

2 Grundkonzepte der Quantentheorie

2.1 Erste Fassung der Postulate (reine Zustände abgeschlossenener Quantensysteme)

2.1.1 Das Szenario der Quantentheorie

Wenn man die Quantentheorie auf konzeptionell weniger vertraute Situationen anwenden will, wie sie im Zusammenhang mit zusammengesetzten Systemen auftreten, dann ist es nützlich, sich zunächst noch einmal an die Grundstrukturen der Quantentheorie zu erinnern. Dazu soll das Kapitel 2 dienen.

Wir machen die physikalische Generalvoraussetzung, dass wir nur Vorgänge untersuchen, die keine relativistische Beschreibung benötigen und die auf einem endlich-dimensionalen Hilbert-Raum formuliert werden können.

Doppelspaltexperiment Die charakteristischen Züge der Quantenphysik werden deutlich, wenn man sie mit denen der klassischen Physik vergleicht. Hierzu betrachtet man zwei analoge physikalische Situationen. In einem Fall kann die Situation im Rahmen der klassischen Physik beschrieben werden, im anderen Fall ist eine quantentheoretische Beschreibung erforderlich. Das Doppelspaltexperiment ist hierfür ein gerne diskutiertes konkretes Beispiel, an dem man viele Elemente der Quantentheorie ablesen kann. Wir besprechen das Experiment daher ausführlich. Die Ergebnisse sollen die Einführung der Postulate in Abschn. 2.1.2 und der Konzepte in Kap. 4 vorbereiten. Verschränkung werden wir später an anderen Experimenten veranschaulichen und damit das Szenario der Quantentheorie noch erweitern.

Wir beschreiben zunächst die experimentelle Situation bei einem Doppelspalt mit den Spaltöffnungen 1 und 2. Vor dem Spalt, d. h. links in der Abb. 2.1a befindet sich ein Apparat für das Schießen von kleinen Kugeln, den wir durch den Wurf einer Münze steuern. Je nachdem wie die Münze fällt, schießt der Apparat durch Spalt 1 oder durch Spalt 2. Dabei soll über die jeweilige Spaltöffnung hin eine gleichmäßige Streuung der Durchschussorte gegeben sein. Hinter dem Doppelspalt wird ein Schirm aufgestellt, auf dem die Einschlagorte der Kugeln registriert werden. Wir diskutieren die Fälle, in denen nur einer der beiden Spalte offen ist (der andere ist abgedeckt), und den Fall, dass beide Spalte offen sind. Wir tragen in allen drei Fällen die relative Häufigkeit der Auftreffer auf dem Schirm als Funktion des Ortes auf. Je häufiger geschossen wird, umso klarer zeigen die relativen Häufigkeiten, wenn nur ein Spalt offen ist, die in Abb. 2.1a angegebene räumliche Verteilung. Sie gibt im Grenzfall vieler Schüsse die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für das Auftreffen der Kugeln wieder. Wenn Spalt 1 abgedeckt wird,

finden wir eine entsprechende Verteilung hinter Spalt 2. Es ist eine Alltagserfahrung, dass sich bei Öffnen beider Spalte die mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multiplizierten Auftreffwahrscheinlichkeiten der Einzelspalte addieren.

In dem analogen quantenphysikalischen Experiment wird der Schussapparat durch eine Apparatur ersetzt, die einen Atomofen enthält¹. Man findet geeignete Apparaturen und passend präparierte Schirme, so dass Folgendes gilt: Wenn man den Schirm, ohne dass ein Doppelspalt vorhanden ist, hinter der Apparatur aufbaut, dann werden nacheinander regellos über den Schirm verteilt einzelne Treffer registriert. Wenn man lange genug wartet, entsteht eine homogene Verteilung der Auftreffpunkte. Da die Treffer zeitlich getrennte Einzelereignisse sind, wollen wir damit die Vorstellung verbinden, dass ein einzelnes Objekt, das wir schon Atom genannt haben, den Ofen verlassen hat und auf dem Schirm aufgeschlagen ist. Über ein Atom zwischen Ofen und Schirm können wir keine Aussage machen. Sodann schieben wir einen geeignet dimensionierten Doppelspalt zwischen Ofen und Schirm ein und schließen wieder zum Beispiel Spalt 2. Dann messen wir im Grenzfall sehr vieler Aufschläge für die relative Häufigkeit (und damit für die Auftreffwahrscheinlichkeit $P(x)$) die räumliche Verteilung von Abb. 2.1b. Ihr Maximum liegt gegenüber der Spaltöffnung. Wenn Spalt 1 geschlossen ist, finden wir eine entsprechend verschobene Kurve gegenüber dem offenen Spalt. Wenn wir allerdings für Atome beide Spalte öffnen, ergibt sich die in Abb. 2.2 dargestellte Verteilung der relativen Häufigkeiten, die ihr Maximum gerade hinter dem Steg zwischen den beiden Spalten hat. Wieder ist der Grenzfall sehr vieler Aufschläge eingezeichnet. Wie bei den Kugeln ändert sich eine Wiederholung des Experimentes die Reihenfolge der Orte der einzelnen Einschläge in *völlig zufälliger Weise* (vgl. Abb. 2.3). Nur im Grenzfall sehr vieler Einschläge ergibt sich in *deterministischer Weise* immer dieselbe Häufigkeitsverteilung.

Als wesentliches Ergebnis halten wir fest: Für Atome erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Doppelspalt – anders als bei Kugeln – nicht durch Addition der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelspalte. Es ist ein *Interferenzbild* entstanden, wie wir es von der Optik her kennen, das nicht dadurch erklärt werden kann, dass wir den Atomen Bahnen zuordnen, wie wir das für die einzelnen Kugeln tun konnten. Wegen der verblüffenden Analogie zur optischen Beugung können wir vermuten, dass die mathematische Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Doppelspalt in ähnlicher Weise das Phänomen der Interferenz durch Überlagerung wieder spiegeln wird.

Entweder-Oder versus Weder-Noch Im Hinblick auf später immer wieder verwendete Begriffe wollen wir die Experimente mit Kugeln bzw. Atomen noch etwas genauer charakterisieren. Wir fassen die durch die Münze gesteuerte Schießanlage für Kugeln und die jeweiligen Spalte davor als ein *Präparationsverfahren* auf. Präpariert wird der entsprechende *Zustand* der Kugeln. Wenn nur Spalt 1 (bzw. 2) geöffnet ist, wollen wir den Zustand Z_1 (bzw. Z_2) nennen. Für jeden Zustand liegen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Auftreffer auf dem Schirm fest. Schießanlage und Doppelspalt präparieren einen weiteren Zustand, den wir $Z_j(1, 2)$ nennen wollen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich durch Addition der Verteilungen zu den *klassischen Zuständen* Z_1 und Z_2 , die noch jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden. Gemäß der Münzsteuerung der Schießanlage liegen jeweils mit

¹Das Doppelspaltexperiment wurde für Elektronen, Atome, van-der-Waals-Cluster, Fullerene und Biomoleküle mit Erfolg durchgeführt (vgl. Abschn. 15.6).

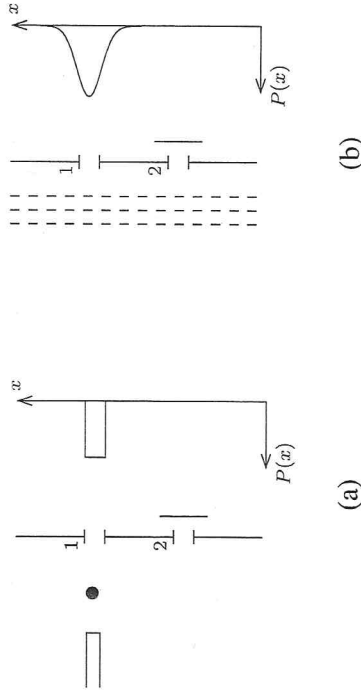


Abbildung 2.1: Schirm hinter einem Einzelspalt: Auftreffwahrscheinlichkeit $P(x)$ für klassische Objekte (a) und für Quantenobjekte (b).

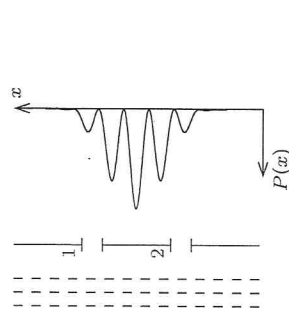


Abbildung 2.2: Schirm hinter einem Doppelspalt: Auftreffwahrscheinlichkeit $P(x)$ für Quantenobjekte.

