

**Das Nukleon und sein chiraler Partner
im Vakuum
und in dichter Kernmaterie**

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Susanna Gallas
aus Mannheim

Frankfurt (2010)

(D 30)

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität
als Dissertation angenommen

Dekan: Prof. Dr. Dirk-Hermann Rischke

Gutachter: Prof. Dr. Dirk-Hermann Rischke
Prof. Dr. Jürgen Schaffner-Bielich

Datum der Disputation: 29.10.10

Das Nukleon und sein chiraler Partner im Vakuum und in dichter Kernmaterie

Kernpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung der Eigenschaften des Vakuums und des Grundzustandes von Kernmaterie anhand eines effektiven Modells. Das Lineare Sigma-Modell mit globaler chiraler $U(2)_R \times U(2)_L$ -Symmetrie wurde mit (Axial-)Vektormesonen sowie dem chiralen Partner des Nukleons, der mit der Resonanz $N(1535)$ identifiziert wird, erweitert. Die Einführung des chiralen Partners in der Spiegel-Zuordnung ermöglicht die Untersuchung zweier verschiedener Erzeugungsprozesse der Baryonenmasse: durch spontane Symmetriebrechung sowie durch einen chiral invarianten Massenterm, parametrisiert durch m_0 . Die Parameter des Modells werden durch experimentelle Werte der Zerfallsbreiten von $N^* \rightarrow N\pi$ und $a_1 \rightarrow \pi\gamma$ und der axialen Kopplungskonstante des Nukleons g_A^N , sowie durch Lattice-Berechnungen von $g_A^{N^*}$ fixiert. Im Rahmen dieses Modells ergibt sich für den Massenparameter $m_0 \sim 500$ MeV, was darauf hin deutet, dass ein beträchtlicher Anteil der Baryonenmasse nicht durch das chirale Kondensat erzeugt wird. Das Modell wird anhand des Zerfalls $N^* \rightarrow N\eta$ sowie s -Wellen- πN -Streulängen $a_0^{(\pm)}$ validiert und zeigt gute Übereinstimmung mit dem Experiment. In Kernmaterie wird m_0 durch Kondensate anderer skalarer Felder ausgedrückt, z. B. dem Tetraquark-Kondensat. Der Einfluß dieses Kondensates auf dichte Materie wird untersucht. Die Nukleonenmassen hängen stark von den Kondensaten ab und verschwinden, so wie auch die Kondensate selbst, wenn die chirale Symmetrie wieder hergestellt ist.

The nucleon and its chiral partner in the vacuum and in dense nuclear matter

The main issue of this work is the investigation of the properties of the vacuum and the ground state of nuclear matter with an effective model. The linear sigma model with global chiral $U(2)_R \times U(2)_L$ symmetry is extended by (axial-)vector mesons as well as the chiral partner of the nucleon, which is identified with the resonance $N(1535)$. The chiral partner is incorporated in the so-called mirror assignment, where the nucleon mass is not solely generated by the chiral condensate but also by a chirally invariant mass term, m_0 . The parameters of the model are fixed by using experimental data for the decays $N^* \rightarrow N\pi$ and $a_1 \rightarrow \pi\gamma$ and the axial coupling constant of the nucleon g_A^N , as well as lattice results for $g_A^{N^*}$. One infers that in this model $m_0 \sim 500$ MeV, i.e., an appreciable amount of the nucleon mass originates from sources other than the chiral condensate. The model is tested by evaluating the decay $N^* \rightarrow N\eta$ and the s -wave nucleon-pion scattering lengths $a_0^{(\pm)}$ and is in good agreement with the experimental values.

In nuclear matter m_0 is proportional to condensates from other scalar fields, e.g. the tetraquark condensate. The influence of this condensate on nuclear matter is investigated. The masses of the nucleons depend crucially on the condensates and vanish together with them when the chiral symmetry is restored.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Quantenchromodynamik	5
2.1	Die QCD erhält ihren Namen und ein Phasendiagramm	5
2.1.1	Symmetrien	8
2.1.2	Lagrangedichte der QCD	9
2.2	Die chirale Symmetrie	9
2.2.1	Spontane Brechung der Chiralen Symmetrie	12
2.2.2	Ein Beispiel zum Verständnis: Mesonenspektrum	13
2.2.3	Spontane Symmetriebrechung: ein einfaches Modell	15
2.2.4	Das chirale Kondensat	17
2.3	Effektive Theorien der QCD	18
2.3.1	Das Lineare σ -Modell nach Gell-Mann und Lévy	18
3	Die Lagrangedichte der Mesonen	21
3.1	Die Lagrangedichte	21
3.1.1	Spontane Symmetriebrechung im mesonischen Sektor	22
3.1.2	Z	26
4	Die Lagrangedichte der Baryonen	29
4.1	Naiv versus Spiegel	30
4.2	Die Lagrangedichte für Nukleonen im Spiegel-Assignment	32
4.2.1	Auswirkung der spontanen Symmetriebrechung im mesonischen Sektor auf den baryonischen Sektor	32
4.2.2	Mischung der Felder: ein einfaches Beispiel	33
4.2.3	Mischung der Felder Ψ_1 und Ψ_2	35
4.2.4	Lagrangedichte \mathcal{L}_{bar} mit physikalischen Feldern	36
4.2.5	Spezialfälle für die Lagrangedichte \mathcal{L}_{bar}	38

4.2.6	Zusammenfassung: Die Lagrangedichte im Spiegelmodell	40
4.3	Die Lagrangedichte für Nukleonen im naiven Assignment	41
5	Pion-Nukleon-Streuung	45
5.1	Kinematik und Amplituden der 2-Teilchen-Streuung	45
5.2	Streuamplituden der Pion-Nukleon-Streuung	48
5.2.1	Lagrangedichte	48
5.2.2	Matrixelement und Amplituden	49
5.2.3	Ergebnisse: die Amplituden	58
5.3	Experimentelle Bestimmung von Pion-Nukleon-Streulängen	59
5.3.1	Pionische Atome: Erzeugung und Termschema	61
5.3.2	Berechnung der Streulängen aus dem Experiment	64
5.4	Ergebnisse: die Streulängen a_0^\pm im global symmetrischen Linearen-Sigma Modell mit chiralem Partner des Nukleons und Vektormesonen	66
6	Zerfall der Nukleonenresonanz	69
6.1	Zerfall $N^* \rightarrow NP$ (I)	69
6.2	Zerfall $N^* \rightarrow NP$ (II)	73
6.3	Ergebnisse: die Zerfallsbreiten im global symmetrischen Linearen Sigma-Modell mit chiralem Partner des Nukleons und Vektormesonen	74
7	Die axialen Kopplungskonstanten	77
7.1	Ermittlung der axialen Kopplungskonstanten	77
7.1.1	Im Spiegelmodell	77
7.1.2	Im naiven Assignment	80
8	Ergebnisse im Vakuum - Modell mit globaler Symmetrie	81
8.1	Parameteroptimierung	81
8.2	Die Parameter im Vakuum	83
8.3	$N(1535)$ als chiraler Partner des Nukleons $N(939)$	86
8.4	$N(1650)$ als chiraler Partner von $N(939)$	89
8.5	$N(1200)$: ein spekulativer Partner	90
8.6	Grenzfälle	91

8.6.1	Lokale Symmetrie	91
8.6.2	Entkopplung der Vektormesonen	93
8.6.3	Ohne Partner	94
8.7	Über den Ursprung von m_0	95
8.8	Ergebnisse im naiven Modell	97
9	Kernmaterie bei endlicher Dichte	107
9.1	Thermodynamische Größen	108
9.1.1	Kalte Materie endlicher Dichte: Limes $\beta \rightarrow \infty$	111
9.2	Erweitertes Lineares Sigma Modell in Mean-field-Näherung	112
9.2.1	Bestimmung thermodynamischer Größen	114
9.3	Ergebnisse bei endlicher Dichte	116
9.3.1	Die Gleichungen für die Mesonenfelder	116
9.3.2	Die Parameter des Modells	117
9.3.3	Resultate	119
10	Zusammenfassung	123
A	Anhang A: Details zu den Berechnungen	I
A.1	Zusammenhänge zwischen den Mandelstam-Variablen, den Impulsen und den Massen	I
A.2	Berechnung des Pion-Rho-Vertex	I
B	Anhang B: Weinberg-Tomozawa-Term	V
C	Anhang C: Einige Ausblicke zu dem πN-Zerfall	VII
C.1	Eine Möglichkeit, den πN -Zerfall im naiven Assignment <i>ohne</i> Vektormesonen zu generieren	VII
C.2	Eine Möglichkeit, die Zerfälle $N(1535) \rightarrow \pi N$ und $N(1650) \rightarrow \pi N$ simultan zu beschreiben	VIII
	Literaturverzeichnis	XI

1. Einleitung



Abbildung 1.1: *Spontane Symmetriebrechung: Um nicht zu verhungern, muss der Kater Pieps eine der beiden Mäuse wählen. In diesem Moment wird er die Symmetrie brechen.*

Noch immer umgibt den Anfang alles Seins ein Geheimnis. Die Urknall-Theorie ist heute in der Wissenschaft allgemein anerkannt, weil man mit ihrer Hilfe viele kosmologische Phänomene beschreiben und erklären kann. Danach beginnt die Existenz von Raum und Zeit mit einem „heißen Urknall“, dem Big-Bang. Zu diesem Zeitpunkt war das Universum unvorstellbar klein (10^{-33} cm), extrem heiß (10^{32} K) und sehr dicht (10^{94} g/cm³). Dieses Stadium dauerte nur rund 10^{-44} s. Nach der Entstehung von Leptonen und den Trägerpartikeln der vier Wechselwirkungen entstand nach kurzer Zeit auch ein Zustand stark wechselwirkender Materie, genannt Quark-Gluon-Plasma, vermutlich wenige milliardstel Sekunden nach dem Urknall. Das Universum expandierte weiter, wobei sich durch die dadurch absinkende Temperatur ein Phasenübergang vollzog und die Quarks und Gluonen zu Hadronen kondensierten. Heutzutage herrschen Bedingungen für ein Quark-Gluon-Plasma in der Natur unter Umständen nur noch in kompakten Sternen, wie z.B. Neutronensternen. Im Labor kann man es durch den Zusammenprall hochenergetischer Kerne erzeugen (etwa am LHC oder SPS des CERN in Genf, im RHIC in den USA oder in der neuen Anlage FAIR an der GSI in Darmstadt).

Wie heute bekannt ist, wechselwirken Quarks und Gluonen miteinander gemäß den Gesetzen der Quantenchromodynamik. Diese Theorie beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen Nukleonen, sieht diese jedoch nicht als elementare, sondern vielmehr als aus Quarks und Gluonen zusammengesetzte Teilchen. Will man Hadronen als effektive Freiheitsgrade beschreiben, so hat es unterhalb von $E < 1$ GeV keinen Sinn mehr, die QCD zu verwenden. Stattdessen benutzt man ihre Symmetrien, um eine Theorie im nicht-störungstheoretischen Bereich zu konstruieren. Die modernsten Werkzeuge zum Studium nicht-störungstheoretischer Phänomene sind die effektiven Theorien. Diese Theorien sollten eine Reihe sogenannter niederenergetischer Theoreme erfüllen [1, 2, 3]. Unter Vernachlässigung der Quark-Massen weist die Lagrange-Dichte eine zusätzliche Symmetrie auf: die chirale Symmetrie, $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, eine äusserst wichtige Symmetrie in der niederenergetischen QCD. Wäre diese Symmetrie in der Natur realisiert, würde man erwarten, dass alle Hadronen in Multipletts mit entgegengesetzter Parität, aber gleicher Masse, auftreten. Die Tatsache, dass diese Zustände nicht beobachtet werden, zeigt, dass die chirale

Symmetrie spontan zu $SU(N_f)_V$ gebrochen ist, das bedeutet, das Vakuum ist nur symmetrisch unter $SU(N_f)_V$ -Transformationen. Die Brechung wird hervorgerufen durch den nicht-verschwindenden Wert des Quark-Kondensats. An dieser Stelle findet das äußerst bedeutende Goldstone-Theorem Anwendung, das besagt, dass aufgrund der gebrochenen Symmetrie Nambu-Goldstone-Bosonen auftreten, die drei pseudoskalaren Pionen mit Spin 0 im Fall von zwei Quark-Flavours, $N_f = 2$, bzw. das Oktett der pseudoskalaren Mesonen bei gebrochener $SU(3)$ -Symmetrie. Diese Beobachtung geht auf Yōichirō Nambu zurück [4]. Zusammen mit Makoto Kobayashi und Toshihide Masukawa wurde ihm am 7. Oktober 2008 für seine Arbeiten zur Symmetriebrechung der Nobelpreis für Physik zuerkannt.

Wäre die Masse des Nukleons gerade die Summe der Masse seiner Bestandteile, der drei Quarks, dann würde es nur wenige MeV wiegen. Tatsächlich aber ist es mit ≈ 1 GeV weitaus schwerer. Folglich erhalten die Quarks in den Hadronen durch die spontane Symmetriebrechung plötzlich Konstituentenmassen von etwa 300 MeV. Das bedeutet, dass 98% der Nukleonenmasse, und somit der Masse der sichtbaren Materie im Universum, durch spontane Symmetriebrechung generiert wird. Man erwartet, dass bei hohen Temperaturen und Dichten die chirale Symmetrie wieder hergestellt ist, das Quark-Kondensat verschwindet.

