<u>Wykład III</u> Algebra

<u>Przestrzeń wektorowa</u>

<u>Definicja</u>: Zbiór V (wektorów) nazywa się <u>przestrzenią wektorową</u> (liniową) V nad ciałem K jeśli:

1) V jest grupą abelową ze względu na dodawanie (wektorów):
   $\forall x, y \in V\ \exists z \in V\ x + y = z$,
   $\forall x, y, z \in V\ \ (x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność),
   $\forall x \in V\ \exists 0 \in V\ x + 0 = 0 + x = x$ (element neutralny),
   $\forall x \in V\ \exists x' \in V\ x + x' = 0$ (element odwrotny)
   $\forall x, y \in V\ \ x + y = y + x$ (przemienność);
2) określone jest odwzorowanie $f : K \times V \to V$, zwane mnożeniem wektora przez liczbę, spełniające warunki:
   $\forall x \in V\ \forall \alpha \in K\ \exists y \in V,\ f(\alpha, x) \equiv \alpha x = y$,
   $\forall x\ 1x = x \quad (1 \in K)$,
   $\forall x, y \in V\ \forall \alpha \in K\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
   $\forall x \in V\ \forall \alpha, \beta \in K\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
   $\forall x \in V\ \forall \alpha, \beta \in K\ (\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

V nad **R -** przestrzeń rzeczywista, V nad **C -** przestrzeń zespolona

<u>Przykłady</u> przestrzeni wektorowych

1) K^n - zbiór ciągów n-elementowych, $a = [a_1, a_2, \ldots a_n]$
   dodawanie: $a = [a_1, a_2, \ldots a_n]$, $b = [b_1, b_2, \ldots b_n]$,
   $a + b = [a_1 + b_1, a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n]$;
   mnożenie: $\alpha a = [\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots \alpha a_n]$.
2) Zbiór wielomianów n-tego stopnia, $a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
   dodawanie: $a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $b = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$,
   $a + b = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$,
   mnożenie: $\alpha a = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n$.

3) Zbiór macierzy $n \times m, \quad n, m \in \mathbf{Z}$

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad ,$$

dodawanie: $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

mnożenie: $\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}.$

Własności przestrzeni wektorowych

Twierdzenie 1: $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee x = 0$.

Dowód: $\Leftarrow$ 1) $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = 0$,

$\Leftarrow$ 2) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x = 0$,

$\Rightarrow \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha^{-1} | \alpha x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1x = \alpha^{-1} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Twierdzenie 2: $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$.

Dowód: $\alpha x + \alpha(-x) = \alpha(x - x) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha(-x) = -\alpha x$,

$(-\alpha)x + \alpha x = (-\alpha + \alpha)x = 0x = 0 = 0 \Rightarrow (-\alpha)x = -\alpha x$.

<u>Wykład III cd.</u> Algebra

<u>Definicja:</u> $W \subset V$ jest <u>podprzestrzenią wektorową</u> przestrzeni *V* nad *K,* jeśli *W* jest przestrzenią wektorową nad *K.*

Przykład: $K^m \subset K^n, \quad m < n$.

<u>Definicja:</u> Wektor *x* jest <u>kombinacja liniową</u> wektorów $x_1, x_2, ..., x_n$, jeśli $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

<u>Definicja:</u> Wektory $x_1, x_2, ..., x_n$ są <u>liniowo niezależne</u>, jeśli jedynym rozwiązaniem równania $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ jest zbiór $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

<u>Twierdzenie:</u> Wektory $x_1, x_2, ..., x_n$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z nich można wyrazić jako kombinację liniową pozostałych.

Dowód: $\Rightarrow$ rozwiązaniem równania $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ jest zbiór $\alpha_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots m, \quad 2 \leq m \leq n$. Wtedy $x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m)$.

$\Leftarrow \qquad x_1 = \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \quad \Rightarrow$ równania

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ przybiera postać

$(\alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) x_2 + \ldots + (\alpha_n + \alpha_1 \beta_n) x_n = 0$

i jego rozwiązaniem jest $\alpha_2 = -\alpha_1 \beta_2, \ldots \alpha_n = -\alpha_1 \beta_n$.

<u>Definicja:</u> Zbiór wektorów $x_1, x_2, ..., x_n$ jest <u>bazą</u> przestrzeni *V*, jeśli

1) $x_i \in V, \quad i = 1, 2, \ldots, n$,
2) wektory $x_1, x_2, ..., x_n$ są liniowo niezależne,
3) $\forall x \in V \; \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in K \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ (zupełność).

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ - składowe wektora *x* w bazie $x_1, x_2, ..., x_n$.

Maksymalny zbiór wektorów liniowo niezależnych - zbiór którego nie można już powiększyć.

Baza - maksymalny zbiór wektorów liniowo niezależnych.

Każda baza tej samej przestrzeni ma równą liczbę wektorów.

Jeśli liczba wektorów bazy danej przestrzeni jest skończona, to jest ona <u>wymiarem</u> tej przestrzeni.

Dalej zajmujemy się wyłącznie przestrzeniami skończono-wymiarowymi.

Wykład III cd. Algebra

Twierdzenie: Każdy zbiór wektorów liniowo niezależnych mniejszy niż wymiar przestrzeni można rozszerzyć do bazy.

Twierdzenie: Przedstawienie wektora w danej bazie jest jednoznaczne.

Dowód: Niech $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ i $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$, $x - x = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)x_n = 0$. Z niezależności liniowej wektorów bazy wynika, że $(\alpha_1 - \beta_1) = 0, (\alpha_2 - \beta_2) = 0, \ldots (\alpha_n - \beta_n) = 0$.

Izomorfizm przestrzeni wektorowych

Definicja: Przekształcenie $f : V \to U$, gdzie *V, U* są przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem *K* jest izomorfizmem, jeśli

1) *f* jest bijekcją (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne),
2) $\forall x, y\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,
3) $\forall x \in V\ \forall \alpha \in K\ f(\alpha x) \equiv \alpha f(x)$.

Wniosek: $f(0) = 0$.
Dowód: $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$.

Twierdzenie: Izomorficzny obraz zbioru wektorów liniowo niezależnych jest liniowo niezależny.

Dowód: Jedynym rozwiązaniem równania $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ jest zbiór $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Zachodzi pytanie czy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ jest jedynym rozwiązaniem równania będącego izomorficznym obrazem tego równania $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) = 0$? Załóżmy, że nie oraz $f(x_1) = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)\right), \quad \alpha_1 \neq 0$. Wykonując przekształcenie odwrotne $x_1 = f^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)\right)\right) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}x_3 \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n$ stwierdzamy, że wektory x_1, x_2, ..., x_n są liniowo zależne.

Wniosek: Izomorficznym obrazem bazy jest baza.

Twierdzenie: Dowolna przestrzeń wektorowa V nad ciałem K jest izomorficzny z przestrzenią K^n.

Dowód: Wektor x z V rozkładamy w dowolnej bazie x_1, x_2, ..., x_n tak, że $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ i określamy odwzorowanie (przyporządkowanie) $f : x \to [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \in K^n$. Ze względu na jednoznaczność rozkładu wektora na składowe w danej bazie, przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczne. Dalej pokazujemy, że

1) $\forall x, y \; f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in K \; f(\alpha x) \equiv \alpha f(x)$.

Wniosek: Każde dwie przestrzenie nad tym samym ciałem i o tym samym wymiarze są izomorficzne.