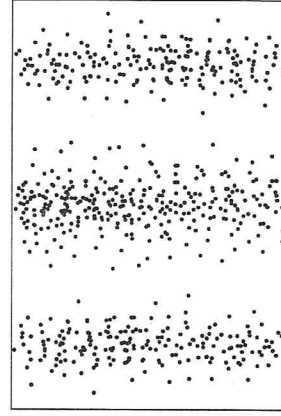


Abbildung 2.3: Es ist völlig zufällig, wo ein einzelnes Quantenobjekt auf dem Schirm auftrifft. Das Streifenbild aus vielen Auftreffpunkten ist hingegen wohlbestimmt.

der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Kugeln im Zustand Z_1 und im Zustand Z_2 vor. Durch Mischen der Zustände Z_1 und Z_2 mit diesen Gewichten entsteht der Zustand $Z_g(1, 2)$. Wir nennen so entstandene Zustände *klassische Gemische* (classical mixtures). Für eine einzelne Kugel liegt immer entweder Z_1 oder Z_2 vor. Klassische Gemische sind in diesem Sinne *Entweder-Oder-Zustände*. Das klassische Gemisch enthält über die Würfe der Münze ein statistisches Element. Die Bahn einer einzelnen Kugel ist dagegen völlig determiniert.

Für Atome können wir ebenfalls durch Schließen eines der Spalte die *Quantenzustände* \hat{Z}_1 bzw. \hat{Z}_2 präparieren. Für viele Atome in diesen Zuständen finden wir eindeutig entweder die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Abb. 2.1a oder die verschobene Verteilung. Wenn wir jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen der Spalte abdecken, entsteht der Quantenzustand $\hat{Z}_g(1, 2)$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich wie in der klassischen Physik durch Addition der mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gewichteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von \hat{Z}_1 und \hat{Z}_2 . Wieder haben wir nur gemischt. Das Ergebnis wird in der Quantenphysik *statistisches Gemisch* (statistical mixture) oder *Gemenge* genannt. Der Begriff *Quantengemisch* (quantum mixture), den wir in Kap. 4 diskutieren werden, ist allgemeiner und enthält das Gemenge als Spezialfall. Da immer nur einer der Spalte offen war, können wir in diesem Fall davon sprechen, dass das einzelne Atom entweder durch Spalt 1 oder durch Spalt 2 geflogen sein muss. Es liegt ein quantenphysikalischer Entweder-Oder-Zustand vor. Soweit existiert also eine Analogie zu den Zuständen der Kugel.

Für Atome gibt es aber noch einen weiteren Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$ mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die für Kugeln nicht auftreten kann. Er entsteht, wenn beide Spalte geöffnet sind (vergl. Abb. 2.2). Wichtig ist, dass diese Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht durch Mischen präpariert werden kann. Wir nennen einen ungemischten Zustand einen *reinen Zustand* (pure state). $\hat{Z}_r(1, 2)$ ist ein Beispiel. Anders als bei Kugeln im Zustand $Z_g(1, 2)$ liegt hier ein einzelnes Atom hinter dem Doppelspalt weder im Zustand \hat{Z}_1 noch im Zustand \hat{Z}_2 vor. Der reine Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$ ist ein *Weder-Noch-Zustand*. Wir können dementsprechend auch vom Atom nicht sagen, es sei durch einen der Spalte gekommen. Diese an Kugeln orientierte klassische Vorstellung versagt bei Atomen. Wir erwähnen noch, dass die ungemischten Zustände \hat{Z}_1 und \hat{Z}_2 ebenfalls gemäß unserer Definition reine Zustände sind.

Selektive und nicht-selektive Messung Wir wollen durch Messung für die gemischten Zustände $Z_g(1, 2)$ und $\hat{Z}_g(1, 2)$ von Kugeln bzw. Atomen und für den reinen Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$ der Atome feststellen, hinter welchem Spalt eine einzelne Kugel oder ein einzelnes Atom anzufragen ist. Die möglichen Messergebnisse sind daher „hinter dem ersten Spalt“ und „hinter dem zweiten Spalt“. Wir strahlen zur Messung Licht ein, das von den Kugeln, bzw. den Atomen gestreut werden kann. Dabei beobachten wir, dass ein Aufblitzen immer nur hinter einem der beiden Spalte stattfindet. Wir haben also die gewünschte Messung realisiert. Anschließend hinterlässt die Kugel bzw. das Atom wieder seinen Einschlagspunkt auf dem Schirm. Tatsächlich ist die experimentelle Realisierung komplizierter. Literaturangaben hierzu finden sich im Abschn. 8.6.

Welche Häufigkeitsverteilungen entstehen, wenn wir wieder sehr viele Einschläge abwarten? Die Antwort hängt nicht nur vom Zustand ab, an dem wir messen, sondern auch davon, wie wir die Messergebnisse auswerten (vergl. Tab. 2.1). Ein mögliches Verfahren besteht dar-

in, selektiv vorzugehen und immer nur die Einschlagspunkte zu markieren, die zum Beispiel zum Aufblitzen hinter Spalt 1 gehören. Wir nennen dies eine *selektive Messung* (selective measurement). Sie bestehen aus vielen Messungen mit anschließender Selektion je nach Messergebnis. Wir lesen an den resultierenden Häufigkeitsverteilungen folgendes ab: Das klassische Gemisch im Zustand $Z_g(1, 2)$ geht in den Zustand $Z(1)$ über. In analoger Weise geht das quantenphysikalische Gemenge $\hat{Z}_g(1, 2)$ in den Zustand $\hat{Z}(1)$ über. Beides ist nicht verwunderlich. Wir haben einfach durch selektive Messung die gemischten Zustände wieder enmisch.

Für Atome können wir darüber hinaus aber auch den reinen Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$ präparieren. Die selektive Messung, die zum Aufblitzen hinter Spalt 1 gehört, überführt diesen Zustand gemäß resultierender Häufigkeitsverteilung in den Zustand $\hat{Z}(1)$. Beim Doppelspalt überführt die selektive Messung also einen reinen Zustand in einen davon verschiedenen reinen Zustand. Die Messung greift ein und ändert ab. Wir können eine selektive Messung auch als eine *Umpräparation* auffassen. Das Resultat der Interferenz beim reinen Zustand wird aufgebrochen. In Spezialfällen wird nicht umpäpariert: Wenn der reine Zustand $\hat{Z}(1)$ vorliegt (Spalt 2 ist geschlossen), dann blitzt es immer hinter Spalt 1 auf. Darüber hinaus zeigt die registrierte Häufigkeitsverteilung der Atome, die geblitzt haben, dass der Zustand $\hat{Z}(1)$ nicht abgeändert wurde. In diesen Fällen bestätigt die Messung nur die Präparation.

Ein alternatives Auswertungsverfahren besteht darin, dass wir nicht selektiv messen, also zwar die Atome und die Kugeln anstrahlen, aber die Aufschlagpunkte unabhängig davon wo der Blitz aufgeleuchtet hat (und daher ohne Auswahl) auf dem Schirm zu einem einzigen Bild zusammenfassen (*nicht-selektive Messung*, non-selective measurement). An der resultierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung können wir ablesen, dass für Kugeln wie für Atome gleichermaßen statistisches ein Gemisch (bzw. Gemenge) wieder in ein statistisches Gemisch (bzw. Gemenge) übergeht. Das ist plausibel. Da wir nicht selektieren, mischen wir die Zustände wieder. Für Atome können wir zusätzlich den reinen Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$ präparieren, der keine Entsprechung für Kugeln hat. Wenn wir an diesem Zustand nicht-selektiv messen, erhalten wir die Häufigkeitsverteilung, die zum Gemenge $\hat{Z}_g(1, 2)$ gehört. Wir haben die zu den beiden Messergebnissen gehörigen Zustände $\hat{Z}(1)$ und $\hat{Z}(2)$ gemischt. Im Bereich der Quantenphysik überführt eine nicht-selektive Messung einen reinen Zustand in ein Gemenge.

Schließlich wollen wir eine letzte Bemerkung zur Messung an Atomen machen. Wir hatten oben schon beschrieben, dass $\hat{Z}(1)$ durch eine Messung unverändert bleibt. Eine direkt nachfolgende Messung erfolgt daher wieder am Zustand $\hat{Z}(1)$, und wir registrieren erneut ein Aufblitzen hinter Spalt 1. Das ist der Grund dafür, dass man Atomen mit Aufblitzen zum Beispiel hinter dem ersten Spalt die *Eigenschaft* „hinter Spalt 1“ durchaus zuordnen kann.

Die Messung, die die Frage wiederholt „hinter welchem Spalt?“ führt bei diesen Atomen wieder auf die Antwort „hinter Spalt 1“.