Es treten dann, unter anderem, folgende Fragen auf:

Was ist der Ursprung der Teilchenmasse?

Sind Nukleonen in dem Bereich, in dem chirale Symmetrie wieder hergestellt ist, masselos, oder können sie trotz verschwindendem Quark-Kondensat massiv sein?

Hier kommen DeTar und Kunihiro [5] ins Spiel. Sie griffen in den 1980er Jahren eine Idee von Lee [6] auf, der in sein Modell einen Paritätspartner des Nukleons einbaute, jedoch diesen Einfall dann wieder verwarf. DeTar und Kunihiro dagegen zeigten, dass mit Einführung des chiralen Partners des Nukleons mit einer speziellen Transformation unter chiraler Symmetrie (genannt Spiegel-Zuordnung) es möglich ist, einen chiral invarianten Massenterm für Nukleonen zu konstruieren. Dadurch bewahren sich die Nukleonen einen Teil ihrer Masse auch in dem Bereich, in dem keine spontane Symmetriebrechung mehr existiert.

Man erwartet, dass in der Natur dieser Zustand bei sehr hohen Temperaturen ab ca. $T \approx 170$ MeV oder hohen Baryondichten (bzw. hohem baryo-chemischen Potential μ) auftritt. Wie sich der chirale Phasenübergang bei hohen Temperaturen und verschwindenden Dichten vollzieht, ist mittlerweile sehr gut untersucht. Dagegen versagen die Simulationen der Gittereichtheorie, bei der die QCD auf einem Raumzeit-Gitter simuliert wird, sobald sie auf Bereiche mit $\mu \neq 0$ angewendet wird. Hat das Verhältnis von baryo-chemischen Potential und Temperatur einen Wert kleiner gleich eins, $\frac{\mu}{T} \lesssim 1$, ist es möglich zu extrapolieren, ansonsten ist man auf Näherungsmethoden angewiesen. Doch erwartet man auch bei hoher Dichte, dass die Quarks, anstatt der Nukleonen, die dominierenden Freiheitsgrade sind, es liegt die sogenannte *Quarkmaterie* vor. Allerdings ist die Dichte, bei der dieser Zustand vorliegt, so hoch, dass ein Teelöffel Materie 10^{12} Tonnen wiegen würde [7].

Die verschiedenen Theorien zum Ursprung der Masse der Materie sind noch nicht experi-

mentell belegt. Diesem Rätsel will man z.B. in dem CBM (Compressed baryonic matter)-Experiment durch die Erzeugung dichter Kernmaterie auf die Spur kommen [8]. Man erwartet eine Änderung der Hadronenmasse in verdichteter Materie und hofft, so Rückschlüsse auf das Zustandekommen der Masse der Materie ziehen zu können.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Quantenchromodynamik eingeführt, ihre wichtigste Symmetrie, die chirale Symmetrie, und wie deren Brechung zur Generierung der Masse beiträgt. Die folgenden zwei Kapitel stellen das Modell vor: ein Lineares Sigma Modell mit globaler Symmetrie, erweitert mit (Axial-)Vektormesonen und dem chiralen Partner des Nukleons. Kapitel 3 stellt die Lagrangedichte der Mesonen vor. Es werden die Skalare und die Pseudoskalare eingeführt, sowie die Vektormesonen und die Axialvektormesonen, wobei letztere einen wichtigen Bestandteil des Modells darstellen. Kapitel 4 befasst sich mit den Nukleonen. Der Paritätspartner des Nukleons wird eingeführt mit den beiden Möglichkeiten der Transformation unter chiraler Symmetrie, die *naive* und die *Spiegel-Zuordnung*, sowie ihre Konsequenzen diskutiert. Daran anschließend folgt in Kapitel 5 die Berechnung der Pion-Nukleon Streulängen auf Baumgraphenniveau, anhand derer die Gültigkeit der Modelle getestet wird. Es wird auch gezeigt, wie die Streulängen im Experiment gemessen werden. Zur experimentellen Bestimmung der Streulängen benutzt man pionische Atome, bestehend aus einem negativ geladenen Pion in der Hülle und einem Proton im Kern. Bei pionischen Atomen befindet sich das Pion sehr nahe am Atomkern, aufgrund der großen Masse des Pions gegenüber dem Elektron. Da Mesonen der starken Wechselwirkung unterliegen, wechselwirken sie mit dem Kern nicht nur elektromagnetisch, sondern auch stark. Somit lassen sich also mit exotischen Atomen die Parameter der starken Wechselwirkung hervorragend untersuchen. Nach der Berechnung der Zerfallsbreiten der Prozesse $N^* \rightarrow N\pi$ und $N^* \rightarrow N\eta$ in Kapitel 6, sowie der axialen Kopplungskonstanten in Kapitel 7 erfolgt in Kapitel 8 eine Zusammenfassung der Ergebnisse in der *Spiegel-Zuordnung*. In jedem Kapitel wird zusätzlich gezeigt, wie sich die physikalischen Größen verhalten würden, 1. läge eine lokale Symmetrie vor, 2. gäbe es keinen Paritätspartner und 3. gäbe es keine (Axial-)Vektormesonen. Desweiteren werden die Ergebnisse der *naiven Zuordnung* diskutiert. Kapitel 9 zeigt die Anwendung des Spiegel-Modells auf den Bereich hoher Dichten und gibt einen Überblick der hier gewonnenen Resultate. Die Arbeit schließt in Kapitel 10 mit der Zusammenfassung und einem Ausblick auf mögliche Erweiterungen des Modells. Der Anhang gibt eine Übersicht über die Details der Berechnungen. Desweiteren wird kurz der sogenannte *Weinberg-Tomozawa-Term* diskutiert, der unverzichtbar wäre, wenn keine (Axial-)Vektormesonen vorhanden wären, z.B. für die korrekte Beschreibung der axialen Kopplungskonstanten. Zu guter Letzt werden zwei weitere interessante Möglichkeiten, die den πN -Zerfall betreffen, diskutiert.

2. Die Quantenchromodynamik

2.1 Die QCD erhält ihren Namen und ein Phasendiagramm

Die Quantenchromodynamik QCD (*gr. chromos = Farbe*) ist die fundamentale, nicht-abelsche (Yang-Mills) Theorie [9] zur Beschreibung der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen, den Bausteinen unserer Kerne. Die Quantenzahl „Farbe“, von der heute bekannt ist, dass sie die Ladung der starken Wechselwirkung ist, wurde ursprünglich vorgeschlagen [10], um Ungereimtheiten in der Hadronenspektroskopie und Widersprüche zum Pauli-Prinzip zu beheben. Das bekannteste Beispiel an dieser Stelle ist die Wellenfunktion des Δ^{++} mit $S_z = 3/2$:

$$|\Delta^{++}\rangle = |l=0\rangle |uuu\rangle | \uparrow\uparrow\uparrow\rangle.$$

Da die Quarks sich im Grundzustand befinden und so der relative Bahndrehimpuls null ist, ist die Ortswellenfunktion symmetrisch. Wegen $S_z = 3/2$ müssen die Spins der drei Quarks parallel stehen, zudem besitzen alle denselben Flavour, wie man an uuu trivial erkennt, die Spin- und die Flavourwellenfunktion sind somit ebenfalls symmetrisch unter der Permutation zweier Quarks. Die Gesamtwellenfunktion ist daher symmetrisch und verletzt das Pauli-Prinzip für identische Fermionen. Der Ausweg bestand in der Einführung einer weiteren Quantenzahl, der Farbe. Jedes Quark eines Flavours kommt in drei unterschiedlichen Farben vor - R, B, G (Antiquarks tragen die entsprechenden Antifarben $\bar{R}, \bar{B}, \bar{G}$). Es ist nun möglich, die vorgenannte Gesamtwellenfunktion mit einer total antisymmetrischen Farb-Wellenfunktion zu ergänzen:

$$\begin{aligned} |\Psi_{Farbe}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{6}} [u(R)u(G)u(B) + u(B)u(R)u(G) + u(G)u(B)u(R) \\ & - u(R)u(B)u(G) - u(G)u(R)u(B) - u(B)u(G)u(R)] \end{aligned}$$

Die Gesamtwellenfunktion ist somit, wie vom Pauli-Prinzip verlangt, total antisymmetrisch unter dem Austausch von zwei Quarks. Die Quarks trugen fortan also zusätzlich zu ihrer elektrischen Ladung, $q = -1/3$ und $q = 2/3$, und ihrem Flavour (up, down, strange, charme, top, bottom) auch eine Farbe (rot R , blau B oder grün G). Die dazugehörige Theorie nennt sich Quantenchromodynamik. Hadronen lassen sich entsprechend ihrer Baryonenzahl B , eine wichtige Quantenzahl in der Elementarteilchenphysik, einteilen in:

- Mesonen, $\bar{q}q$, mit $B = 0$, gebunden aus einem Quark und einem Antiquark (oder mehreren Quark-Antiquark-Paaren), die jeweils Farbe und die entsprechende Antifarbe tragen, sowie
- Baryonen, qqq , mit $B = 1$ gebunden aus drei Quarks¹ mit jeweils unterschiedlicher Farbe.

¹Jedes Quark hat entsprechend $B = 1/3$.

Da alle physikalischen hadronischen Zustände farblos sind, sagt man, dass die QCD invariant unter Farb- bzw. $SU(3)_c$ -Transformationen ($c \equiv \text{color}$) ist: der physikalische Zustand bleibt immer „weiß“. Aus der Existenz dieser lokalen Farb-Eichsymmetrie folgt sogleich, dass es acht Eichbosonen geben muss, die mit den Quarks wechselwirken und somit die starke Wechselwirkung vermitteln, analog zu den Photonen, die die elektromagnetische Wechselwirkung in der Quantenelektrodynamik QED vermitteln. Diese Eichbosonen der QCD, genannt Gluonen, sind farbbehaftet und koppeln somit sowohl an die Farbladung der Quarks, wie auch aneinander (daher eine nicht-abelsche Theorie). Dies steht im Gegensatz zur QED, in der die Eichbosonen, die Photonen, keine elektrische Ladung tragen und nicht untereinander wechselwirken (somit ist die QED eine abelsche Theorie). Die Stärke der Kopplung der Gluonen an die Quarks oder an andere Gluonen ist gegeben durch die Kopplungskonstante g_S , wobei der Index S für „stark“ bzw. „strong“ steht. Analog zur Feinstrukturkonstante α der Quantenelektrodynamik definiert man in der Quantenchromodynamik folgende Konstante, die die Stärke der Quark-Antiquark-Wechselwirkung gibt:

$$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}. \quad (2.1)$$

Die Kopplungskonstante ist genau genommen keine echte Konstante, sondern eine sogenannte „laufende Kopplungskonstante“, da sie ihren Wert in den verschiedenen Energiebereichen drastisch ändert, wie im Folgenden erörtert wird. Während die Quarks und Gluonen die Farben rot, blau oder grün tragen, kommen physikalische Zustände in der Natur nur farblos vor. Farbbehaftete Teilchen können nicht isoliert werden. Diese Begebenheit wirft sofort die Frage auf, was in dem Bereich kleiner Energien bzw. großer Abstände zwischen den Quarks geschieht. In diesem Bereich ist die Kopplungskonstante so groß, dass die Quarks nur in gebundenen, farblosen Zuständen (den Hadronen) vorkommen können. Sie sind beschränkt auf die Größe des Hadrons, in dem sie gefangen sind. Diese Eigenschaft ist als Confinement bekannt [11]. Wie nachfolgend ersichtlich werden wird, bedient man sich mathematisch in diesem Energiebereich der effektiven Theorien, da die QCD selbst hier unlösbar ist. Sie ist nur dort anwendbar, wo die Kopplungskonstante einen kleinen Wert hat und die Quarks und die Gluonen die Freiheitsgrade sind, bekannt als asymptotische Freiheit [12, 13]. Sie ist eine einzigartige Eigenschaft der nicht-abelschen Eichtheorie. Dieser hochenergetische Bereich (bzw. Bereich kleiner Abstände) ist folglich der, in dem die Wechselwirkung zwischen Quarks und die Gluonen so gering ist, dass sie sich nahezu wie freie Teilchen bewegen. Je kleiner die typische Längenskala wird, bzw. je größer die typische Energieskala, desto kleiner wird der Wert der starken Kopplungskonstante der QCD. Bei hoher Temperatur und hoher Dichte ist deshalb ein Quark-Gluon-Plasma (QGP) zu erwarten.

