# <u>Wykład V</u> Algebra

## <u>Układy równań liniowych</u>

<u>Układem równań liniowych</u> nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

w którym <u>współczynniki</u> $a_{ij}$ i <u>wyrazy wolne</u> $b_i$ są elementami ciała liczbowego $K$, a $x_i$ są niewiadomymi. Układ można zapisać w formie macierzowej jako

$$A \cdot X = B \ ,$$

gdzie $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Jeśli $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, układ równań nazywa się <u>jednorodnym</u>, w przeciwnym wypadku mamy do czynienia z układem <u>niejednorodnym</u>.

**Przykłady** Układy równań i ich rozwiązania

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\quad$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $x_3 = -1$, $x_1 = 1 - 2x_2$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ $\quad$ nie ma rozwiązań.

Kiedy układ równań ma jedno rozwiązanie, wiele lub wcale?

# Układy Cramera

Układem równań Cramera nazywamy układ, w którym $n = m$ (liczba równań jest równa liczbie niewiadomych) i $\det A \neq 0$.

Rozwiązaniem (jedynym) układu Cramera jest $X = A^{-1}B$ czyli

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

co zapisujemy jako $x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j}{\det A}$. Wyrażenie $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j$ można potraktować jako rozwinięcie Laplace'a względem $i$-tej kolumny wyznacznika ($D_i$) macierzy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{tzn.} \quad x_i = \frac{D_i}{\det A}.$$

**Wniosek:** Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie trywialne $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

**Przykład**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -2, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{\det A} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{\det A} = 3.$$

# <u>Wykład V cd.</u> Algebra

## <u>Rząd macierzy</u>

<u>Przestrzeń liniowa rozpinana przez zbiór wektorów</u> $L(x_1, x_2, \ldots x_n)$ to przestrzeń liniowa wektorów będących kombinacją liniową wektorów należących do zbioru $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$.

**Definicja:** <u>Rzędem zbioru wektorów</u> nazywamy wymiar przestrzeni liniowej rozpinanej przez ten zbiór $\dim(x_1, x_2, \ldots x_n)$, czyli liczbę elementów maksymalnego podzbioru wektorów liniowo niezależnych.

**Przykład**

Mamy zbiór 3 wektorów z $R^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Tylko 2 (dowolne 2) z 3 wektorów są liniowo niezależne, więc rząd tego zbioru jest 2.

**Definicja:** <u>Rzędem kolumnowym macierzy</u> jest rząd kolumn traktowanych jako zbiór wektorów.

**Przykład:**

Mamy macierz $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Rząd zbioru wektorów $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ wynosi 2.

**Definicja:** <u>Rzędem wierszowym macierzy</u> jest rząd wierszy traktowanych jako zbiór wektorów.

**Przykład**

Mamy macierz $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Rząd zbioru wektorów: $\{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,0)\}$ wynosi 2.

**Twierdzenie:** Rząd kolumnowy macierzy $A$ jest równy rzędowi wierszowemu tej macierzy i oznaczany jest jako $\mathrm{r}(A)$.

Bez dowodu, komentarz: $\det A = \det A^T$.

**Wniosek:** Rząd macierzy jest równy największemu stopniowi niezerowego minora tej macierzy (stopień minora - liczba kolumn (wierszy) macierzy, której wyznacznik (minor) obliczamy).

**Przykład**

Mamy macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; jej nieznikające minory to $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

## Teoria układów równań liniowych

Mamy układ $n$ równań liniowych z $m$ niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

Macierzą współczynników ($A$) i macierzą rozszerzoną ($\tilde{A}$) nazywamy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}.$$

**Twierdzenie** (Kroneckera-Capellego): Układ równań liniowych ma co najmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej ($\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\tilde{A})$).