Die typische experimentelle Situation Wir können noch in anderer Weise als durch eine Messung zwischen Doppelspalt und Schirm eingreifen. Wenn die Kugeln bzw. die Atome geladen sind, können wir zum Beispiel ein elektrisches Feld anlegen, dann wird sich das Bild der Auftreffwahrscheinlichkeiten verzerren. Je schwächer das Feld ist umso schwächer ist die Verzerrung. Das elektrische Feld bewirkt eine Änderung des Zustandes. Selbstverständlich ist das Anlegen des elektrischen Feldes nur ein Beispiel. Es gibt andere Eingriffsformen. Einheitlich

	Klassische Physik	Quantenphysik
Selektive Messung	Klassisches Gemisch → in einem der im Gemisch enthaltenen reinen Zustände	Gemenge → in reinen Zustand. (*) Reiner Zustand → in einen (im Allgemeinen verschiedenen) reinen Zustand
Nicht-selektive Messung	Klassisches Gemisch → in das gleiche klassische Gemisch	Gemenge → in ein möglicherweise anderes Gemenge Reiner Zustand → in ein Gemenge

Tabelle 2.1: Die Auswirkungen von Messungen in der klassischen Physik und der Quantenphysik. Der Pflil "→" besagt, "..." wird durch Messung in "..." überführt. Wir verwenden für Gemenge auch die Bezeichnung statistisches Gemisch. Wie wir später sehen werden, gilt (*) nur, wenn keine Entartung vorliegt.

werden wir sie als das Einwirken eines Transformationsapparates auffassen. Die ungestörte freie Entwicklung ist als Spezialfall enthalten.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir es in der Physik mit drei Typen von Apparaten zu tun haben: Präparationsapparate, Transformationsapparate und Messapparate. Bei einem Versuchsaufbau im Labor liegt jeweils ein spezieller Typ dieser Apparate vor. Das Experiment kann in drei unabhängige aufeinander folgende Phasen zerlegt werden: Präparation, Transformation und Messung (vergl. Abb. 2.4).

Anwendungsbereich der Quantentheorie Die Aufgabe einer physikalischen Theorie ist es, zu bekanntem Präparations- und Transformationsapparat die Messergebnisse, die der Messapparat anzeigt, zu prognostizieren und hierfür eine Begründung auf der Grundlage einer Theorie zu geben. Es zeigt sich bereits am Doppelspalt – insbesondere beim Zustand $\hat{Z}_r(1, 2)$, den wir als Ergebnis einer „Interferenz“ charakterisiert haben – dass es in gewissen Fällen keine Begründung im Rahmen der klassischen Physik gibt. Diese Experimente setzen dem Anwendungsbereich der klassischen Physik Grenzen. Sie liegen außerhalb im *Quantenbereich*. Ein *Quanteneffekt* liegt dann vor, wenn eine rein klassische Begründung des Verhaltens der drei Apparatetypen nicht möglich ist.

Die *Quantentheorie* begründet die Quanteneffekte. Ob und in welcher Weise sie auch eine Begründung für die Effekte der klassischen Physik geben kann, ob also die klassische Physik

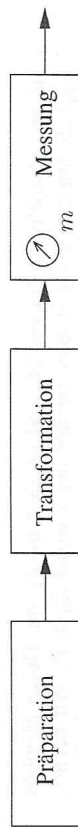


Abbildung 2.4: Die Einflüsse auf den Zustand eines physikalischen Systems.

als ein Grenzfall aus der Quantentheorie ableitbar ist, ist eine offene Frage. Sie ist Gegenstand aktueller Forschung und wir werden noch auf sie in Kap. 15 zurückkommen. Auch die umgekehrte Begründungsrichtung ist denkbar. Der Anwendungsbereich der Quantentheorie könnte leer sein. Kann man möglicherweise Quanteneffekte mit Hilfe der klassischen Physik beschreiben? Wir greifen die Frage in Kap. 10 wieder auf, wenn wir die „verborgenen Parameter“ diskutieren.

2.1.2 Postulate für reine Zustände abgeschlossener Quantensysteme

Wir wollen im Folgenden die theoretische Begründung der Phänomene im Quantenbereich auf einige wenige Grundannahmen zurückführen. Wir verallgemeinern hierzu die Erfahrungen, die wir im Experiment zur Atominterferometrie gemacht haben. Dabei streben wir allerdings nicht die mathematische und begriffliche Präzision einer Axiomatisierung der Quantentheorie an. Hierfür sei auf die Literatur verwiesen. Wir präzisieren zunächst den schon verwendeten Begriff des Quantenzustandes und stellen dann die Postulate vor, die die Quantenphänomene begründen können, die bei reinen Zuständen auftreten. In späteren Kapiteln dieses Buches werden wir die Postulate Schritt für Schritt allgemeiner fassen. Dabei wird sich zeigen, dass die Grundgliederung, die letztlich durch das Schema von Abb. 2.4 bestimmt ist, erhalten bleibt.

Quantensysteme Die Apparate in Abbildung 2.4 werden nacheinander von links nach rechts wirksam. Die Pfeile kennzeichnen dabei den Übergang eines Quantensystems von einem Apparat zum anderen. Mit *Quantensystem* (quantum system) bezeichnen wir etwas, das einen Präparationsvorgang durchlaufen hat und an dem Messungen vorgenommen werden können. Die Begründung dieser Messungen muss dabei in den Bereich der Quantentheorie fallen. Im oben diskutierten Beispiel ist ein einzelnes Atom ein solches Quantensystem. Auch die Spinorientierung eines Atoms oder die Polarisation eines Photons kann präpariert und registriert werden. In der *Standardinterpretation* der Quantentheorie, die wir in diesem Kapitel anwenden wollen, wird dem einzelnen Quantensystem physikalische *Realität* zugesprochen. Seine Existenz wird behauptet, so wie wir das, ausgehend von den Einzelaufschlüssen auf dem Schirm, für die Atome im Atominterferometer bereits getan haben. Wir kommen auf das Problem der Realität im Abschn. 2.5 noch einmal zurück. Wir werden sehen, dass Quantensysteme selber wieder aus Teilsystemen zusammengesetzt sein können. In diesem Fall spielen die verschränkten Zustände eine zentrale Rolle.

Quantenzustand und Messungen Quantensysteme, die in gleicher Weise präpariert wurden, können zu verschiedenen Messergebnissen führen. Beispielsweise können in unse-

rem Experiment die Atome an verschiedenen Orten des Schirms detektiert werden (Vergl. Abb. 2.3). Eine bestimmte Präparation legt nur die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Messergebnisse fest. Damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung experimentell bestimmt werden kann, müssen Messungen an sehr vielen gleich präparierten Systemen durchgeführt werden. *Der Zustand eines Quantensystems ist dem durchlaufenen speziellen Präparationsverfahren zugeordnet. Unter einem Quantenzustand (quantum state) verstehen wir dasjenige mathematische (!) Objekt, das es erlaubt, eindeutig die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse aller möglichen Messungen an Systemen zu berechnen, die das zugeordnete Präparationsverfahren durchlaufen haben.* Der Quantenzustand charakterisiert somit das Präparationsverfahren. Wir erwarten also nicht, dass der so eingeführte Quantenzustand eine Entsprechung in der Realität hat, die dem einzelnen Quantensystem zugeordnet werden kann. Für die Zustände von Objekten in der klassischen Physik ist das der Fall. Weiterhin können verschiedene Präparationsverfahren auf den gleichen Zustand führen. Diese Verfahren bilden in diesem Sinne eine Äquivalenzklasse von Zustandspräparationen. Die mathematische Beschreibung dieses Zustandes und die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten werden wir weiter unten postulieren. Durch den Bezug auf Äquivalenzklassen werden auch die individuellen Strukturen der einzelnen Präparations- und Messapparate gleichen Typs eliminiert.

Es ist wichtig, auf diesem Hintergrund noch eine *Sprechweise* zu erklären, die sich eingebürgert hat und die wir auch verwenden wollen: Häufig sagt man, dass ein einzelnes Quantensystem sich in einem speziellen Zustand *befindet* oder einen Zustand *hat*. Gemeint ist damit, dass es die entsprechende Präparationsprozedur aus einer bestimmten Äquivalenzklasse von Präparationen durchlaufen hat. Nur in diesem Sinne ordnet man einem Einzelsystem einen Zustand zu. Wir sind also in diesem ersten Schritt hin zur Formulierung der Standardinterpretation der Quantentheorie sehr zurückhaltend mit Aussagen über Quantensysteme selber. Weitergehende Festlegungen über Eigenschaften wie Energie, Ort usw. werden wir erst nach Formulierung der Postulate treffen.