Diese unterschiedlichen Zustände (hadronische Materie, Quark-Gluon-Plasma, sowie ein weiterer Zustand, genannt Farbsupraleitung) können anhand des QCD-Phasendiagramms (Temperatur T vs. chemisches Potential μ), Abb. 2.1, das an dieser Stelle nur kurz erläutert werden soll, veranschaulicht werden. Der Grundzustand der Kernmaterie liegt bei $T \approx 0$ und $\mu \approx 308 \text{ MeV}$. An diesem Punkt beginnt eine Kurve, die den Phasenübergang 1. Ordnung zwischen gasförmiger und flüssiger Kernmaterie darstellt. Sie endet bei $T \approx 170$

MeV in einem kritischen Punkt, an dem ein Übergang 2. Ordnung stattfindet, danach ist zwischen den beiden Zuständen keine Unterscheidung mehr möglich, bzw. es wird kein Phasenübergang beobachtet. Ein weiterer Phasenübergang vollzieht sich bei höheren Temperaturen und höherem baryo-chemischen Potential und endet in einem kritischen Punkt bei $T \approx 170$ MeV und $\mu \approx 240$ MeV ². Bei niedrigen Temperaturen und sehr hohem chemischen Potential gelangt man schließlich in den Bereich der Farbsupraleitung, in dem sich die Quarks zu Cooper-Paaren verbinden, analog zu den Elektronen-Cooper-Paaren im Festkörper bei tiefen Temperaturen. Es wird angenommen, dass das QGP im frühen Universum gebildet wurde und noch ca. 10^{-35} - 10^{-12} s nach dem Big Bang existierte, bevor nach 0.01 ms die Hadronisierung begann, also die Bindung der Quarks und Gluonen zu Protonen und Neutronen. Heute vermutet man die Existenz von QGP in der Natur nur noch in kompakten stellaren Objekten, wie Neutronensternen, die Dichten von 3-10-fachem der normalen Kernmaterie besitzen. Im Labor kann man das Quark-Gluon-Plasma bei Schwerionenkollisionen mit ultrarelativistischen Energien erzeugen ³. Da die Existenz eines Quark-Gluon-Plasmas unmittelbar nach dem Urknall angenommen wird, stellt seine Erforschung eine direkte Verbindung zwischen der Kernphysik und der Kosmologie dar.

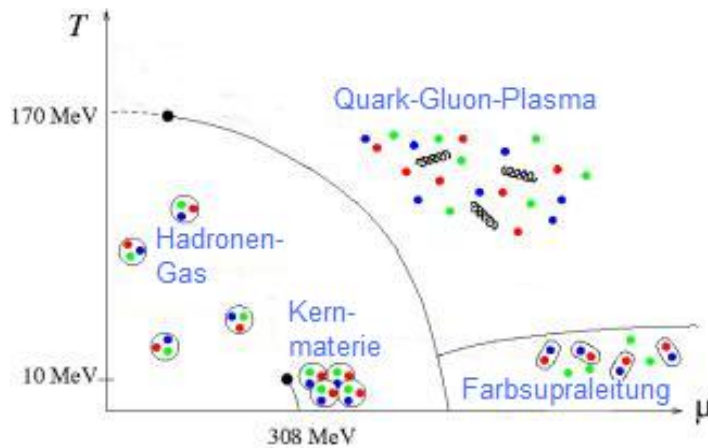


Abbildung 2.1: Das Phasendiagramm der QCD. Aufgetragen ist die Temperatur T der Materie gegen ihr baryo-chemisches Potential μ , welches ein Maß für ihre Dichte ist. Kernmaterie liegt im Bereich niedriger Dichten und $T = 0$, bei ansteigender Temperatur geht sie vom flüssigen in den gasförmigen Zustand über. Bei niedrigen Temperaturen und hohen Dichten liegt der Bereich der Farbsupraleitung, die heutzutage in Neutronensternen vermutet wird. Im Bereich hoher Temperaturen und hoher Dichten befindet sich das Quark-Gluon-Plasma, die erste Phase nach dem Urknall. Das frühe Universum, unmittelbar nach dem Urknall, ist bei sehr hohen Temperaturen und sehr kleinen Dichten angesiedelt.

²Dieser kritische Punkt ist stark abhängig von den angenommenen Quarkmassen und somit heute noch nicht endgültig definiert.

³z. B. RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) am BNL (Brookhaven National Laboratory) oder LHC (Large Hadron Collider) des CERN, sowie die Anlage FAIR an der GSI in Darmstadt, mit denen das Quark-Gluon-Plasma detailliert untersucht wird.

2.1.1 Symmetrien

In der Physik spricht man dann von einer Symmetrie, wenn nach einer Transformation alle Größen erhalten bleiben. Als Beispiel betrachtet man Dirac-Lagrangedichte L_D für ein freies Fermion (Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen):

$$L_D = \bar{q}_c (i\gamma_\mu \partial^\mu - \hat{m}) q_c . \quad (2.2)$$

Hierbei sind die γ_μ die Dirac-Matrizen und \hat{m} ist die Massenmatrix der Quarks. Die q_c stellen die $4N_c$ -dimensionalen Spinoren der Quarkfelder dar, wobei $N_c = 3$ die Anzahl der Farben ist:

$$q_c = \begin{pmatrix} q_{rot} \\ q_{blau} \\ q_{grün} \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

Da die starke Wechselwirkung unabhängig vom Flavour ist, genügt es nur eine Flavour-Sorte zu betrachten. Die 12 Komponenten des Spinors (4 (Dirac-) \times 3 (Farb-)Komponenten) entsprechen den Möglichkeiten Teilchen/Antiteilchen, Spin up/Spin down und den 3 Farben rot, blau und grün.

Die Lagrangedichte L_D ist nun invariant unter der Transformation: $q \rightarrow Uq = e^{i\alpha^a \lambda^a/2} q$, wobei die α^a die Parameter der Symmetrie sind und $\lambda^a/2$ ihre Generatoren. Man kann jedoch an dieser Lagrangedichte sofort erkennen, dass sie aufgrund der Viererdivergenz nur dann invariant ist, wenn die Parameter der Transformation, α^a , unabhängig von Ort oder Zeit sind. Damit ergibt sich eine wichtige Unterscheidung: ist der Parameter α nur eine Zahl und damit die Operation auf das System überall im Raum und zu allen Zeiten die gleiche, so nennt sich die Transformation (und die dazugehörige Symmetrie) *global*. Lässt man aber zu, dass der Parameter der Transformation, die das System invariant lässt, vom Ort und/oder der Zeit abhängt, liegt *lokale* Symmetrie vor. Im Fall globaler Symmetrien gilt das äußerst bedeutende *Noether-Theorem*, das besagt, dass aus der Invarianz unter globalen Transformationen die Existenz eines erhaltenen Stromes folgt. Dieser sogenannte Noether-Strom berechnet sich aus:

$$J_\mu^a(x) = -\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu q)} \frac{\delta q}{\delta \alpha^a} . \quad (2.4)$$

Diesem erhaltenen Strom ist eine erhaltene Ladung zugeordnet, die aus der räumlichen Integration über die Nullkomponente des Stromes folgt:

$$Q^a = \int d^3x J_0^a . \quad (2.5)$$

In dem Beispiel der Dirac-Lagrangedichte, Gl. (2.2) ist der erhaltene Strom gerade: $J^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \lambda^a q$ und die erhaltene Ladung $Q^a = \int d^3x \bar{q}\gamma^0 \lambda^a q$, was genau der Erhaltung der Baryonenzahl entspricht. Die zu dieser Transformation zugehörige Symmetriegruppe ist die $SU(3)_c$ -Gruppe.

2.1.2 Lagrangedichte der QCD

Die QCD beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen Quarks (Fermionen) und den Austauschbosonen, den Gluonen. Die Lagrangedichte für freie Fermionen ist genau die Dirac-Lagrangedichte Gl. (2.2), nun müssen noch die Gluonen eingebaut werden. Auf welche Weise dies geschieht, ergibt sich aus der Forderung, dass die Lagrangedichte der QCD lokal invariant sein soll unter $SU(N_f)_c$ -Eichtransformationen für N_c Farben (hier: $N_c = 3$):

$$q \rightarrow e^{i\alpha^a(x)\frac{\lambda^a}{2}} q, \quad (2.6)$$

wobei $\alpha^a(x)$ die Parameter sowie $\frac{\lambda^a}{2}$ die Generatoren der lokalen $SU(3)_c$ -Symmetrie sind, mit den acht Gell-Mann-Matrizen λ^a , a besitzt die Werte $1, \dots, N_c^2$. Die Lagrangedichte ist also invariant unter der Farb-Transformation, gleichgültig an welchem Ort und zu welcher Zeit. Die lokale $SU(3)_c$ -Symmetrie liegt zusätzlich zur Poincare-Symmetrie und dem CPT-Theorem vor, die in der Natur ohnehin immer erfüllt sind. Die Lagrangedichte (2.2) wird lokal symmetrisch, wenn man die Viererableitung durch die $SU(3)_c$ kovariante Ableitung ersetzt:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)A_\mu^a(x). \quad (2.7)$$

Die Felder A_μ^a sind genau die acht Gluonenfelder, g_s ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Dies ist das Eichprinzip in der QCD. Nun müssen noch die Eichfelder wie folgt transformiert werden:

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s}(\partial_\mu U)U^\dagger, \quad (2.8)$$

um die Eichinvarianz der Lagrangedichte zu garantieren, wobei $A_\mu = \frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a$. Diese ergibt sich nun zu:

$$L_{QCD} = \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m})q - \frac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \quad (2.9)$$

wobei der letzte Term zusätzlich die Dynamik der Gluonenfelder berücksichtigt. Hierbei ist:

$$F^{a,\mu\nu} = \partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu} + g_s f^{abc}A^{b,\mu}A^{c,\nu} \quad (2.10)$$

der Feldstärketensor der Gluonen, in dem im letzten Term auch die Wechselwirkung der Gluonen untereinander berücksichtigt ist. An diesem Term erkennt man auch sofort den nicht-abelschen Charakter der Theorie.

2.2 Die chirale Symmetrie

Im Falle einer verschwindenden Massenmatrix für die Quarks, $\hat{m} = 0$, bleibt die Lagrangedichte der QCD unter globalen $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Transformationen der Fermionenfelder erhalten. Dies soll hier für den 2-Flavour-Fall, $N_f = 2$, d.h. für die beiden leichtesten Quarkflavours *up* und *down*, untersucht werden [14].

Zu diesem Zweck zerlegt man die 4-komponentigen Spinoren mit Hilfe der Chiralitätsprojektoren P_L und P_R in links- und rechtshändige 4-komponentige Spinoren q_L und q_R :

$$q \equiv q_R + q_L \quad q_{R,L} \equiv P_{R,L}q \quad P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad (2.11)$$

dabei ist γ_5 das Produkt der Dirac-Matrizen. In chiraler Darstellung:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}. \quad (2.12)$$

Die beiden Komponenten eines masselosen Fermions können nun unabhängig voneinander transformiert werden:

$$q_{R,L} \rightarrow U_{R,L} q_{R,L}. \quad (2.13)$$

U_R und U_L sind zwei unabhängige, im Flavour-Raum wirkende Matrizen,

$$U_{R,L} = e^{i\boldsymbol{\alpha}_{R,L} \cdot \mathbf{T}} \in U(N_f)_{R,L} \quad (2.14)$$

$\boldsymbol{\alpha}_{R,L}$ sind die Parameter und \mathbf{T} die N_f^2 Generatoren von $U(N_f)_{R,L}$. Die Invarianz der Lagrangedichte L_{QCD} unter den Transformationen (2.14) ist, unter Ausnutzung der Eigenschaften der chiralen Projektoren $P_{R,L}$, $P_R P_L = P_L P_R = 0$, $P_{R,L} \gamma^\mu = \gamma^\mu P_{L,R}$, leicht nachzuprüfen.

Nähme man jedoch eine nichtverschwindende Masse an, $m \neq 0$, so bräche der Massenterm der Form:

$$\widehat{m} \bar{q} q = \widehat{m} (\bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R) \quad (2.15)$$

die Symmetrie explizit, da er unter der Transformation (2.13) nicht invariant ist.

Die chirale Gruppe $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ ist isomorph zu $U(N_f)_V \times U(N_f)_A$ der unitären Vektor- und Axialtransformationen. Es gilt: $V = R + L$ und $A = L - R$. Jede unitäre Gruppe ist ein direktes Produkt einer speziellen unitären Gruppe und einer Phasentransformation: $U(N_f) \cong SU(N_f) \times U(1)$. Somit hat man im Falle der chiralen Symmetrie: $U(N_f)_R \times U(N_f)_L \cong SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$. Unter einer $U(1)_V$ -Transformation $q \rightarrow e^{i\alpha} q$ ist die Lagrangedichte der QCD invariant und die erhaltene Ladung, wie schon im Beispiel der Dirac-Lagrangedichte, die Baryonenzahl:

$$B = \frac{1}{3} \int d^3x q^\dagger q, \quad (2.16)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\bar{q} \gamma^0 = q^\dagger$. Der Faktor $\frac{1}{3}$ berücksichtigt die Normierung auf das einzelne Quark. Da die $U(1)_V$ -Symmetrie niemals gebrochen ist, konzentriert man sich auf die verbleibende $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_A$ -Symmetrie. Die $U(1)_A$ -Symmetrie, mit $q \rightarrow e^{i\alpha \gamma_5} q$, ist in der QCD explizit durch Quantenfluktuationen gebrochen (die sog. $U(1)_A$ -Anomalie der QCD).

