\alpha$  i  $\beta$  zaznaczone są na na Rys. 4.

Zauważmy, że zgodnie ze związkami materiałowymi (19) wektory pola elektrycznego  $\vec{E}$  i indukcji elektrycznej  $\vec{D}$  są zawsze do siebie równoległe. Załamanie linii pola  $\vec{D}$  musi być więc takie jak linii  $\vec{E}$ . Stwierdzamy, że tak faktycznie jest, korzystając z relacji (31), które dla pola  $\vec{D}$  przybierają postać

$$\frac{1}{\varepsilon_1} D_1^\parallel = \frac{1}{\varepsilon_2} D_2^\parallel, \quad D_1^\perp = D_2^\perp. \quad (33)$$



Rysunek 4: Linia pola elektrycznego  $\vec{E}$  na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Lewy rysunek odpowiada sytuacji, gdy  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , prawy zaś  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ .

### Ładunek punktowy w ośrodku

Rozważmy ładunek punktowy  $q$ , znajdujący się w środku kuli o promieniu  $R$  wykonanej z materiału dielektrycznego o przenikalności  $\varepsilon$ . Poza kulą rozciąga się próżnia. Pytamy jakie są pola  $\vec{D}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  wytwarzane przez ładunek  $q$ .

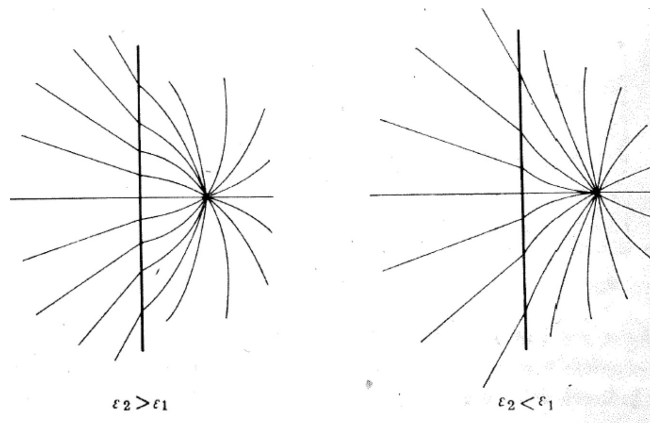
Ze względu na symetrię sferyczną problemu linie pola  $\vec{D}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  są prostopadłe do powierzchni sfery oddzielającej ośrodek o przenikalności  $\varepsilon$  od próżni. Nie występuje więc składowa pól równoległa do powierzchni rozgraniczającej ośrodek, mamy tylko składową poprzeczną. Pole  $\vec{D}(\vec{r})$  jest więc wszędzie ciągłe, a prawo Gaussa, które dla indukcji elektrycznej  $\vec{D}(\vec{r})$  dane jest wzorem (26), pokazuje, że pole  $\vec{D}(\vec{r})$  jest równe polu  $\vec{E}(\vec{r})$  w próżni tzn.

$$\vec{D}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (34)$$

Pole  $\vec{E}(\vec{r})$  znajdziemy ze związku materiałowego (19) jako

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & r \leq R, \\ 1 & r > R. \end{cases} \quad (35)$$

Widzimy, że pole elektryczne doświadcza skoku na powierzchni sfery, co wiąże się z indukowaniem tam ładunku wynoszącego  $q(1 - 1/\varepsilon)$ .



Rysunek 5: Linie pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek punktowy, znajdujący się w pobliżu płaskiej granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  po lewej stronie i  $\varepsilon_2$  po prawej stronie.

Na koniec zauważmy, że problem wyznaczenia pól  $\vec{D}(\vec{r})$  i  $\vec{E}(\vec{r})$  wytwarzanych przez ładunek punktowy  $q$  bardzo się komplikuje, jeśli układ nie ma symetrii sferycznej. Trzeba wówczas rozważyć zachowanie podłużnych i poprzecznych składowych pól na granicy ośrodków. Na Rys. 5 pokazane są linie pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek punktowy, znajdujący się w pobliżu płaskiej granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Widzimy tutaj znane już z Rys. 4 załamanie linii pól na granicy ośrodków.