Reine Zustände abgeschlossener Quantensysteme Wie für die Klassische Mechanik der „freie Massenpunkt“ so ist für den Aufbau der Quantentheorie das Konzept des *total isolierten* oder *freien Systems* fundamental. Es handelt sich dabei um eine Idealisierung; die tatsächlich nur näherungsweise realisiert werden kann. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, dass in gewissen Situationen Quantensysteme so vollständig vom Rest der Welt entkoppelt werden können, dass alle möglichen Vorgänge in diesem Rest den Zustand des Systems unverändert lassen. Insbesondere könnte der Rest ohne Einfluss auf das System völlig leer geräumt werden².

Freie Quantensysteme sind für Anwendungen uninteressant. Wir lassen daher zu, dass sich der Zustand des Systems zwischen der Zeit der Präparation und der Zeit der Messung ändern kann. Das äußert sich darin, dass Messungen zu den beiden Zeiten zu verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Messwerte führen. Wie in der klassischen Mechanik wird für diese Abweichung vom freien Verhalten eine Ursache angegeben, die hier durch den Transformationsapparat repräsentiert wird. Er beschreibt eine innere Entwicklung des Systems bzw. äußere konstante oder zeitabhängige Einflüsse wie sie zum Beispiel durch elektromagnetische

oder gravitative Felder verursacht werden. Wir setzen dabei aber voraus, dass es keine Rückwirkung auf das den Einfluss bewirkende äußere System geben soll. Das Quantensystem soll also für Rückwirkungen „nach außen hin“ abgeschlossen sein. Dies wird im Allgemeinen ebenfalls nur näherungsweise der Fall sein. Wir nennen diese Systeme *abgeschlossene Quantensysteme* (closed systems).

Unser Präparationsapparat kann selber aus anderen Präparationsapparaten aufgebaut sein, die mit wohlbestimmten Häufigkeiten tätig werden und entsprechend unterschiedliche Präparationen des Quantensystems durchführen. Auch in diesem Fall ist die Prognose der Wahrscheinlichkeiten aller Messergebnisse eindeutig möglich. Der alles zusammenfassenden Präparationsapparat präpariert einen Zustand, den man mit Blick auf die vielen beteiligten Präparationsprozeduren statistisches Gemisch oder Gemenge nennt. Der Zustand $Z_g(1, 2)$ ist ein Beispiel. Wir werden so präparierte Zustände später noch im Einzelnen untersuchen. Sie sind spezielle Gemische. Für die erste Fassung der Postulate sollen solche Gemische ausgeschlossen sein. Wir beschränken uns auf Zustände, die in keiner Weise durch eine echte Mischungsprozedur erzeugt oder hinsichtlich der Wahrscheinlichkeitsaussage simuliert werden können und nennen sie *reine Zustände* (pure states). Neben der Abgeschlossenheit des Systems ist die Reinheit der Zustände die zweite starke Idealisierung. Wie in der klassischen Mechanik, die auf einem Postulat für die Messpunkte (Inertialsystem) aufbaut, werden wir schrittweise zur Beschreibung realistischer physikalischer Situationen übergehen.

Postulate Es stehen uns damit alle Konzepte zur Verfügung, um die *erste Fassung* der Postulate zu formulieren. Wir werden alle drei Postulate in späteren Kapiteln

Postulat 1 (reiner Zustand) Ein abgeschlossenes Quantensystem, das sich in einem reinen Zustand befindet, wird durch seinen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschrieben. Er ist ein normierter Vektor in einem dem System zugeordneten Hilbert-Raum \mathcal{H} .

Wir vereinfachen zunächst unsere experimentelle Grundsituation und gehen direkt zu Messungen über: Wir denken uns daher den Transformationsapparat herausgenommen oder fassen ihn als Teil des Präparationsapparates auf. Auch für die Messgeräte soll an dieser Stelle zunächst nicht der allgemeinste Fall behandelt werden. Wir beschränken uns vielmehr auf Projektionsmessungen. Dies ist ein bestimmter fundamentaler Typ von Messungen, der aber auch bei den späteren Verallgemeinerungen immer wieder eine zentrale Rolle spielen wird.

Postulat 2 (Projektionsmessung, von Neumann-Messung)

a) Eine an einem Quantensystem durchgeführte Projektionsmessung einer physikalischen Größe (z. B. Energie, Drehimpuls, usw.) wird durch einen hermiteschen Operator beschrieben, der auf \mathcal{H} wirkt. Wir sprechen von einer Messung der Observablen A und bezeichnen den Operator mit dem selben Symbol A .

b) Die möglichen Messergebnisse einer Messung der Observablen A sind die Eigenwerte a_n des zugehörigen Observablenoperators A . Wir setzen voraus, dass das Spektrum diskret ist:

$$A|u_n^A\rangle = a_n|u_n^A\rangle, \quad i = 1, \dots, g_n \quad (2.1)$$

²Wie wir in nachfolgendem Kapitel sehen werden reicht für Quantensysteme die Abschirmung aller von außen angreifenden Wechselwirkungen nicht aus. Zur totalen Isolierung müssen zusätzlich alle EPR-Korrelationen mit der Außenwelt verhindert werden. Abschirmung hat so eine neue Qualität erhalten.

c) Wenn die Messung der Observablen A an einem System mit normiertem Zustandsvektor $|\psi\rangle$ auf das Messergebnis a_n führt, dann ist der unnormierte Zustandsvektor $|\psi'_n\rangle$ unmittelbar nach der Messung durch die Projektion von $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'_n\rangle = P_n |\psi\rangle \quad (2.2)$$

mit dem Projektionsoperator

$$P_n := \sum_{i=1}^{g_n} |a_n^i\rangle \langle a_n^i| \quad (2.3)$$

gegeben, der in den Raum der Eigenvektoren zu a_n projiziert.

d) Wir bezeichnen mit $N(a_n)$ die Häufigkeit mit der sich der Messwert a_n ergibt, wenn die Messung an N gleich präparierten Systemen im Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt wird. Die relativen Häufigkeiten $\frac{N(a_n)}{N}$ gehen für alle solchen Ensembles im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ einheitlich in die Wahrscheinlichkeit $p(a_n)$ als Grenzwert über:

$$\frac{N(a_n)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(a_n) \quad (2.4)$$

e) Die Wahrscheinlichkeit $p(a_n)$ den Messwert a_n zu erhalten, ist gleich dem Erwartungswert des Projektionsoperators P_n vor der Messung bzw. gleich dem Quadrat der Norm des Zustandsvektors $|\psi'_n\rangle$ nach der Messung:

$$p(a_n) = \langle \psi | P_n | \psi \rangle = \|\tilde{\psi}'_n\|^2. \quad (2.5)$$

Messungen, die durch dieses Postulat beschrieben werden, heißen *Projektionsmessungen* (projection measurements) oder *Von-Neumann-Messungen*. Da A ein hermitescher Operator ist, gilt $\sum_n P_n = \mathbb{1}$ und damit, wie für die Gesamtwahrscheinlichkeit zu erwarten ist,

$$\sum_n p(a_n) = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (2.6)$$

Wir beschreiben schließlich noch die Wirkung des Transformationsapparates für abgeschlossene Systeme:

Postulat 3 (dynamische Entwicklung zwischen Präparation und Messung)

a) Die Zeitentwicklung eines abgeschlossenen Quantensystems zwischen zwei beliebigen Zeiten t_0 und t_1 wird durch einen unitären Zeitentwicklungsoperator (time development operator) $U(t_1, t_0)$ beschrieben:

$$U^\dagger(t_1, t_0) = U^{-1}(t_1, t_0). \quad (2.7)$$

Er erfüllt die Bedingungen $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ und

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0) \quad (2.8)$$

für beliebige Zeiten t_0, t_1, t_2 .

b) Aus den Bedingungen (2.7) und (2.8) ergibt sich (siehe unten) für $U(t, t_0)$ die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad (2.9)$$

mit einem hermiteschen Operator H , der explizit zeitabhängig sein kann. $\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$ Joule \cdot sec ist die Plancksche Konstante. Es wird postuliert, dass $H(t)$ diejenige Observable ist, die zur Gesamtenergie des Systems gehört (Hamilton-Operator).

c) Das Schrödinger-Bild (Schrödinger picture) ist eine der vielen möglichen Beschreibungen der Zeitentwicklung. In diesem Bild wird die dynamische Entwicklung in linearer Weise allein durch den Zustandsvektor gemäß

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2.10)$$

wiedergegeben. Observablen können nur explizit zeitabhängig sein.

Anderer Bilder, wie z. B. das Heisenberg- und das Wechselwirkungsbild, ergeben sich mit Hilfe der Unitäritätsäquivalenz. Sie sorgt dafür, dass alle Aussagen über Messungen am Ende der Zeitentwicklung in allen Bildern gleich sind. Wir verwenden i.A. das Schrödinger-Bild.