Nun wird das Symmetrieverhalten unter Vektortransformationen Λ_V und axialen Transformationen Λ_A untersucht, wobei [15]:

$$\Lambda_V : q \rightarrow e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}} q \simeq (1 + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}) q \quad (2.17)$$

$$\Lambda_A : q \rightarrow e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T} \gamma_5} q \simeq (1 + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T} \gamma_5) q. \quad (2.18)$$

Im Falle der ersten Transformation, Λ_V , bleibt die Lagrangedichte invariant und die zugehörige Viererstromdichte erhalten⁴ :

$$V^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu T^a q, \quad (2.19)$$

$$\partial_\mu V^{\mu,a} = (\partial_\mu \bar{q})\gamma^\mu T^a q + \bar{q}\gamma^\mu T^a (\partial_\mu q) = 0. \quad (2.20)$$

Konsequenz der globalen $SU(N_f)_V$ -Flavoursymmetrie der QCD ist die Erhaltung der vektoriellen Viererstromdichte V^μ . Der Vektorstrom bleibt auch dann erhalten, wenn der Massenterm in der Lagrangedichte ungleich Null ist. Man kann sich schon von vornherein überlegen, dass diese Symmetrie nur dann exakt gültig ist, wenn die Quarkmassen gleich sind. Diese Transformation wirkt auf die einzelnen Quarkflavours, so dass die Unterschiede zwischen den Quarks, soweit es die starke Wechselwirkung betrifft, nur in der Verschiedenheit ihrer Masse liegt. Da die Massen der u- und d-Quarks $m_{u,d} \sim 5$ MeV, kann angenommen werden, dass $m_u \approx m_d$ ist, so dass diese Symmetrie als erfüllt angesehen werden kann. Dies ist die bekannte $SU(2)_V$ -Isospin-Symmetrie, mit $N_f = 2$. Nimmt man $m_u \simeq m_d \simeq m_s$ an, handelt es sich um die $SU(3)_f$ -Flavour-Symmetrie. Diese ist aufgrund der größeren Masse des s-Quarks weniger gut erfüllt.

Im Falle von zwei Quark-Flavours, $N_f = 2$, sind die Generatoren der $SU(2)$ -Gruppe genau $\frac{1}{2}$ der drei Pauli-Matrizen: $T^a = \frac{1}{2}\tau^a$. Bei Erweiterung auf $N_f = 3$ Quarkflavours sind die Pauli-Matrizen durch die acht Gell-Mann-Matrizen λ_a zu ersetzen.

Wird nun die axiale Transformation, Λ_A , auf die Lagrangedichte angewendet, so erhält man:

$$L_{QCD} \xrightarrow{\Lambda_A} L_{QCD} + 2i\hat{m}\bar{q}\gamma^5 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T} q. \quad (2.21)$$

Die Lagrangedichte ist daher *nicht* invariant unter der axialen Transformation, wenn der Lagrangedichte ein Massenterm hinzugefügt wird. Man kann nachprüfen, dass die axiale Viererstromdichte der Fermionen:

$$A^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma^5 T^a q \quad (2.22)$$

tatsächlich nur im Falle verschwindender Fermionenmassen erhalten ist:

$$\partial_\mu A^\mu = 2gi\hat{m}\bar{q}\gamma^5 T^a q. \quad (2.23)$$

Somit ist die axiale Symmetrie durch den Massenterm der Fermionen explizit gebrochen. Alle anderen Terme, auch die Wechselwirkungsterme in L_{QCD} , erfüllen sämtliche hier genannten Symmetrien, auch die axiale. Da nun aber die Massen der u- und d-Quarks $m_{u,d} \sim 5$ MeV als vernachlässigbar klein angesehen werden können, kann angenommen werden, dass auch die axiale Symmetrie annähernd (partially) erfüllt ist. Dies ist die Basis der PCAC (partial conservation of axial currents), die im nächsten Abschnitt 2.2.1 erläutert werden wird. Die Quarkmassen als vernachlässigbar klein anzusehen, hat nur bei den zwei leichtesten Quarks, dem u- und dem d-Quark, Sinn, in weniger guter Näherung

⁴Hier wurden im letzten Schritt die Dirac-Gleichung für Fermionen und ihr hermitesch Konjugiertes ausgenutzt: $-i(\partial_\mu \bar{q})\gamma^\mu = \hat{m}\bar{q}$ bzw. $i\gamma^\mu \partial_\mu q = \hat{m}q$.

kann man auch das s-Quark als masselos betrachten. Für die anderen drei schweren Quarks ergeben diese Näherungen jedoch keinen Sinn mehr.

Die Vektor- und Axialvektorströme lassen sich auch als Kombination der links- und rechtshändigen Ströme der chiralen Symmetrie schreiben:

$$V_a^\mu(x) = J_{R,a}^\mu + J_{L,a}^\mu = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} q(x) , \quad (2.24)$$

$$A_a^\mu(x) = J_{R,a}^\mu - J_{L,a}^\mu = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_a}{2} q(x) , \quad (2.25)$$

wobei

$$J_{R,a}^\mu = \bar{q}_R(x)\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} q_R(x) , \quad (2.26)$$

$$J_{L,a}^\mu = \bar{q}_L(x)\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} q_L(x) \quad (2.27)$$

die rechts- und linkshändigen Ströme darstellen.

Ist eine Symmetrie exakt, sind auch die entsprechenden Ladungen erhalten. Die Vektor- und Axialvektorladung sind:

$$Q_V^a = \int d^3x V_a^0(x) = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{\tau_a}{2} q(x) , \quad (2.28)$$

$$Q_A^a = \int d^3x A_a^0(x) = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{\tau_a}{2} \gamma^5 q(x) . \quad (2.29)$$

2.2.1 Spontane Brechung der Chiralen Symmetrie

Im vorhergehenden Abschnitt 2.2 wurde erörtert, dass die chirale Symmetrie explizit durch das Auftreten von nichtverschwindenden Quarkmassen gebrochen ist. Doch auch im chiralen Limes, $m_q \rightarrow 0$, ist, bei niedrigen Energien, die chirale Symmetrie gebrochen und zwar spontan. Eine Symmetrie ist immer dann spontan gebrochen, wenn die Lagrangedichte zwar die Symmetrie erfüllt, nicht aber der Grundzustand der betreffenden Theorie. Von Bedeutung ist daher auch, unter welcher Gruppe der QCD-Vakuumzustand invariant ist. Ist der Grundzustand symmetrisch, liegt die Wigner-Weyl-Realisierung eines trivialen Vakuums vor: es gibt nur ein Vakuum und das ist invariant unter allen Symmetrietransformationen. Die axiale Symmetrie ist nicht spontan gebrochen. Eine Invarianz unter chiralen Transformationen generiert Multipletts mit Teilchen entgegengesetzter Parität: für jedes Teilchen mit positiver Parität gibt es einen Zustand gleicher Masse und Quantenzahlen, aber mit negativer Parität. Man nennt sie Paritätspartner. Diese kommen in der Natur jedoch nicht vor. Zwischen Teilchen, die, bis auf die Parität, gleiche Quantenzahlen besitzen, herrscht immer ein mehr oder weniger großer Massenunterschied. Das Hadronenspektrum spiegelt also nicht die axiale Symmetrie wieder. Dennoch ist der schwache Zerfall des Pions in Einklang mit dem (näherungsweise) erhaltenen axialen Strom (PCAC). Die Schlussfolgerung ist, dass die axiale Symmetrie *spontan* gebrochen ist. Die chirale Symmetrie ist mithin spontan zur Isospin-Gruppe gebrochen: $SU(2)_R \times SU(2)_L \rightarrow SU(2)_V$. Es liegt kein Wigner-Weyl-Modus vor, sondern der sogenannte Nambu-Goldstone-Modus

der chiralen Symmetrie. In diesem Modus ist das Vakuum nicht trivial, sondern entartet und ein Vakuumszustand geht durch eine Symmetrietransformation in einen anderen über. Ein wichtiges Theorem findet an diesem Punkt Anwendung: das *Goldstone-Theorem*. Es besagt, dass immer, wenn eine Symmetrie spontan gebrochen ist, masselose Teilchen erscheinen und ihre Zahl der Anzahl der Generatoren entspricht, die das Vakuum nicht invariant lassen. Ist die $SU(2)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen, treten drei Goldstonebosonen auf, entsprechend den drei Generatoren der $SU(2)$ -Gruppe. Diese Goldstonebosonen sind Pseudoskalare (aufgrund der γ_5 -Matrix in der axialen Transformation) und können mit den drei Pionen identifiziert werden. Pionen sind in der starken Wechselwirkung bei niedriger Energie von zentraler Bedeutung. Ganz einwandfrei ist diese Assoziation aber nur, wenn die Pionen masselos sind. Da die Symmetrie auch explizit durch $m_q \neq 0$ gebrochen ist, nennt man die Pionen Quasi-Goldstone-Bosonen. Da die Masse der Quarks aber sehr klein ist, ist die $SU(2)_R \times SU(2)_L$ -Symmetrie zwar nicht ganz, aber doch annähernd exakt. Diese nahezu exakte Symmetrie (approximate symmetry) spiegelt sich in der kleinen Masse der Goldstone-Bosonen wieder ($m_\pi \approx 140$ MeV). Bezeichnet man mit $|\pi_i\rangle$ die Zustandsvektoren der Pionen, so sind diese mit dem Vakuum durch die nicht verschwindenden Übergangsmatrixelemente des axialen Stromes verbunden:

$$\langle 0 | A_j^\mu(x) | \pi_i(p) \rangle = i f_\pi p^\mu \delta_{ij} e^{-ipx} . \quad (2.30)$$

Dieses Matrixelement beschreibt genau den schwachen Zerfall des Pions $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, die Zerfallskonstante ist $f_\pi = (92.42 \pm 0.26)$ MeV [16], ausgewertet am chiralen Limes, $m_\pi = 0$. Die Divergenz des axialen Stromes berechnet sich damit zu:

$$\langle 0 | \partial_\mu A_j^\mu(x) | \pi_i(p) \rangle = f_\pi p^2 \delta_{ij} e^{-ipx} = f_\pi m_\pi^2 \delta_{ij} e^{-ipx} . \quad (2.31)$$

Wird nun die Beziehung für das Pion: $\langle 0 | \pi_j(x) | \pi_i(p) \rangle = \delta_{ij} e^{-ipx}$ zu Hilfe genommen, erhält man einen Zusammenhang zwischen dem axialen Strom und dem Pionfeld. Diese fundamentale Beziehung nennt man PCAC (partial conservation of axial currents):

$$\partial_\mu A_j^\mu(x) = f_\pi m_\pi^2 \pi_j(x) . \quad (2.32)$$

Eine Folge der PCAC ist die *Goldberger-Treiman-Relation*. Sie stellt eine direkte Verbindung zwischen dem Nukleon-Pion-Vertex $g_{\pi NN}$ und einer weiteren wichtigen nukleonischen Größe, der axialen Kopplungskonstante g_A , her:

$$g_{\pi NN} f_\pi = g_A m_N , \quad (2.33)$$

mit $g_A = 1.267 \pm 0.004$ [16].

Zur weiteren Verdeutlichung wird im Folgenden wiederum mathematisch dargelegt, dass im Mesonenspektrum keine Paritätspartner auftreten. Danach wird die spontane Symmetriebrechung anhand eines einfachen skalaren Modells erklärt.

2.2.2 Ein Beispiel zum Verständnis: Mesonenspektrum

Mesonen lassen sich, entsprechend ihren Quantenzahlen, aus Quarkfeldern zusammensetzen und teilen sich, je nach ihrer Struktur, ein in:

- Isosingletts:

Skalare (0^{++}): $\bar{q}q$, z.B. das σ -Meson.

Pseudoskalare (0^{-+}): $i\bar{q}\gamma_5 q$, z.B. das Eta-Meson η .

Vektorteilchen (1^{--}): $\bar{q}\gamma_\mu q$, z.B. das Omega-Meson ω_μ .

Axial-Vektorteilchen (1^{++}): $\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q$, z.B. das Meson $f_{1,\mu}$.

- Isotriplets:

Skalare (0^{++}): $\bar{q}\boldsymbol{\tau}q$, z.B. das \mathbf{a}_0 -Meson.

Pseudoskalare (0^{-+}): $i\bar{q}\gamma_5\boldsymbol{\tau}q$, z.B. das Pion $\boldsymbol{\pi}$.

Vektorteilchen (1^{--}): $\bar{q}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}q$, z.B. das ρ -Meson.

Axial-Vektorteilchen (1^{++}): $\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\boldsymbol{\tau}q$, z.B. das $\mathbf{a}_{1,\mu}$.

In Klammern stehen der Gesamtdrehimpuls J , die Parität P und die Ladung C in der Form J^{PC} .

Wird nun die Vektortransformation $\Lambda_V : q \rightarrow e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}}q \simeq (1 + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T})q$ auf die einzelnen Quarkfelder der Mesonen angewendet, erhält man bis auf einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}^2)$:

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \sigma, \\ \eta &\rightarrow \eta, \\ \omega_\mu &\rightarrow \omega_\mu, \\ f_{1,\mu} &\rightarrow f_{1,\mu},\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &\rightarrow \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}_0, \\ \boldsymbol{\pi} &\rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}, \\ \boldsymbol{\rho} &\rightarrow \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{a}_{1,\mu} &\rightarrow \mathbf{a}_{1,\mu} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}_{1,\mu},\end{aligned}$$

woran deutlich erkennbar ist, dass diese Transformation nichts anderes als eine Drehung im Isospinraum ist. Die Isosingletts haben Isospin $I = 0$ und ändern sich nicht unter der Transformation. Bei den anderen Mesonen, die Isospin besitzen, $I = 1$, wird die Richtung des Isospins um $\boldsymbol{\alpha}$ gedreht. Der Vierervektorstrom bleibt erhalten.