**Dowód:** Niech $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_m\}$będzie rozwiązaniem układu. Mamy wówczas

$\gamma_1 A_1+\gamma_2 A_2+\ldots+\gamma_m A_m=B$, gdzie $A_i$ kolumny macierzy współczynników, a $B$ ostatnia kolumna macierzy rozszerzonej. $B\in L(A_1,A_2,\ldots,A_m)$ więc

$L(A_1,A_2,\ldots,A_m)=L(A_1,A_2,\ldots,A_m,B) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(A_1,A_2,\ldots,A_m)=\dim(A_1,A_2,\ldots,A_m,B)$

$\Leftrightarrow \quad r(A)=r(\tilde{A})$.

**Wniosek:** Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie jeśli rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej i jest równy liczbie niewiadomych ($\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\tilde{A})=m$).

**Przykłady** Układy układów równań

$$1)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 & x_1=1 \\ 5x_1+2x_2-3x_3=0 & x_2=2 \\ -4x_1+2x_3=2 & x_3=3 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad r(A)=r(\tilde{A})=3$$

$$2)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=0 & x_1=0 \\ 5x_1+2x_2-3x_3=0 & x_2=0 \\ -4x_1+2x_3=0 & x_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad r(A)=r(\tilde{A})=3$$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{array}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_1 = 1 - 2x_2 \end{array}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ nie ma rozwiązań

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2 \neq r(\widetilde{A}) = 3$$

# Wykład V cd. Algebra

## Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą rugowania niewiadomych

Mamy układ $n$ równań liniowych z $m$ niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

Zakładamy, że $r(A) = r(\tilde{A})$ i $n \le m$. Drugie równanie mnożymy przez $-a_{11}/a_{21}$, dodajemy do pierwszego i dostajemy zamiast 2-go równania równanie

$$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22}x_2 - \ldots - \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{2m}x_m = -\frac{a_{11}}{a_{21}}b_2,$$

w którym nie ma $x_1$. Trzecie równanie mnożymy przez $-a_{11}/a_{31}$, dodajemy do pierwszego i dostajemy równanie

$$-\frac{a_{11}}{a_{31}}a_{32}x_2 - \ldots - \frac{a_{11}}{a_{31}}a_{3m}x_m = -\frac{a_{11}}{a_{31}}b_3,$$

w którym również nie ma $x_1$. Wykonując analogiczną operacje na pozostałych równaniach dostajemy układ, w którym we wszystkich równaniach poza pierwszym nie ma $x_1$. Potem wykorzystując równanie dwa, eliminujemy $x_2$ z równań $3,4,\ldots n$. Postępując tak dalej, otrzymujemy układ postaci

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1m}x_m = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2m}x_m = \beta_2, \\ \vdots \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases} \qquad \text{jeśli } n = m$$

lub

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1m}x_m = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2m}x_m = \beta_2, \\ \vdots \\ \alpha_{nn}x_n + \alpha_{n(n+1)}x_{n+1} + \ldots + a_{nm}x_m = \beta_n, \end{cases} \qquad \text{jeśli } n < m,$$

który dalej rozwiązujemy standardowo zaczynając od ostatniego równania tzn. z ostatniego równania wyznaczmy $x_n$ podstawiamy do przedostatniego itd.

**Przykład**

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 5x_1+2x_2-3x_3=0 \\ -4x_1+2x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ \frac{-2}{5}5x_1-\frac{2}{5}2x_2+\frac{2}{5}3x_3=0 \\ -4x_1+2x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ -2x_1-\frac{4}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3=0 \\ -4x_1+2x_3=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ \frac{11}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3=2 \\ -4x_1+2x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 11x_2-4x_3=10 \\ -4x_1+2x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 11x_2-4x_3=10 \\ -2x_1+x_3=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 11x_2-4x_3=10 \\ 3x_2-x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 11x_2-4x_3=10 \\ -11x_2+\frac{11}{3}x_3=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 11x_2-4x_3=0 \\ x_3=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2=\frac{10+4x_3}{11}=\frac{10+12}{11}=2\,,\quad x_1=\frac{2-3x_2+2x_3}{2}=\frac{2-6+6}{2}=1$$