Warum unitäre Zeitentwicklung? Infolge der Unitarität des Zeitentwicklungsoperators bleibt der Zustandsvektor $|\psi\rangle$ normiert und die Gesamtwahrscheinlichkeit irgendeiner der Messwerte zu messen ist gleich eins: $\sum_n p(a_n) = 1$. Wenn man umgekehrt die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit während der dynamischen Entwicklung mit einem (noch nicht als unitär vorausgesetzten) Zeitentwicklungsoperator $T(t_1, t_0)$ fordert, so muss auch zum Zeitpunkt t_1

$$\sum_n p_{t_1}(a_n) = \langle T(t_1, t_0) \psi | T(t_1, t_0) \psi \rangle = 1 \quad (2.11)$$

für alle Zustände $|\psi\rangle$ gelten. Wie wir in Abschn. 1.1.5 gezeigt haben, folgt aus dieser Normerhaltung die Unitarität von T . Man könnte also das Postulat 3 umformulieren und die Forderung der Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit an die Spitze stellen.

Schrödinger-Gleichung Der inverse Operator U^{-1} ist wiederum unitär. Die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems außerhalb des Messprozesses ist daher umkehrbar. Wählt man in Gl. (2.8) $t_2 = t_0$, dann sieht man, dass der inverse Operator durch

$$U^{-1}(t_1, t_0) = U(t_0, t_1) \quad (2.12)$$

gegeben ist. Gemäß Gl. (2.10) ist die infinitesimale Zeitentwicklung

$$|\psi(t_0 + dt)\rangle = U(t_0 + dt, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2.13)$$

durch den Operator $U(t_0 + dt, t_0)$ bestimmt. Seine Entwicklung nach der Zeit kann in der Form

$$U(t_0 + dt, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t) dt \quad (2.14)$$

geschrieben werden, wobei H ein hermitescher Operator ($H^\dagger = H$) mit der Dimension Energie ist. H kann explizit zeitabhängig sein. Die Unitarität ergibt sich dann mit

$$U^\dagger(t_0 + dt, t_0)U(t_0 + dt, t_0) = \left(1 + \frac{i}{\hbar}H(t)dt\right)\left(1 - \frac{i}{\hbar}H(t)dt\right) \simeq \mathbb{1} \quad (2.15)$$

Durch Auswerten von

$$U(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0) = U(t_0 + dt_1 + dt_2, t_0 + dt_1)U(t_0 + dt_1, t_0) \quad (2.16)$$

kann man leicht zeigen, dass der infinitesimale Zeitentwicklungsoperator von (2.14) auch die Relation (2.8) bis auf einen Term der Ordnung dt erfüllt.

Die Differentialgleichung für den Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ erhalten wir mit Hilfe von (2.8) und (2.14). Aus

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t)U(t, t_0) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}H(t)dt\right)U(t, t_0) \quad (2.17)$$

folgt

$$U(t + dt, t_0) - U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}H(t)dt \quad (2.18)$$

und damit die Gl. (2.9)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0). \quad (2.19)$$

Im Schrödinger-Bild folgt daraus mit Gl. (2.10) für die Zeitentwicklung des Zustandsvektors die *Schrödinger-Gleichung*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle. \quad (2.20)$$

Physikalische Eigenschaften Die Postulate ermöglichen es uns die bisherige Interpretation zu erweitern. Inwieweit können Quantensysteme bestimmte *physikalische Eigenschaften* (properties) haben, wie das in der Standardinterpretation üblicherweise angenommen wird? Wenn der Zustand ein Eigenvektor $|u_n\rangle$ zum Eigenwert a_n des Observablenoperators A ist, dann führt eine Messung von A mit Sicherheit auf das Messergebnis a_n . Wiederholen wir die Messung so ergibt sich immer wieder mit Sicherheit a_n . Dies ist wegen $P_n P_n = P_n$ die charakteristische Eigenschaft projektiver Messungen.

Es macht daher Sinn davon zu sprechen, dass das im Zustand $|u_n\rangle$ präparierte System die physikalische *Eigenschaft* a_n besitzt. Sie wird als real angenommen. Wenn A z. B. der Energie-Operator ist, dann hat das System die Energie a_n . Ergibt sich für einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle \neq |u_n\rangle$ bei Messung von A der Messwert a_n , so kann man allerdings nicht davon sprechen, dass das System die Eigenschaft a_n schon vorher hatte. Erst durch das Zusammenwirken von Quantensystem und Messapparat im Messprozess geht das System in den Zustand $|u_n\rangle$ über und der Messapparat zeigt a_n an. Wir kommen in Abschn. 2.4 auf die oben beschriebene Interpretation der Quantentheorie noch einmal zurück.

2.1.3 Kommentare zu den Postulaten

- Die Dimension des Hilbert-Raums eines Quantensystems ist physikalisch charakterisiert als die maximale Zahl von Zuständen, die in einer Einzelmessung verlässlich von einem der unterschieden werden können. Das wird deutlich, wenn man als Observablenoperator einen hermiteschen Operator nimmt, bei dem keiner der Eigenwerte entartet ist.
- Neben der Dimension des Hilbert-Raums gibt es weitere beobachterunabhängige Charakterisierungen von Quantensystemen, die keiner Wahrscheinlichkeitsaussage unterliegen. Dazu gehören die klassischen Variablen Masse, Ladung und Betrag des Spins eines Quantensystems. Obwohl diese Größen Messgrößen sind, tauchen sie in der unrelativistischen Quantentheorie nur als Parameter auf.
- Die Entwicklung des Systems gemäß Postulat 3 ist deterministisch und reversibel. Zeit ist in der Quantentheorie eine klassische Variable und keine Observable.
- Es wird angenommen, dass nicht nur jeder reine Zustand durch einen Zustandsvektor dargestellt wird, sondern, dass auch jeder Zustandsvektor einen möglichen reinen Zustand repräsentiert. Das zugehörige Präparationsverfahren lässt sich im Prinzip experimentell realisieren.
- Den reinen Zustand haben wir als einen Zustand eingeführt, der nicht gemischt ist. Diese negative Charakterisierung ist für praktische Anwendungen nur bedingt brauchbar. Wir haben aber mit Postulat 2.c ein Verfahren zur Auszeichnung eines reinen Zustandes kennen gelernt, das leichter operationalisierbar ist und auf das wir zurückgreifen können. Ein reiner Zustand entsteht als Ergebnis einer Messung, wenn der Messwert nicht entartet ist. Falls Entartung vorliegt muss ein vollständiger Satz paarweise kommutierender Observablen gemessen werden. Der Satz der zugehörigen Messwerte charakterisiert den resultierenden Zustandsvektor eindeutig.
- Ein dynamischer Prozess stellt einen beobachtbaren Wechsel in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen dar. Die Postulate gehen davon aus, dass es im Quantenbereich zwei völlig verschiedene Typen dynamischer Prozesse gibt: den irreversiblen probabilistischen Messprozess (Postulat 2) und die reversible unitäre Zustandsentwicklung zwischen Präparation und Messung (Postulat 3).
- Das legt den Gedanken nahe, das Quantensystem um ein quantentheoretisch beschriebenes Messgerät zu einem größeren abgeschlossenen Quantensystem zu erweitern. Man könnte dann versuchen die gemeinsame Entwicklung im Sinne von Postulat 3 zu beschreiben. Das Postulat 2 würde überflüssig. Wir werden später solche Ansätze noch diskutieren (vergl. Kap. 15). Zunächst bleiben wir dabei, dass mit den Postulaten 2 und 3 zwei ganz verschiedene Dynamiken eingeführt sind: die *Messdynamik* und die *Transfomationsdynamik*.
- Es ist das mathematische Zusammenwirken von Zustandsvektor und Observable, das das physikalische Zusammenwirken von Quantensystem und Messapparat im Laboratorium abbildet. Dabei geht – anders als in der klassischen Physik – nicht nur der Messapparat

in einen neuen Zustand über, sondern das Quantensystem ebenfalls. Es muss in der Regel mit einem neuen Zustandsvektor beschrieben werden.

- Es ist zugelassen, dass die Messung das Quantensystem zerstört. Dann entfällt Abschnitt c) von Postulat 2.
- Wir werden annehmen, dass sich zu jedem hermiteschen Operator ein Messapparat finden lässt, der durch den Operator beschrieben wird. Tatsächlich ist es in den meisten Fällen eine keineswegs einfache Aufgabe, eine solche experimentelle Realisierung anzugeben.