Wird jedoch die axiale Transformation $\Lambda_A : q \rightarrow e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}\gamma_5}q \simeq (1 + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}\gamma_5)q$ angewendet, erhält man bis auf einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}^2)$:

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \sigma + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi}, \\ \eta &\rightarrow \eta + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_0, \\ \omega_\mu &\rightarrow \omega_\mu, \\ f_{1,\mu} &\rightarrow f_{1,\mu},\end{aligned}$$

und auch:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &\rightarrow \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha}\eta, \\ \boldsymbol{\pi} &\rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\alpha}\sigma, \\ \boldsymbol{\rho} &\rightarrow \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}_{1,\mu}, \\ \mathbf{a}_{1,\mu} &\rightarrow \mathbf{a}_{1,\mu} - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho}.\end{aligned}$$

Es ist offenbar, dass jedes Teilchen in das Teilchen mit entgegengesetzter Parität rotiert wird, außer den beiden Isosingletts ω_μ und $f_{1,\mu}$, die aufgrund ihrer Matrixstruktur komplett invariant unter chiralen Transformationen sind. Wenn die Quarkmassen verschwinden, ist auch die axiale Symmetrie erfüllt. Aus diesem Grunde kann gefolgert werden, dass eine axiale Transformation ein Meson in seinen chiralen Partner überführt, der entgegengesetzte Parität, aber gleiche Masse haben muss. Dieser Umstand ist jedoch in der Natur nicht erfüllt: das ρ -Meson hat die Masse $m_\rho = 775.5 \text{ MeV}$, sein chiraler Partner, das $\mathbf{a}_{1,\mu}$ -Meson, hat dagegen die Masse $m_a = 1230 \text{ MeV}$. Dieser Massenunterschied ist zu groß, als daß man ihn auf den kleinen Massenunterschied zwischen den Stromquarks zurückführen kann. Die axiale Symmetrie ist spontan gebrochen.

2.2.3 Spontane Symmetriebrechung: ein einfaches Modell

Spontane Symmetriebrechung ist dadurch gekennzeichnet, dass der Grundzustand (das Vakuum) eines Systems nicht mehr die volle Symmetrie der zugrunde liegenden Lagrangedichte besitzt. Bekannt aus der Festkörperphysik ist das Beispiel des Ferromagneten: oberhalb einer bestimmten Temperatur, genannt Curie-Temperatur T_c , findet keine Magnetisierung statt. Ist die Temperatur jedoch kleiner als T_c , stellt sich eine Spontanmagnetisierung ein, bei der die magnetischen Momente alle in eine bestimmte Richtung zeigen. Es existieren nun beliebig viele gleichwertige Vakua, die durch Rotationen alle ineinander übergehen können, da die Ausrichtung der Spins unterhalb von T_c in jede beliebige Richtung erfolgen kann. Da das System offensichtlich einen dieser Vakuumzustände wählt, ist die Symmetrie spontan gebrochen. Charakteristisch für spontane Symmetriebrechung ist die Existenz eines Ordnungsparameters, der in ebendiesem gewählten Vakuum einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Er verschwindet wieder im Zustand wiederhergestellter Symmetrie. Im Falle des Ferromagneten ist dieser Ordnungsparameter genau die Magnetisierung.

Analog funktioniert dieser Prozess in der Teilchenphysik, wie an folgender Lagrangedichte veranschaulicht werden soll, wobei ϕ ein N -komponentiger Vektor ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad \mathcal{V} = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 . \quad (2.34)$$

Der Fall $N = 1$ unterscheidet sich beträchtlich von den Fällen $N \geq 2$. Im Folgenden wird zuerst der Fall $N = 1$ betrachtet. Die spontane Symmetriebrechung erfolgt nun durch die Wahl des Potentials \mathcal{V} . Wird das Potential minimiert, so hat die entsprechende Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0 \quad (2.35)$$

die Lösungen:

$$\phi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{0\pm} = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} . \quad (2.36)$$

Es ist offenkundig, dass man je nach dem Vorzeichen von μ^2 zwei Fälle unterscheiden kann, siehe Abb. 2.3:

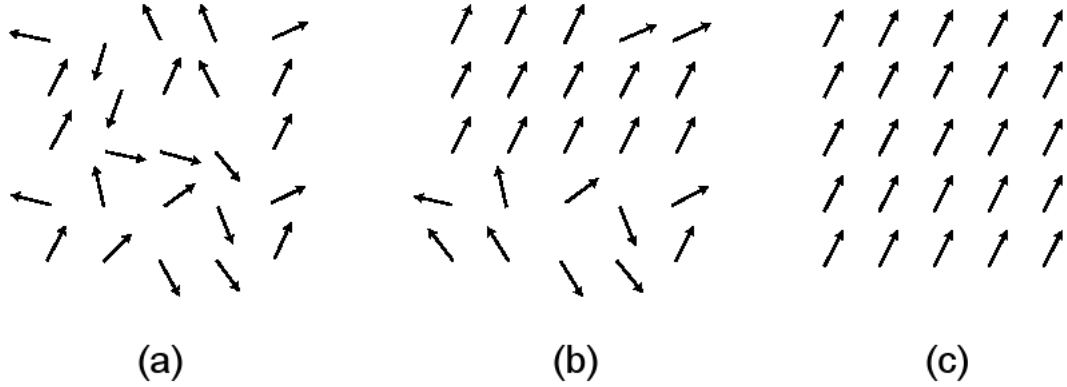


Abbildung 2.2: Darstellung der Magnetisierung bei einem Ferromagneten: (a) die Temperatur liegt noch oberhalb der Curie-Temperatur und die Magnetisierungs-Pfeile deuten in alle beliebigen Richtungen, so dass die Netto-Magnetisierung Null ist, (b) die Temperatur liegt nahe der Curie-Temperatur, die Magnetisierungs-Pfeile beginnen sich in eine Richtung auszurichten, (c) die Temperatur liegt unterhalb der Curie-Temperatur, alle Pfeile zeigen in dieselbe Richtung, somit ist die Symmetrie gebrochen. Der Ferromagnet ist magnetisiert, die Magnetisierung ist der Ordnungsparameter.

1. $\mu^2 > 0$: In diesem Fall hat das Potential ein einziges Minimum bei $\phi_0 = 0$. Der Grundzustand ist symmetrisch (Wigner-Weyl-Realisierung des Grundzustandes).
2. $\mu^2 < 0$: Das Potential hat ein Maximum bei $\phi_0 = 0$ und zwei Minima bei $\pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$, die gleichwertig sind. Wählt man nun eines dieser Minima, ist die Reflexions-Symmetrie $\phi \rightarrow -\phi$ spontan gebrochen (Nambu-Goldstone-Realisierung des Grundzustandes).

Im Falle $N \geq 2$ tritt eine unendliche Anzahl an Vakua auf. Das Potential, minimiert bei $\phi^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$, hat nun die Form eines mexikanischen Hutes (mexican-hat-potential), Abb. 2.4. Im Gegensatz zur diskreten Spiegelsymmetrie, wie es für $N = 1$ der Fall ist, liegt nun eine kontinuierliche $O(2)$ -Symmetrie vor. Sei ϕ in Richtung 1: $\phi_1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \nu$ und in Richtung 2: $\phi_2 = 0$. Betrachtet man die Fluktuationen um diese Feldkonfigurationen, $\phi_1 = \phi'_1 + \nu$ und $\phi_2 = \phi'_2$, so sind erstere mit einem massebehafteten Teilchen zu assoziieren, zweite-re mit einem masselosen Teilchen. Das massebehaftete Teilchen hat in diesem Modell die Masse $\sqrt{2}\mu$ und einen Erwartungswert im Vakuum (Vakuumserwartungswert v.e.v.) von ν . Es entspricht der Fluktuation entlang der radialen Richtung des Hutes, benötigt also Energie. Das masselose Teilchen (Goldstone-Boson) dagegen bewegt sich in dem energetisch günstigsten Zustand, der Hutkrempe, die dem Kreis der Vakua entspricht, ohne jeglichen Energieverbrauch. Nachdem es mit einer beliebig kleinen Energie angestoßen wurde, kreist es ewig weiter. Im Falle $N_f = 2$ entspricht dieses Teilchen genau den masselosen Pionen. Dadurch ist die Drehsymmetrie des Systems gebrochen und zwar spontan, da keines der Vakua bevorzugt ist.

Soll die chirale Symmetrie nun noch explizit gebrochen werden, so kippt man den Hut,

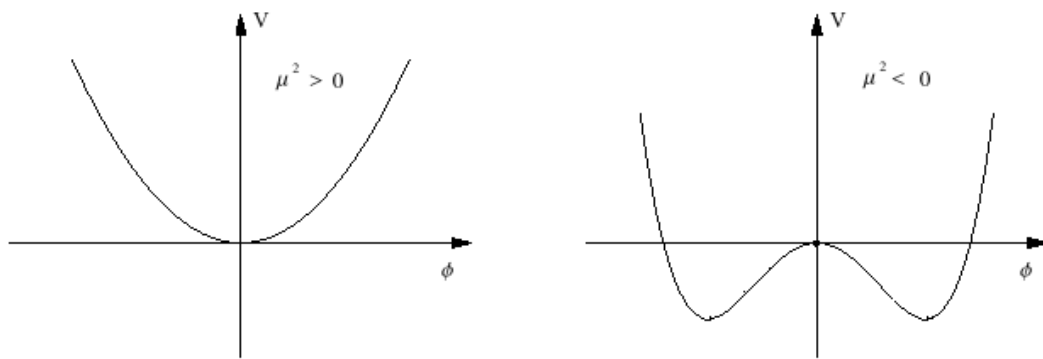


Abbildung 2.3: Form des Potential je nach Vorzeichen von μ^2 . Links: Wigner-Weyl-Modus. Rechts: Nambu-Goldstone-Modus.

Abb. 2.4. Das vorher masselose Teilchen muss jetzt mit einer Mindestenergie angestoßen werden, um in der Hutmarge zu kreisen. Für die Pionen bedeutet dies, dass sie nun eine Masse haben. Das absolute Minimum des Potentials, in die das Teilchen rollt, definiert die realen Pionen. Dieser Kippwinkel ist in der Natur jedoch sehr klein, und somit auch die Masse der Pionen im Vergleich zur hadronischen Skala von 1 GeV.

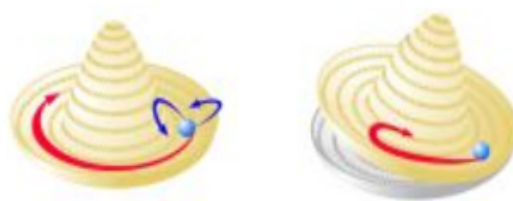


Abbildung 2.4: Mexican-hat-potential für den Fall $N \geq 2$. Links: Rollet das Teilchen entlang der Hutmarge (roter Pfeil), geschieht dies ohne Energiebedarf. Dies entspricht den masselosen π -Mesonen. Eine Bewegung in radialer Richtung (blauer Pfeil) dagegen benötigt Energie. Dies entspricht dem σ -Meson. Rechts: Wird der Hut gekippt, rollt das zuvor masselose Teilchen in die eine Position niedrigster Energie und bricht die chirale Symmetrie explizit. Abbildung aus <http://www.weltderphysik.de/de/363.php>.

2.2.4 Das chirale Kondensat

Die exakte Definition des chiralen Kondensates, dem Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie, lautet:

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -i \text{Tr} \lim_{y \rightarrow x^+} S_F(x, y), \quad (2.37)$$

wobei $S_F(x, y)$ der volle Quark-Propagator ist. Das Quark-Kondensat besteht aus fest gebundenen Quark-Antiquark Paaren $\bar{q}q$, die im Vakuum entstehen. Dies passiert aufgrund der Tatsache, dass die starke Kraft tatsächlich so stark ist, dass das Vakuum instabil gegenüber Bildung von $\bar{q}q$ -Paaren ist. Das Vakuum sei gegeben durch den Ket $|0\rangle$, dann muss es ein Kondensat geben, da $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \neq 0$. Das Kondensat hat den Wert $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -(250 \text{ MeV})^3$ und steht für die Anzahl der Quark-Antiquark-Paare pro Volumeneinheit. Es folgt somit eine Umordnung des Vakuums, das jetzt mit Quark-Antiquark-Paaren besetzt ist. Das Kondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ ist damit auch ein Maß für die Stärke der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie: wird $\langle \bar{q}q \rangle \rightarrow 0$, so ist die Symmetrie nicht mehr gebrochen. Das Phasendiagramm der QCD basiert auf der Abhängigkeit des chiralen Kondensats von Temperatur und Dichte. Die Kurven im Phasendiagramm trennen genau die Regionen, in denen das chirale Kondensat unterschiedliche Werte hat. So hat es im Bereich der hadronischen Materie einen endlichen Wert, verschwindet allerdings im Bereich, in dem das Quark-Gluon-Plasma auftritt. Der Übergang von hadronischer Materie zu Quark-Gluon-Plasma wird auch chiraler Phasenübergang genannt, da die chirale Symmetrie wieder hergestellt wird.