2.2 Ausblick

Wir haben bei der Formulierung der Postulate eine ganze Reihe von physikalischen Einschränkungen gemacht, die wir in den kommenden Kapiteln Schritt für Schritt aufgeben wollen, bis sich die ganz allgemeine Struktur der Quantentheorie ergibt.

- Wir haben uns auf reine Zustände beschränkt. Der allgemeine Quantenzustand ist ein Gemisch (Kap. 4).
- Quantensysteme können aus Untersystemen zusammengesetzt sein, die dann im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen sind. Die Quantentheorie solcher offenen Systeme ist zu entwickeln (Kap. 7 und 8). Bei zusammengesetzten Systemen werden wir zum ersten Mal den verschränkten Zuständen begegnen.
- Projektionsmessungen sind ein spezieller Typ von Quantenmessungen. Wir werden in Kap. 13 und Kap. 14 und Verallgemeinerungen einführen.
- Für offene Quantensysteme sind dynamische Entwicklungen möglich, die sich nicht mehr durch unitäre Zeitentwicklungsoperatoren beschreiben lassen. Wir werden sie mit Hilfe von Superoperatoren formulieren (Kap. 14).
- Was lässt sich erreichen, wenn man versucht, die Messdynamik von Postulat 2 auf die Dynamik von Postulat 3 zurückzuführen (vergl. Kap. 15)?

Alle diese Fortentwicklungen vertiefen nicht nur das Verständnis der unrelativistischen Quantentheorie. Sie führen auch auf neue physikalische Effekte und sind die Grundlage von Quanteninformationstheorie und von Quantencomputern.

Weitere Verallgemeinerungen, die wir aber nicht diskutieren wollen, ließen sich anschließen: Wir könnten Observablenoperatoren mit kontinuierlichem Eigenwertspektrum wie Ort und Impuls einbeziehen. Wenn die Zahl der Quantensysteme nicht fest oder wohlbestimmt ist, ist zur Beschreibung ein Fock-Raum nötig. In beiden Fällen sind weitere neue Effekte zu erwarten. Beim Übergang zu Hilbert-Räumen mit abzählbarer unendlicher Dimension können dagegen die bisherigen Ergebnisse in den physikalisch relevanten Fällen direkt übertragen werden.

Bevor wir die angekündigten Verallgemeinerungsschritte durchführen, wollen wir im Folgenden die Macht der Projektionsmessung kennen lernen und in den Abschnitten 2.4 und 2.5 von höherer Warte einen Blick auf den bisher beschriebenen Aufbau der Theorie werfen.

2.3 Manipulation der Zustandsbewegung durch projektive Messungen

Quantentheoretische Messungen greifen in die dynamische Entwicklung eines Quantensystems ein und ändern sie ab. Bei Projektionsmessungen ist dieser Eingriff besonders stark. Wir können durch eine Sequenz von Projektionsmessungen die Entwicklung völlig „einfrieren“ oder aber dem Zustand eine willkürliche Entwicklung aufprägen, ihn also durch Messungen „treiben“.

2.3.1 Quanten-Zeno-Effekt

Kurzzeitverhalten Wir betrachten folgende Situation: Der Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ ist ein Eigenvektor $|a\rangle$ einer Observablen A : $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle$. A hat ein diskretes Spektrum. Die unitäre Entwicklung erfolgt mit dem zeitunabhängigen Hamilton-Operator H . Wir setzen $\hbar = 1$.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|a\rangle. \quad (2.21)$$

Nach der Zeit t messen wir die Observable A . Die Wahrscheinlichkeit des Systems nach dieser Messung wieder im Anfangszustand $|a\rangle$ zu finden ist

$$p(t) = |\langle a|e^{-iHt}|a\rangle|^2. \quad (2.22)$$

Für kleine Zeiten erhalten wir daraus

$$p(t) = 1 - (\Delta H)^2 t^2 + \mathcal{O}((\Delta H)^4 t^4) \quad (2.23)$$

mit der Energie-Unbestimmtheit ΔH

$$(\Delta H)^2 := \langle a|H^2|a\rangle - \langle a|H|a\rangle^2 =: \tau_z^{-2}. \quad (2.24)$$

Die Zeit τ_z heißt *Zeno-Zeit*. Sie ist umso größer, je ähnlicher $|a\rangle$ einem Energie-Eigenzustand ist. Im Grenzfall $\Delta H = 0$ ergibt sich $p(t) = 1$. Für $\Delta H \neq 0$ hängt $p(t)$ für kleine Zeiten $t \ll \tau_z$ quadratisch von t ab.

Quanten-Zeno-Effekt³ Wir führen nun über eine Zeit T hin N Messungen der gleichen Observablen A in gleichen Zeitintervallen

$$\tau := \frac{T}{N} \quad (2.25)$$

mit $\tau \ll \tau_z$ durch. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p^{(N)}(T)$ nach jeder einzelnen Messung in der Sequenz immer wieder den Anfangszustand $|a\rangle$ zu finden ist mit (2.23)

$$p^{(N)}(T) = [p(\tau)]^N = [p(T/N)]^N \approx \left(1 - \frac{1}{\tau_z^2} \left(\frac{T}{N}\right)^2\right)^N. \quad (2.26)$$

³ Benannt nach dem Pflci-Paradoxon des Zeno von Elea ca. 495-430 v.Chr.

Je mehr Messungen im Zeitintervall $[0, T]$ bei festem T stattfinden, d.h. je kleiner das Zeitintervall τ wird, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Anfangszustand $|a\rangle$ bleibt. Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ bzw. $\tau \rightarrow 0$ der kontinuierlichen projektiven Messung hat sich die Messdynamik völlig gegenüber der unitären Entwicklung durchgesetzt und das System wird im Anfangszustand „eingefroren“.

$$p^{(N)}(T) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \quad (2.27)$$

Dies nennt man den *Quanten-Zeno-Effekt*. Anders als die Gl. (2.26) ist der Grenzübergang in Gl. (2.27) aber tatsächlich unphysikalisch: Der quantentheoretische Messprozess hat eine gewisse endliche Dauer.

2.3.2 Treiben eines Zustandsvektors durch eine Sequenz von Projektionsmessungen

Wir können durch Projektionsmessungen die Entwicklung eines Quantenzustandes nicht nur näherungsweise unterbinden, sondern auch ihren zeitlichen Verlauf bestimmen. Der Hilbertraum des Systems möge zweidimensional sein mit der ONB $\{| \uparrow \rangle, | \downarrow \rangle\}$. Der Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ sei $|\uparrow\rangle$. Für eine Observable, die einen dagegen gedrehten Eigenzustand

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |\uparrow\rangle + \sin \alpha |\downarrow\rangle \quad (2.28)$$

hat, ist die Wahrscheinlichkeit das System nach der Messung im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden

$$p(\alpha) = \cos^2 \alpha. \quad (2.29)$$

Wir führen wieder N Messungen mit Zeitabstand $\tau = \frac{T}{N}$ im Zeitintervall $[0, T]$ durch. Aber in diesem Fall gehen wir dabei nacheinander jeweils zu neuen Observablenoperatoren über, die die Eigenzustände $|\alpha_n\rangle$ mit $\alpha_n = n\omega\tau$ und $n = 1, 2, 3, \dots$ besitzen. Wir nehmen an, dass es keine zusätzliche unitäre Entwicklung gibt. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit das System im Zustand $|\alpha_n\rangle$ zu finden, wenn es vorher im Zustand $|\alpha_{n-1}\rangle$ war

$$\tilde{p}(n) = |\langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle|^2 = \cos^2 \omega\tau. \quad (2.30)$$

Die Wahrscheinlichkeit das System nach jeder dieser Messungen im entsprechenden Eigenzustand $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \dots$ zu finden ist

$$\tilde{p}^{(N)}(n) = \left(\cos \frac{\omega\tau}{N} \right)^{2N} \xrightarrow{N \text{ groß}} 1 - \frac{\omega^2 T^2}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \quad (2.31)$$

Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ bei festem t bzw. für den Zeitabstand $\tau \rightarrow 0$ stimmt der Systemzustand stets mit dem Zustand $|\alpha\rangle$ von Gl. (2.28) mit $\alpha = \omega t$ überein. Dem System ist eine vorgegebene Zustandsbewegung durch eine Sequenz angepasster projektiver Messungen aufgezwungen worden. Auch in diesem Fall ist der Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ im strengen Sinne unphysikalisch wegen der endlichen Dauer des Messprozesses.