2.3 Effektive Theorien der QCD

Für den niederenergetischen Bereich liefert die QCD keine analytische Lösung. Bei Prozessen mit großem Impulsübertrag ist die laufende Kopplungskonstante klein, so dass störungstheoretische Rechnungen angewendet werden können und die Gluonen und die Quarks die relevanten Freiheitsgrade sind. Dieser Bereich entspricht im Phasendiagramm, Abb. 2.1, dem Bereich mit hoher Temperatur und/oder hohem chemischen Potential.

Bei kleiner werdenden Impulsüberträgen wird die Kopplung jedoch stärker und der störungstheoretische Ansatz versagt. Die Quarks und Gluonen verbinden sich zu farblosen Hadronen. Aufgrund des Confinements der Quarks hat es keinen Sinn, bei Energien unterhalb von 1 GeV störungstheoretische QCD für die Wechselwirkung leichter Quarks zu verwenden. Für diesen Fall müssen effektive Theorien entwickelt werden, die die Eigenschaften der QCD, wie z.B. chirale Symmetrie und deren spontane und explizite Brechung, mitberücksichtigen. Diese Theorien beziehen sich auf effektive Freiheitsgrade, d.h. Hadronen anstelle von Quarks. Die komplizierte innere Struktur der Hadronen bleibt unbedeutend und wird nicht weiter berücksichtigt. Es sind mehrere Methoden vorhanden. Einerseits kann man sich der QCD auf dem Gitter bedienen (lattice QCD). Sie legt den Übergang von hadronischer Materie zum QGP bei $T \approx 170 \text{ MeV}$ fest. Allerdings bekommt man hier schnell numerische Probleme, verwendet man realistische (also kleine) Quarkmassen, und

muß daher auf unphysikalisch große Quarkmassen zurückgreifen. Zum anderen muß im Bereich kleiner Dichte und hoher Temperatur gerechnet werden. Wird die Dichte größer, sind die Resultate unbrauchbar, aufgrund zu starker Fluktuationen von den erhaltenen Mittelwerten der Ergebnisse, bekannt als das *fermion sign problem* [17]. Außer Gitterrechnungen können andererseits chirale, hadronische effektive Modelle benutzt werden, in denen alle Zustände Farbsingulets sind. Diese Modelle weisen die $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Symmetrie der QCD auf. Ein häufig verwendetes effektives Modell ist das *Lineare Sigma-Modell*, das im Jahr 1960 von Gell-Mann und Lévy vorgeschlagen wurde, um die Wechselwirkung von Pionen bei niedrigen Energien zu beschreiben.

2.3.1 Das Lineare σ -Modell nach Gell-Mann und Lévy

In diesem Abschnitt wird in groben Zügen das von Gell-Mann und Lévy vorgeschlagene Lineare Sigma-Modell [18] beschrieben, desweiteren wird die chirale Symmetrie und ihre spontane Brechung anhand dieses Modells erläutert. Im Linearen Sigma-Modell wechselwirken masselose Nukleonen über eine Yukawa-Kopplung mit dem skalaren σ und dem pseudoskalaren, isovektoriellen Feld $\boldsymbol{\pi}$. Die Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{LSM}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \\ & + \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g \bar{\Psi} (\sigma + i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi , \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei σ das skalare Isosinglett ist, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ das Isotriplett der Pionen, die Nukleonen Ψ bilden ein Isodublett. Das Modell ist invariant unter chiralen Transformationen, also Transformationen der Art (2.17) und (2.18). Ein Massenterm für die Nukleonen, Gl. (2.15), würde die Symmetrie explizit brechen. Wird diese Lagrangedichte mit der Lagrangedichte aus Abschnitt 2.2.3 verglichen, kann man sofort das vierkomponentige Feld $\boldsymbol{\phi}$ ($N = 4$) mit dem Sigma-Meson und den Pionen identifizieren: $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$. Man wählt nun eine Richtung für den Vakuumerwartungswert v.e.v. von ϕ : $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \sigma_0$ und $\langle 0 | \boldsymbol{\pi} | 0 \rangle = 0$.

Der Vakuumerwartungswert des Sigma-Mesons besitzt dieselben Quantenzahlen wie das Vakuum und bricht dessen Symmetrien nicht. Ein v.e.v des Pions $\boldsymbol{\pi}$ dagegen würde die Isospin-Symmetrie des Vakuums verletzen.

Betrachtet man nun die Fluktuationen um den v.e.v., verschiebt also die Mesonenfelder um ihren v.e.v. $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ in der Lagrangedichte Gl. (2.38), wird im nukleonischen Teil ein Term generiert, der die Form eines Massenterms für die Nukleonen hat und die axiale Symmetrie bricht:

$$\mathcal{L}_{mass} = g \sigma_0 \bar{\Psi} \Psi = m_N \bar{\Psi} \Psi . \quad (2.39)$$

Mittels spontaner Symmetriebrechung im mesonischen Sektor wurde somit die endliche Masse der Nukleonen erzeugt.

Durch zweimaliges Ableiten des Potentials nach den Mesonen-Feldern ergeben sich für

deren Massen:

$$m_\sigma^2 = \frac{d^2 V}{d\sigma^2}|_{v.e.v.} = 2\mu^2, \quad m_\pi^2 = \frac{d^2 V}{d\pi^2}|_{v.e.v.} = 0, \quad (2.40)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

Die Masse der Goldstone Bosonen wird durch explizite Symmetriebrechung erzeugt. Dafür schreibt man „von Hand“ einen explizit symmetriebrechenden Term in die Lagrangedichte (2.38):

$$\mathcal{L}_{SB} = \mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{S}\mathcal{M}} + \epsilon\sigma. \quad (2.41)$$

Hierbei steht \mathcal{L}_{SB} für die Lagrangedichte, deren chirale Symmetrie durch den Term $\epsilon\sigma$ explizit gebrochen ist. Damit die Goldberger-Treiman-Relation weiterhin erfüllt ist, muss das Minimum des Potentials bei $\sigma_0 = f_\pi$ liegen⁵. Nach kurzer Rechnung ergibt sich für den v.e.v. des Sigma-Mesons:

$$\sigma_0'^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \left(1 + \frac{\epsilon}{\mu^2 \sigma_0}\right), \quad (2.42)$$

bzw., nach Anwendung der Bernoulli-Formel $(1+x)^n \simeq (1+nx)$:

$$\sigma_0' = f_\pi + \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}. \quad (2.43)$$

Die Masse des Pions bekommt auf diese Weise einen endlichen Wert:

$$m_\pi^2 = \frac{d^2 V}{d\pi^2}|_{v.e.v.} = \frac{\epsilon}{\sigma_0} = \frac{\epsilon}{f_\pi} \neq 0. \quad (2.44)$$

Zurückkommend zu dem oben erwähnten Bild des mexikanischen Hutes entspricht dieser Zustand genau den Pionen, die in die gekippte Seite der Hutkrempe gerollt sind und sich ohne Energieaufwand von dort nicht mehr entfernen können. Es besteht nun ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den Parametern der QCD, wie der Quarkmassen $m_{u,d}$ und dem chiralen Kondensat, und den experimentell gemessenen Größen, wie der Masse des Pions m_π und seiner Zerfallskonstante f_π . Es kann angenommen werden, dass der Vakuumserwartungswert des explizit symmetriebrechenden Massenterms der QCD, $-m\bar{\Psi}\Psi$, und der des explizit symmetriebrechenden Terms des Linearen Sigma-Modells, $\epsilon\sigma$, gleich sind:

$$\langle 0 | -m\bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle = \langle 0 | \epsilon\sigma | 0 \rangle, \quad (2.45)$$

mit $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sigma_0 = f_\pi$ und $\epsilon = m_\pi^2 f_\pi$, ergibt sich die *Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation (GOR)*:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = \frac{m_u + m_d}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle. \quad (2.46)$$

Die GOR ist nicht exakt, sondern beinhaltet Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(m_q^2)$. Da die Quarkmassen aber sehr klein sind, können quadratische Korrekturen außer acht gelassen werden. Es gibt aber durchaus Modelle (z.B. die allgemeine chirale Störungstheorie), in

⁵Dies gilt nur für den Fall, dass das masselose Fermion tatsächlich ein Nukleon ist.

denen die Quarkmassen nicht klein sind und somit diese Korrekturen nicht vernachlässigbar sind und sogar dominant sein können.

Desweiteren kann auch die Wirkung der expliziten Symmetriebrechung auf die Nukleonenmasse überprüft werden. Anhand von Gl. (2.39) sieht man sofort, dass:

$$m_N = g\sigma'_0 = g \left(f_\pi + \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2} \right) = g f_\pi + g \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}. \quad (2.47)$$

Der letzte Term $g \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}$ parametrisiert genau den Beitrag der expliziten Symmetriebrechung zur Nukleonenmasse m_N , d.h. genau den Anteil, der von den Quarks stammt. Im Rahmen des Linearen Sigma-Modells wird er üblicherweise als *Pion-Nukleon Sigma-Term* $\Sigma_{N\pi}$ bezeichnet. Die Nukleonenmasse lässt sich also schreiben als:

$$m_N = m_{cond} + \Sigma_{N\pi}, \quad (2.48)$$

wobei m_{cond} der Anteil der Masse ist, der durch nicht verschwindende skalare Kondensate (z.B. das chirale Kondensat, das bei spontaner Symmetriebrechung auftaucht) entsteht. Unter Verwendung der Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation, Gl. (2.46), kann man den Pion-Nukleon Sigma-Term direkt mit den Quarkmassen in Verbindung bringen:

$$\Sigma_{N\pi} = \frac{\langle N | m_q (\bar{u}u + \bar{d}d) | N \rangle}{2m_N} = m_q \frac{\partial m_N}{\partial m_q}. \quad (2.49)$$

Offensichtlich verschwindet der Pion-Nukleon Sigma-Term bei verschwindenden Quarkmassen, d.h., wenn keine explizite Brechung der chiralen Symmetrie stattfindet.

Im Folgenden wird ein Lineares Sigma-Modell mit $U(2)_R \times U(2)_L$ benutzt, das, zusätzlich zu den ursprünglichen skalaren und pseudoskalaren Mesonen und Baryonen, auch noch Vektor- und Axialvektormesonen beinhaltet. Im Bereich höherer Dichten wird außerdem ein zusätzliches skalares Feld betrachtet, das mit einem Tetraquark-Zustand identifiziert wird.

3. Die Lagrangedichte der Mesonen

Das geeichte Lineare Sigma-Modell mit (pseudo-) skalaren Mesonen und (Axial-)Vektoren wurde entwickelt in Ref. [2] zur Untersuchung der Eigenschaften der chiralen Symmetrie und ihre Auswirkungen in der Teilchenphysik, sowie zur korrekten Behandlung der PCAC. Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell für Mesonen wurde auf globale chirale Symmetrie erweitert, was die Einführung einer größeren Anzahl von Termen erlaubt. Auch wenn Terme höherer Ordnung möglich sind, werden nur globale Terme bis Ordnung 4 verwendet [19].

3.1 Die Lagrangedichte

Im 2-Flavour-Fall treten im skalaren mesonischen Sektor folgende Teilchen auf: die beiden Singulets, das σ -Meson und das η_N -Meson, das Piontriplett $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ und das Triplet der \mathbf{a}_0 -Mesonen. Das η_N -Meson ist das $SU(2)$ -Gegenstück des physikalischen η -Mesons, das auch Beiträge von $\bar{s}s$ hat. Das η_N -Meson in diesem Modell besitzt die Quarkzusammensetzung: $\eta_N = \frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$ und hat eine Masse von 700 MeV. Die Assoziation des σ - und des \mathbf{a}_0 -Mesons mit physikalischen Teilchen gestaltet sich schwieriger, da ihre Identifizierung sowohl mit dem Paar $\{f_0(600), a_0(980)\}$ als auch mit dem Paar $\{f_0(1370), a_0(1450)\}$ möglich ist. Die skalaren Mesonen lassen sich in folgender Isospinstruktur anordnen:

$$\Phi = \sum_{a=0}^3 \phi_a t_a = (\sigma + i\eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 + i\boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}, \quad (3.1)$$

wobei $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}/2$, die Pauli Matrizen τ_i darstellen und $t^0 = \mathbf{1}_2/2$ ist. Im vektormesonischen Spektrum sind die in Frage kommenden Teilchen das ω^μ - und das f_1^μ -Singulett, sowie die Triplets der \mathbf{a}_1 - und der $\boldsymbol{\rho}$ -Mesonen. Die Felder ω^μ und ρ^μ korrespondieren zu den Vektormesonen $\omega(782)$ und $\rho(770)$, die Felder f_1^μ und \mathbf{a}_1^μ entsprechen den Axialvektormesonen $f_1(1285)$ und $a_1(1260)$. Die Vektormesonen ($J^P = 1^-$) und die Axialvektormesonen ($J^P = 1^+$) werden entsprechend in folgenden Matrizen zusammengefasst:

$$V^\mu = \sum_{a=0}^3 V_a^\mu t_a = \omega^\mu t^0 + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \mathbf{t}, \quad (3.2a)$$

$$A^\mu = \sum_{a=0}^3 A_a^\mu t_a = f_1^\mu t^0 + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \mathbf{t}. \quad (3.2b)$$

Die rechts- und linkshändigen Felder sind definiert durch die Ausdrücke $R^\mu \equiv V^\mu - A^\mu$, $L^\mu \equiv V^\mu + A^\mu$:

$$R^\mu = (\omega^\mu - f_1^\mu) t_0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu - \mathbf{a}_1^\mu) \cdot \mathbf{t}, \quad (3.3a)$$

$$L^\mu = (\omega^\mu + f_1^\mu) t_0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu + \mathbf{a}_1^\mu) \cdot \mathbf{t}. \quad (3.3b)$$

Unter globaler chiraler $U(2)_R \times U(2)_L$ -Symmetrie transformieren die Felder wie:

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger, \\ R^\mu &\rightarrow U_R R^\mu U_R^\dagger, \\ L^\mu &\rightarrow U_L L^\mu U_L^\dagger.\end{aligned}$$

Hieraus lässt sich nun die global invariante Lagrangedichte für die Mesonen aufbauen. Sie hat die Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mes}} = & \text{Tr} \left[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 \\ & + c (\det \Phi^\dagger + \det \Phi) + h_0 \text{Tr}[(\Phi^\dagger + \Phi)] \\ & - \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ & + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\ & + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4,\end{aligned}\tag{3.4}$$

wobei $D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi + ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi)$ die kovariante Ableitung ist, die die Kopplung zwischen (pseudo-)skalaren Mesonen und (Axial-)Vektormesonen enthält, und $R^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu$ und $L^{\mu\nu} = \partial^\mu L^\nu - \partial^\nu L^\mu$ sind die linearen Anteile der Feldstärketensoren der Vektorfelder.

In der ersten Reihe der Lagrangedichte (3.4) befinden sich der kinetische Term der skalaren Mesonen, ihr Massenterm, parametrisiert durch μ , der je nach Vorzeichen die chirale Symmetrie spontan bricht oder auch nicht, und die skalaren Selbstwechselwirkungsterme mit den Kopplungen λ_1 und λ_2 .

In der zweiten Reihe sind die explizit symmetriebrechenden Terme aufgeführt. Der erste Term bricht die $U(1)_A$ -Symmetrie explizit. Der zweite Term berücksichtigt die nichtverschwindenden Quarkmassen, er bricht die chirale Symmetrie explizit. In der dritten Zeile folgt der kinetische und der Massenterm der Vektorbosonen.

Die Terme, die durch h_1 , h_2 und h_3 parametrisiert werden, sind Wechselwirkungsterme zwischen den skalaren Mesonen und den Vektormesonen. Die Terme \mathcal{L}_3 und \mathcal{L}_4

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 = & -2ig_2 (\text{Tr}\{L_{\mu\nu}[L^\mu, L^\nu]\} + \text{Tr}\{R_{\mu\nu}[R^\mu, R^\nu]\}) \\ & - 2g_3 (\text{Tr}[(\partial_\mu L_\nu + \partial_\nu L_\mu) \{L^\mu, L^\nu\}] + \text{Tr}[(\partial_\mu R_\nu + \partial_\nu R_\mu) \{R^\mu, R^\nu\}])\end{aligned}\tag{3.5}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = & g_4 \{ \text{Tr} [L^\mu L^\nu L_\mu L_\nu] + \text{Tr} [R^\mu R^\nu R_\mu R_\nu] \} + g_5 \{ \text{Tr} [L^\mu L_\mu L^\nu L_\nu] + \text{Tr} [R^\mu R_\mu R^\nu R_\nu] \} \\ & + g_6 \text{Tr} [R^\mu R_\mu] \text{Tr} [L^\nu L_\nu] + g_7 \{ \text{Tr} [L^\mu L_\mu] \text{Tr} [L^\nu L_\nu] + \text{Tr} [R^\mu R_\mu] \text{Tr} [R^\nu R_\nu] \}\end{aligned}\tag{3.6}$$

stellen Dreier- und Vierer-Wechselwirkungen der Vektormesonen dar.

3.1.1 Spontane Symmetriebrechung im mesonischen Sektor

Obwohl die Lagrangedichte aus Gl. (3.4) so aufgebaut wurde, dass sie chiral invariant ist, besitzt der entsprechende Grundzustand nur dann die volle Symmetrie $SU(2)_R \times SU(2)_L \times$

$U(1)_A \times U(1)_V$, wenn $h_0 = c = 0$ ist und $\mu^2 > 0$. Das bedeutet, es liegt keine explizite Symmetriebrechung durch nichtverschwindende Quarkmassen ($h_0 = 0$) vor, es gibt keine Verletzung der chiralen Symmetrie durch die $U(1)_A$ -Anomalie ($c = 0$) und die chirale Symmetrie ist auch nicht spontan gebrochen ($\mu^2 > 0$). Zur Untersuchung der spontanen Symmetriebrechung wird das Vorzeichen des skalarmesonischen Massenterms umgedreht. Wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt, bekommt das skalare Meson σ einen endlichen Vakuumerwartungswert: $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$. Der v.e.v wird in dieser Dissertation durch den Buchstaben φ gekennzeichnet. Die anderen im Modell enthaltenen Teilchen haben keinen v.e.v. Ein v.e.v der Triplets der $\{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}_0, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_1\}$, der Mesonen, die einen von Null verschiedenen Isospin besitzen, würde die Isospin-Symmetrie des Vakuums brechen. Die Mesonen ω und f_1 kommen wegen ihres Spins, $S = 1$, nicht in Frage. Das η_N wiederum nicht wegen seiner negativen Parität. Der einzige in Frage kommende v.e.v. ist der des σ -Mesons, da er dieselben Quantenzahlen wie das Vakuum besitzt.

Man verschiebt nun in der Lagrangedichte (3.4) das σ um seinen v.e.v. φ . Im kinetischen Term der skalaren Mesonen erscheinen hierdurch nicht-diagonale Propagator-Terme:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma + \varphi} \\ & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma + g_1 \boldsymbol{\pi} \mathbf{a}_{1\mu} + g_1 \eta_N f_{1\mu})^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_N - g_1 \sigma f_{1\mu} - g_1 \varphi f_{1\mu} - g_1 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_{1\mu})^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{a}_0 + g_1 \boldsymbol{\rho}_\mu \times \mathbf{a}_0 + g_1 \eta_N \mathbf{a}_{1\mu} + g_1 \boldsymbol{\pi} f_{1\mu})^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} - g_1 \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu - g_1 \sigma \mathbf{a}_{1\mu} - g_1 \varphi \mathbf{a}_{1\mu} - g_1 \mathbf{a}_0 f_{1\mu})^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das Auftreten der Mischterme zwischen \mathbf{a}_1^μ und $\boldsymbol{\pi}$ und zwischen f_1^μ und η_N :

$$\varphi \partial_\mu \eta_N f_1^\mu \quad \text{und} \quad \varphi \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu \quad (3.8)$$

führt zu Übergängen zwischen Pseudoskalaren und Axialvektoren, wie in Abb. 3.1.1 gezeigt, die darauf hin deuten, dass die pseudoskalaren und axialvektoriellen Felder in der in Gl. (3.4) gegebenen Parametrisierung nicht den physikalischen Freiheitsgraden entsprechen und reidiagonalisiert werden müssen.

Der Übergang zu den physikalischen Feldern erfolgt durch eine Verschiebung der Axialvektoren um die entsprechenden Pseudoskalare:

$$f_{1\mu} \rightarrow f_{1\mu} + w \partial_\mu \eta_N \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{1\mu} \rightarrow \mathbf{a}_{1\mu} + w \partial_\mu \boldsymbol{\pi}. \quad (3.9)$$

Der Parameter w ergibt sich unmittelbar aus der Bedingung, dass nach der Verschiebung keine Mischterme auftauchen dürfen. Für die Berechnung werden nur die relevanten Terme aus Gl. (3.4) aufgeführt. Es ist ausreichend, w nur aus dem Shift des Axialfeldes $\mathbf{a}_{1\mu}$ zu berechnen. Das axiale Feld $\mathbf{a}_{1\mu}$ wurde entsprechend Gl. (3.9) verschoben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{shift}} = & -g_1 \varphi \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu + w \varphi^2 g_1^2 \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu + m_1^2 w \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu \\ & \frac{\varphi^2}{2} h_1 w \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu + \frac{\varphi^2}{2} h_2 w \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu - \frac{\varphi^2}{2} h_3 w \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a}_1^\mu + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

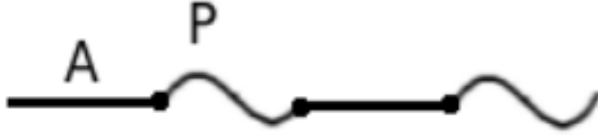


Abbildung 3.1: Nicht erlaubte Wechselwirkung zwischen pseudoskalarem P und axialvektoriellen Feld A .

Das pseudoskalare Feld P (geschlängelte Linie) und das axialvektorielle Feld A (gerade Linie) gehen kontinuierlich ineinander über. Erfolgt dieser Prozess, so sind die involvierten Felder nicht die physikalischen Felder. Entsprechend müssen die Terme, die in der Lagrangedichte für diesen Übergang verantwortlich sind, eliminiert werden.

Die Bedingung, dass die Mischterme verschwinden sollen,

$$m_1^2 w + g_1^2 \varphi^2 w - g_1 \varphi + \frac{\varphi^2}{2} w (h_1 + h_2 - h_3) = 0, \quad (3.11)$$

liefert für den Parameter w :

$$w = \frac{g_1 \varphi}{m_1^2 + \frac{\varphi^2}{2} (h_1 + h_2 - h_3)}. \quad (3.12)$$

Aus den Koeffizienten von $1/2(\mathbf{a}_{1\mu}^2)$ ist erkennbar, dass die Masse des a_1 -Mesons gegeben ist durch:

$$m_a^2 = m_1^2 + g_1^2 \varphi^2 + \frac{\varphi^2}{2} (h_1 + h_2 - h_3). \quad (3.13)$$

Wird Gl. (3.13) in Gl. (3.12) eingesetzt, erhält man für diesen Parameter den Ausdruck:

$$w = \frac{g_1 \varphi}{m_a^2}. \quad (3.14)$$

Die Koeffizienten von $1/2(\boldsymbol{\rho}_\mu^2)$ wiederum liefern für die Masse des ρ -Mesons:

$$m_\rho^2 = m_1^2 + \frac{\varphi^2}{2} (h_1 + h_2 + h_3). \quad (3.15)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken für die Masse des a_1 -Mesons und der des ρ -Mesons spiegelt die in der Natur vorhandene Massendifferenz zwischen diesen beiden Mesonen wieder:

$$m_a^2 - m_\rho^2 = (g_1^2 - h_3) \varphi^2. \quad (3.16)$$

Die Entfernung der Mischterme hat zwei wichtige Konsequenzen:

1. die kinetischen Terme der pseudoskalaren Mesonen sind falsch normiert und müssen unnormiert werden,
2. es entstehen neue Vertizes in der Mesonen-Wechselwirkung.

Auf Punkt Nr. 2 wird detailliert in Kapitel 5 eingegangen, in dem die Pion-Nukleon-Streulängen berechnet und die dafür benötigten Vertizes aufgeschrieben werden.

Die Renormierung des kinetischen Terms der pseudoskalaren Mesonen bringt keine Schwierigkeiten mit sich: betrachtet man die Terme aus der Lagrangedichte (3.4), in denen die Kinetik z. B. des Pions (für das das η_N -Meson gilt genau dasselbe) zum Ausdruck kommt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pi = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2}g_1^2\varphi^2w^2(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 - g_1\varphi w(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 \\ & + \frac{m_1^2}{2}w^2(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{\varphi^2}{2}w^2(h_1 + h_2 - h_3)(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ist erkennbar, dass eine Renormierung auf $\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2$ der Einführung eines neuen Parameters Z bedarf:

$$\begin{aligned}Z^2 = & \frac{m_1^2 + g_1^2\varphi^2 - g_1\varphi + \frac{\varphi^2}{2}(h_1 + h_2 - h_3)}{m_1^2 + \frac{\varphi^2}{2}(h_1 + h_2 - h_3)} \\ = & \frac{m_a^2}{m_a^2 - g_1^2\varphi^2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei im letzten Schritt Gl. (3.13) verwendet wurde.

Die Ersetzungen

$$\boldsymbol{\pi} \rightarrow Z\boldsymbol{\pi}^{phys}, \quad \eta_N \rightarrow Z\eta_N^{phys}, \quad (3.19)$$

liefern in der Lagrangedichte die korrekt renormierten Terme.

Als Letztes ist zu beachten, dass auch die Zerfallskonstante des Pions, die über die PCAC mit dem axialen Strom verknüpft ist, korrekt renormiert werden muss, und infolgedessen auch der Wert des chiralen Kondensats:

$$\varphi = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = Z f_\pi. \quad (3.20)$$

Dies folgt aus der Berechnung des axialen Stromes aus der Lagrangedichte, der lautet: $A_\mu^a = \frac{\varphi}{Z}(\partial_\mu \pi^a)$. Fordert man nun noch die Erfüllung des niederenergetischen Theorems $A_\mu^a = f_\pi(\partial_\mu \pi^a)$, so liefert der Vergleich beider Ergebnisse: $\varphi = Z f_\pi$.