2.4 Die Struktur physikalischer Theorien*

Wir haben bisher immer nur von der Standardinterpretation gesprochen. Gibt es andere Interpretationen? Was versteht man unter der Interpretation einer physikalischen Theorie? Wir werden uns in den nächsten beiden Kapiteln diesen Fragen zuwenden. Beide Kapitel sind zum Verständnis der restlichen Kapitel nicht nötig und können daher auch überlesen werden. Andererseits spielen gerade die mit Interpretationsproblemen verknüpften naturphilosophischen und wissenschaftstheoretischen⁵ Fragen sowohl in Grundsatzdiskussionen als auch in populärwissenschaftlichen Darstellungen eine große Rolle. Gerade die Frage „Was sagt die Quantenphysik über die Wirklichkeit aus?“ übt offenbar auf viele Physiker und Nicht-Physiker eine große Faszination aus. Das rechtfertigt ein mit einem Stern versehene Anmerkungen dazu, wie solche Fragen einzuordnen sind. Sie können auch für den mehr „praktisch“ orientierten Leser nützlich sein, da dadurch manche Konfusion in der Diskussion quantentheoretische Probleme und der Interpretation von Aussagen vermieden werden kann.

2.4.1 Bauelemente einer physikalischen Theorie*

Vortheorien Wir schließen das Kapitel 2 über die Grundkonzepte der Quantentheorie mit einigen strukturellen Überlegungen ab. Dabei soll insbesondere nach der Wirklichkeit gefragt werden, auf die sich die Quantentheorie bezieht. Hierzu ist es nützlich sich zunächst klar zu machen wie physikalische Theorien aufgebaut sind. Wir machen hierzu einen Ausflug in die klassische Physik und betrachten die Elektrodynamik. Typische elementare Experimente bestehen darin, dass Kräfte gemessen werden, Drähte sich erwärmen und Ähnliches. Kraftmessung, Wärmemessung und andere Messungen beziehen sich dabei auf Theorien wie Mechanik, Thermodynamik usw., die bereits vor der Elektrodynamik und unabhängig von ihr formuliert werden. Sie sind für die Elektrodynamik *Vortheorien*. Neben Drähten und Massen werden wir auch Kraftfelder, Wärme usw. zur physikalischen Wirklichkeit zählen. Es sind die Elemente der Wirklichkeit, die mit Hilfe der Vortheorien bereits eingeführt wurden. Wenn wir die Elektrodynamik experimentell und theoretisch entwickeln, gehen wir davon aus, dass die auf den Vortheorien beruhenden Apparaturen und Messgeräte Teile der physikalischen Wirklichkeit sind.

Bauelemente Damit können wir bereits am Beispiel der Elektrodynamik mehrere Bauelemente einer physikalischen Theorie ablesen. Eine *physikalische Theorie* ist ein mathematisch-deduktives Schema, das die folgenden Mindestbestandteile enthält:

1. einen *mathematischen Teil* MT, der aus mathematischen Größen, Definitionen, Gleichungen, Umformungen, Lösungsverfahren usw. besteht,
2. einen Teil der Natur, den man *Grundbereich* GB nennt und von dem angenommen wird, dass er existiert

* Die mit einem Stern gekennzeichneten Kapitel können bei einem ersten Durchgang überschlagen werden.

⁴Die *Naturphilosophie* untersucht die Begriffe, die erforderlich sind um zu verstehen, was die Naturwissenschaften über die Natur aussagen. Sie ist eine auf die Natur bezogene *Ontologie*, also eine Lehre vom Sein.

⁵*Wissenschaftstheorie* (Erkenntnistheorie) gibt eine logische Analyse wissenschaftlicher Theorien und vergleicht Theorien miteinander. Themen sind dabei u.a.: Konzepte der Wirklichkeit, Grenzen der Erkenntnis, physikalische Theorien als Handlungsanweisungen, Wirklichkeit als Konstruktion und vieles mehr.

3. und *Abbildungsprinzipien* AP, die man auch *Korrespondenzregeln* nennt, die den Grundbereich GB und Teile vom mathematischen Teil MT aufeinander beziehen.

Erst dadurch, dass die Abbildungen zu den mathematischen Relationen hinzukommen, entsteht eine physikalische Theorie. Typischerweise können die mathematischen Größen dann auch dimensionsbehaftet sein.

So wird z. B. in der Elektrodynamik der Buchstabe **F** im mathematischen Teil mit dem Wort „Kraft“ bezeichnet und eine Abbildung zu dem hergestellt, was man z. B. mit realen Federwagen messen oder an der Bewegung von Massen ablesen kann. Es werden mit den Abbildungsprinzipien in den Grundbereich nur Abbildungen in den Wirklichkeitsbereich der Vortheorien hergestellt. Die Vortheorie ist in diesem Fall die Mechanik bzw. Thermodynamik. Zur Beschreibung und zur Vorhersage von Experimenten zur Elektrodynamik genügen diese Abbildungen aber völlig. Die Messgrößen entstammen diesem Bereich. Zwar gibt es im mathematischen Teil der Theorie z. B. auch das Symbol **j**, zu dem wir „elektrische Stromdichte“ sagen, es reicht aber für die experimentelle Aussage, dass wir der Theorie entnehmen können, dass ein Draht sich erwärmt. Wir können so Ströme messen. Es ist nicht nötig hierfür vorauszusetzen, dass es elektrische Ströme „in Wirklichkeit“ gibt und sie irgendwie durch Drähte „fließen“. Das Wort Strom dient zunächst dann nur dazu, sich über Teile der Theorie schneller verständigen zu können.

Interpretation Wir verstehen unter der *Interpretation* (interpretation) einer Theorie die Angabe der Abbildungsprinzipien, mit denen Symbole des mathematischen Teils MT der physikalischen Theorie durch Verknüpfung mit Teilen der Wirklichkeit *physikalisch interpretiert* werden. Es werden für einige mathematische Symbole physikalische Referenzen angegeben. In diesem Sinne ist eine physikalische Theorie ein teilweise interpretiertes formales System. Man sollte streng dazwischen unterscheiden, ob zu gleichem MT die Abbildungsprinzipien z. B. andere Feldgleichungen postuliert werden, oder ob in einer *Alternativtheorie* auch der MT geändert und nur auf den Wirklichkeitsbereich der Vortheorie bezieht, wollen wir die *Minimalinterpretation* (minimal interpretation) nennen. Sie umfasst den Minimalbestand an Abbildungsprinzipien, die nötig sind, um für den mathematischen Teil den Anschluss an die Beobachtungsebene zu erreichen. Auf der Grundlage der Minimalinterpretation kann über die empirische Richtigkeit einer physikalischen Theorie entschieden werden. Darüber hinausgehende Elemente einer Interpretation können weder experimentell bestätigt noch widerlegt werden. Es sind viele solcher konsistenten Erweiterungen und damit viele Interpretationen denkbar. Sie sind weder richtig noch falsch. Es sind Fragen der Erklärungskraft und Verstehbarkeit, die dazu widerren können über die Minimalinterpretation hinausgehen. Von erweiterten Interpretationen können wertvolle Impulse für neue Forschungsprogramme ausgehen. Die Suche nach einer Theorie des Quantenmessprozesses ist ein Beispiel (vgl. Kap. 15). Wir machen noch darauf aufmerksam, dass der Begriff Minimalinterpretation in der Literatur unterschiedlich verwendet wird.

2.4.2 Theoretische Terme*

Schon das Beispiel Elektrodynamik zeigt, dass die meisten Physiker über die Minimalinterpretation hinausgehen. Im mathematischen Teil der Elektrodynamik tauchen neben Termen, die eine Abbildung in die Ausschläge von Messgeräten erlauben, weitere Terme wie z. B. das elektrische Feld **E** oder der Strom **j** auf, von denen ebenfalls eine Entsprechung in der Realität angenommen wird. Die hierzu gehörigen zusätzlichen Abbildungsprinzipien wollen wir *hypothetische Abbildungsprinzipien* hAP nennen. Der Bereich in den sie abbilden, heißt *erschlossener Wirklichkeitsbereich* eWB und die entsprechenden Terme der mathematischen Theorie nennt man *theoretische Terme* (vergl. Abb. 2.5). Üblicherweise herrscht Konsens darüber, dass man die hypothetischen Abbildungsprinzipien zur Theorie hinzunimmt und so zugleich die *physikalische Wirklichkeit* über den Grundbereich hinaus erweitert. Wir wollen das mit Blick auf die Quantentheorie die *Standardinterpretation* (standard interpretation) nennen. Auch diese Bezeichnungen werden in der Literatur unterschiedlich verwendet.

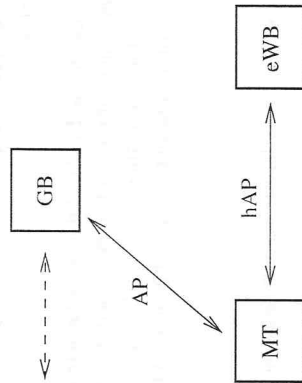


Abbildung 2.5: Die Abbildungsprinzipien AP beziehen den mathematischen Teil MT einer physikalischen Theorie und den Grundbereich GB der physikalischen Wirklichkeit aufeinander. Hypothetische Abbildungsprinzipien hAP verknüpfen mit einem erschlossenen Wirklichkeitsbereich eWB.

Es sollte aber deutlich geworden sein, dass die Festlegung eines erschlossenen Wirklichkeitsbereichs ein Element der Willkür enthält und dass mit ihm die Wirklichkeit zumindest in Teilen theorieabhängig wird. Noch aus einem anderen Grund entsteht die physikalische Welt mit Hilfe der Theorie. *Alternativtheorien*, die die gleichen Erfahrungen in anderer Weise begründen, können in diesem Sinne verschiedene Wirklichkeiten haben. Beispiele dafür sind eine speziell-relativistische Gravitationstheorie in der flachen Raum-Zeit, die mit dem Konzept des Gravitationsfeldes arbeitet und die Allgemeine Relativitätstheorie, in der das Gravitationsfeld völlig eliminiert und die Raum-Zeit gekrümmt ist. Die jeweilige Standardinterpretation beantwortet die Frage nach der Existenz eines Gravitationsfeldes unterschiedlich.

Die Elektrodynamik zeigt allerdings weiterhin, dass auch in der Standardinterpretation keineswegs zu allen Größen der mathematischen Theorie eine Entsprechung in der Wirklichkeit behauptet wird. So wird üblicherweise dem eichabhängigen Vektorpotential an einem Ort keine Realität zugesprochen. Vektorpotentiale werden nur als rechnerische Hilfsmittel aufgefasst. In der Coulomb-Eichung ändert sich das Vektorpotential instantan. Es wird damit aber kein realer Ausbreitungsvorgang mit Überlichtgeschwindigkeit verbunden.

2.5 Interpretationen der Quantentheorie und physikalische Wirklichkeit*

2.5.1 Minimalinterpretation*

Wie fügt sich die Quantentheorie in das im vorigen Kapitel beschriebene Schema ein? Die Minimalinterpretation der Quantentheorie schreibt nur den Präparations-, Transformations- und Messgeräten Realität zu. Es gibt nur deren Wirklichkeit und darüber hinaus keine hypothetischen Abbildungsprinzipien hAP und keine erschlossene Wirklichkeit eWB. Die Abbildung AP erfolgt in die klassisch beschreibbare Realität (z. B. Zeigerausschläge der Messgeräte). Das empirische Wissen in der Quantentheorie kann mit den Elementen der klassischen Physik formuliert werden. Alle anderen Bestandteile des mathematischen Teils MT der Quantentheorie sind nur rechnerische Hilfsmittel. Diese Einstellung lässt sich gut mit der zugespielten Formulierung von Niels Bohr charakterisieren: „*There is no quantum world*“⁶. Elektronen, Atome usw. gibt es nicht. Man wird diese Einstellung wissenschaftstheoretisch als *instrumentalistisch* und *pragmatisch* charakterisieren. Der Vorteil der Beschränkung auf die Minimalinterpretation liegt in der Vermeidung von scheinbaren Paradoxien. Das ist erlaubt um den Preis, dass keine Veranschaulichung und kaum physikalische Intuition angeregt wird.

Die einzige Aufgabe der Quantentheorie in dieser Interpretation ist es, präzise Vorhersagen über mögliche Ergebnisse von Messungen und die Wahrscheinlichkeiten ihres Eintretens zu machen. Weitere Aussagen sind überflüssig und werden nicht gemacht. Objektivität ist garantiert. Nach Abschluss der Messung kann ein Beobachter ein Messergebnis nur ablesen aber nicht mehr beeinflussen. Es ist Teil der klassischen Welt. Die so gewonnenen empirischen Aussagen (z. B. über Zeigerausschläge) lassen sich im Rahmen der klassischen Physik als der zugehörigen Vorthorie beschreiben. Sie können aber nicht im Rahmen der klassischen Physik erklärt, bzw. theoretisch begründet werden. Man braucht dazu den mathematischen Teil MT der Quantentheorie und einige wenige Abbildungsprinzipien. Es gibt in der Literatur keine einheitlichen Festlegungen darüber, was man unter der *Kopenhagener Interpretation* verstehen soll. Die Minimalinterpretation gibt aber sicher charakteristische Züge dieser Interpretation wieder.

2.5.2 Standardinterpretation*

Die unter Physikern allseits akzeptierte Standardinterpretation geht darüber hinaus. Man stellt fest, dass zu einzelnen Quantensystemen Eigenschaften gehören, die abtrennbar sind von Präparation und Registrierung, die also nicht Relationen zwischen dem System und dem Präparations- und Registrationsgeräten beschreiben. Die zugehörigen physikalischen Größen sind elektrische Ladung, Baryonenladung, Masse und Betrag des Spins eines Elementarteil-

chens. Sie heißen auch *klassische Observable*⁷. Da sie sich zum Teil auf die Vorthorien zur Quantentheorie beziehen, ist es sinnvoll, auch diesen Eigenschaften eine objektive Realität zuzusprechen und damit zugleich auch dem zugehörigen Quantensystem. *Quantensysteme haben dann reale Träger in einer erschlossenen Wirklichkeit, die man Quantenobjekte (quantum objects) nennen kann*. Man kann von einzelnen Quantenobjekten wie Atomen, Elektronen usw. sprechen und verbindet damit in der Standardinterpretation folgende Vorstellung: Die makroskopischen Effekte der Messgeräte werden klassisch beschrieben, z. B. in der Form von Zeigerausschlägen. Sie stellen in dieser Interpretation gewissermaßen nur die „Oberfläche“ dar und lassen sich auf die Wirkungen real vorhandener Quantensysteme bzw. Quantenobjekte zurückfahren. *Es gibt eine Quantenwelt*. Es gibt keine physikalische Theorie ohne Interpretation. *Die Postulate spiegeln in ihrer Formulierung in Abschn. 2.1.2 bereits die Abbildungsprinzipien der Standardinterpretation wider*.

Widerum wird aber nicht von allen Termen des mathematischen Teils MT behauptet, dass sie in Elemente der Wirklichkeit abgebildet werden können. *Anders als beim elektrischen Feld gibt es in der Quantentheorie für den durch ein Präparationsverfahren festgelegten Zustandsvektor (bzw. Dichteoperator) keine Entsprechung in der Wirklichkeit*. Er erlaubt nur im Zusammenwirken mit den Messoperatoren, die Berechnung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Er ähnelt damit in seinem Status dem Vektorpotential in der Elektrodynamik. Was sich unter dem Einfluss eines Transformationsapparates deterministisch entwickelt, sind die vorhersagbaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Messresultaten. Der Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ repräsentiert diese Entwicklung.

Auch wenn das im Folgenden nicht immer explizit durchgeführt wird, kann es für das Verständnis nützlich sein sich klar zu machen, ob eine Aussage sich auf die volle Standardinterpretation bezieht oder mit weniger Interpretation auskommt.

Weitere Interpretationen Die Viele-Welten-Interpretation der Quantentheorie ist ein Beispiel für eine alternative Interpretation, die unter Beibehaltung des mathematischen Teils andere Aussagen über die Wirklichkeit macht. Wir werden sie in Abschn. 15.5 kurz besprechen.

2.6 Ergänzende Themen und weiterführende Literatur

- Wissenschaftstheorie: [Sch 64], [Mai 96], [Mit 96], [Bal 70], [Hom 97], [Bub 97], [Mai 96], [Stö 86], [Lal 01], [DG 71], [Esf 02a], [Mut 98].
- Zeno-Effekt: [NPN 97, S. 172], [Hom 97, Kap. 6].
- Hinweise auf Experimente zum Zeno-Effekt: [IHB 90], Literatur zur Diskussion über dieses Experiment und Vorschläge weiterer Experimente in [NPN 97, S. 177].
- Theoretische Terme und Abbildungsprinzipien: [Sch 90], [Sch 88].
- Interpretation der Quantentheorie: [FP 00], [Lud 55], [Lud 89] [Lud 90], [Omn 94], [Lud 96].

⁶ „There is no quantum world. There is only an abstract quantum physical description. It is wrong to think, that the task of physics is to find out how nature is. Physics concerns with what we can say about nature.“ Nach [Pet 63, S. 12].

⁷Die Zustände von Quantenobjekten, die sich in diesen Eigenschaften unterscheiden, können nicht superponiert werden. Linearkombinationen solcher Zustände sind physikalisch nicht realisiert (*Superzustandwählregeln*).