Aufgrund der Verschiebungen der axialen und der Renormierung der pseudoskalaren Felder ist der mesonische Sektor nach wie vor chiral invariant und enthält physikalische Felder mit der korrekten Normierung.

Es können nun abschließend zwei Spezialfälle für die Lagrangedichte 3.4 unterschieden werden:

- Lokale chirale Symmetrie:

In einem Modell mit lokaler chiraler Symmetrie wären die durch die h_1 , h_2 und h_3 parametrisierten Terme nicht erlaubt. Es gilt daher in diesem Fall: $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Daraus folgt, dass: $m_\rho = m_1$, $m_{a_1}^2 = m_\rho^2 + (g_1\varphi)^2$, $Z = m_{a_1}/m_\rho$. Die anderen Kopplungskonstanten g_i , mit $(i = 2, \dots, 7)$, hängen alle von der Kopplungskonstante zwischen (pseudo-)skalaren Mesonen und (Axial-)Vektormesonen, g_1 , ab.

Es muss hier angemerkt werden, dass im Rahmen der lokalen Symmetrie der Zerfall

$\rho \rightarrow \pi\pi$ nicht reproduziert werden kann. Die Zerfallsbreite berechnet sich hier zu $\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} \approx 70$ MeV [20], ihr experimentell gemessener Wert liegt dagegen bei 149.1 MeV. Ebenso kann die axiale Kopplungskonstante des Nukleons nur dann noch vernünftig wiedergegeben werden, wenn man 6-dimensionale Terme berücksichtigt [1, 3, 21].

- Keine Vektormesonen:

Die (Axial-)Vektormesonen entkoppeln vollständig, wenn $g_1 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$, und folglich: $Z = 1$ und $w = 0$. Ohne sie sind die experimentellen Daten (für z.B. πN -Streulängen oder der axialen Kopplungskonstante des Nukleons) jedoch nicht reproduzierbar. Man benötigt in diesem Falle weitere Terme, wie etwa den Weinberg-Tomozawa-Term und eventuell überdies noch Schleifendiagramme.

3.1.2 Z

Der Parameter Z ist eng verknüpft mit dem Parameter g_1 , siehe Gl. (3.18), doch diese Verknüpfung ist nicht trivial:

$$Z^2 = \frac{m_a^2}{m_a^2 - g_1^2 \varphi^2}, \quad \text{wobei } \varphi = Z f_\pi. \quad (3.21)$$

Löst man diese quadratische Gleichung für Z , erhält man zwei Lösungen:

$$Z_{\pm} = \sqrt{\frac{m_a^2 \pm \sqrt{m_a^4 - 4(g_1 f_\pi)^2 m_a^2}}{2(g_1 f_\pi)^2}}. \quad (3.22)$$

Um zu entscheiden, welche die korrekte Lösung ist, ist folgende Grenzwertbetrachtung nützlich:

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} Z_- = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{g_1 \rightarrow 0} Z_+ = \infty. \quad (3.23)$$

Die Lösung Z_- geht bei verschwindendem g_1 gegen 1, was dem Grenzfall des Modells ohne Vektormesonen entspricht und somit den korrekten Limes aufweist. Gezeigt sind beide Lösungen im linken Teil der Abb. 3.2 als Funktion des Parameters g_1 .

Eine eindeutige Zuweisung dagegen ist zu erkennen, wird g_1 als Funktion von Z bestimmt:

$$g_1 = \frac{m_a}{Z f_\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}. \quad (3.24)$$

Der Parameter g_1 ist bekannt, wenn Z bekannt ist, siehe rechter Teil von Abb. 3.2.

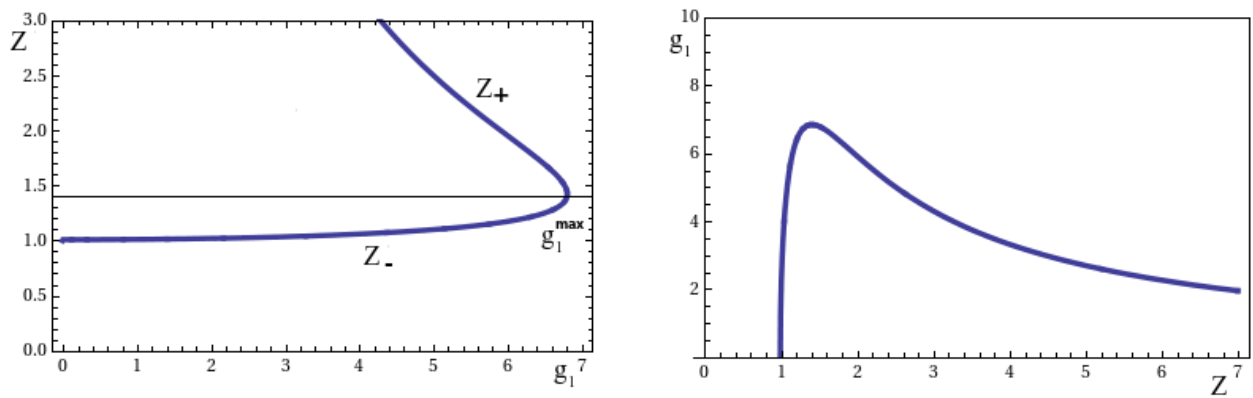


Abbildung 3.2: Links: Beide Lösungen für Z , Z_+ und Z_- , als Funktion des Parameters g_1 . Während Z_+ für kleine Werte von g_1 divergiert, weist Z_- das richtige Verhalten auf. Rechts: g_1 als Funktion von Z . Der Wert von g_1 ist eindeutig durch den Wert von Z gegeben.

4. Die Lagrangedichte der Baryonen

Beim Übergang von hadronischer Materie zum QGP verändern sich die Eigenschaften der stark wechselwirkenden Materie drastisch. Ein Beispiel dafür ist z. B., dass die Baryonmassen in dem Bereich, in dem die chirale Symmetrie wiederhergestellt ist, wahrscheinlich verschwinden. Umgekehrt ergibt sich daraus, dass beim Übergang vom QGP zu Hadronen, deren Masse durch den Prozess der chiralen Symmetriebrechung erzeugt wird, ein chirale Kondensat φ erscheint. Dieser sogenannte chirale Phasenübergang ist somit einer der maßgebenden Prozesse bei der Massenentstehung im Universum.

Zur Generierung der Masse können jedoch auch weitere Kondensate beitragen, wie z. B. das Gluonkondensat oder ein Tetraquarkkondensat [22]. Eine Möglichkeit, den Beitrag dieser Kondensate durch einen expliziten Massenterm zu berücksichtigen, besteht darin, die Lagrangedichte der Nukleonen in der sogenannten *Spiegel-Zuordnung* des Linearen Sigma-Modells einzuführen.

Dieses Modell wurde zum ersten Mal in Ref. [6] untersucht, jedoch für untauglich befunden, da es das unphysikalische Ergebnis $g_{\pi NN} = 0$ lieferte. Heute ist bekannt, dass der Grund für dieses Resultat fehlende Terme waren, die aufgrund der chiralen Symmetrie aber durchaus erlaubt sind. Wiederaufgenommen und umfassend untersucht wurde das Modell dann erneut in Ref. [5, 23].

Im Spiegel-Assignment bilden das Nukleon N und sein chiraler Partner N^* ein Duplett der chiralen Gruppe, wie im Folgenden gezeigt wird. Diese Tatsache ist für die Untersuchung des Anteils der Baryonenmasse wichtig, der weder durch spontane Symmetriebrechung noch durch endliche Stromquarkmassen verursacht wird, da dann die Einführung eines chiral invarianten Massenterms, parametrisiert durch m_0 , möglich ist. Infolge dieses Massenterms verschwinden die Nukleonenmassen bei Wiederherstellung der chiralen Symmetrie (wenn $\varphi \rightarrow 0$) nicht, sondern bekommen dieselbe Masse $m_0 \neq 0$.

Im baryonischen Sektor enthält die zugehörige Lagrangedichte die beiden Zustände Ψ_1 und Ψ_2 des Baryonendupletts. Sie sind Kombinationen aus den physikalischen Feldern N und N^* , die hier als chirale Partner auftreten, wobei $J_N^P = \frac{1}{2}^+$ und $J_{N^*}^P = \frac{1}{2}^-$. Der Zustand Ψ_1 ist so gewählt, dass es ebenfalls positive Parität hat, Ψ_2 besitzt dagegen negative Parität. Für eine weniger komplizierte Schreibweise werden in der baryonischen Lagrangedichte die Zustände Ψ_1 und Ψ_2 eingeführt. Es bestehen zwei Wege, die Baryonen einzubauen: entweder im Rahmen der sogenannten *naiven Zuordnung*, oder im Rahmen der sogenannten *Spiegel-Zuordnung*¹. Die grundlegenden Unterschiede zwischen beiden Zuordnungen werden im folgenden Abschnitt kurz anhand des ursprünglichen Linearen Sigma-Modells [18, 23] erklärt. In den danach folgenden Abschnitten wird das erweiterte Modell, das zusätzlich zu den (pseudo-)skalaren Mesonen und Baryonen, ebenfalls die (Axial-)Vektormesonen einschließt, im Rahmen beider Zuordnungen ausführlich untersucht.

¹Die in der Literatur gängigen Bezeichnungen sind *naive assignment* und *mirror assignment* (engl.).

4.1 Naiv versus Spiegel

Der Unterschied zwischen diesen beiden Zuordnungen besteht darin, dass im naiven Fall die Rollen der rechts- und linkshändigen Komponenten beider Nukleonen N und N^* identisch sind, im Spiegel-Fall dagegen sind die Rollen der Komponenten des zweiten Partners vertauscht. Zum besseren Verständnis wird im Folgenden nur das Baryonenduplett sowie seine Kopplung an die (pseudo-)skalaren Mesonen betrachtet. Die Mesonen σ und π werden in der Isospinstruktur: $\Phi = \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}$ zusammengefasst, mit der Darstellung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger$ unter chiraler Transformation, wobei $U_{R,L}$ Elemente aus der $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Gruppe sind. Das Transformationsverhalten der Baryonen ist von ihrer jeweiligen gruppentheoretischen Darstellung abhängig.

1. Naive Zuordnung

Die Darstellung der Baryonen im naiven Assignment lautet:

$$\Psi_1 \propto (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}), \quad \Psi_2 \propto (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}). \quad (4.1)$$

Diese Schreibweise lässt sich schnell erörtern: Ψ_1 und Ψ_2 bestehen je aus einem rechtshändigen Anteil $\Psi_{1,2}^R$ und einem linkshändigen Anteil $\Psi_{1,2}^L$, die zu folgenden Diracschen Darstellungen gehören:

$$\Psi_{1,2}^R \in (\frac{1}{2}, 0) \quad \text{und} \quad \Psi_{1,2}^L \in (0, \frac{1}{2}). \quad (4.2)$$

Die Klammern stehen für die Darstellungen der chiralen Transformationen $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$. Es transformiert sich also der rechtshändige Anteil $\Psi_{1,2}^R$ unter U_R und nicht unter U_L . Analog transformiert sich der linkshändige Anteil $\Psi_{1,2}^L$ unter U_L und nicht unter U_R .

Beide Anteile der Zustände Ψ_1 und Ψ_2 transformieren sich auf dieselbe Weise, sie sind ununterscheidbar. Sie sind somit keine echten chiralen Partner und gehören nicht demselben Multiplett an. Es sind gruppentheoretisch gesehen identische Zustände. Die links- und rechtshändigen Komponenten des Baryondupletts besitzen also dieselben Transformationseigenschaften:

$$\begin{aligned} \Psi_{1R} &\longrightarrow U_R \Psi_{1R}, \quad \Psi_{1L} \longrightarrow U_L \Psi_{1L}, \\ \Psi_{2R} &\longrightarrow U_R \Psi_{2R}, \quad \Psi_{2L} \longrightarrow U_L \Psi_{2L}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei: $\Psi_i = \Psi_{i,R} + \Psi_{i,L}$, $i = 1, 2$.

Folgende Lagrangedichte beschreibt die Kopplung zwischen den Baryonen und den (pseudo-)skalaren Mesonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{naiv} &= \bar{\Psi}_1 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_1 - a_1 \bar{\Psi}_1 (\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_2 - a_2 \bar{\Psi}_2 (\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_2 \\ &\quad - a_{12} \bar{\Psi}_1 (\gamma_5 \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_2 + a_{12} \bar{\Psi}_2 (\gamma_5 \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_1 + \mathcal{L}_{meson}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sie enthält die kinetischen Terme der Baryonen, sowie ihre Kopplung an die Mesonen mit den Kopplungskonstanten a_1 und a_2 . Die genaue Form des mesonischen

Anteils \mathcal{L}_{meson} ist in diesem Zusammenhang von geringer Bedeutung. Der durch a_{12} parametrisierte Term beschreibt die Kopplung zwischen den beiden Nukleonen. Da beide verschiedene Parität besitzen, erscheint das σ -Meson mit einem γ_5 anstelle des Pions. Die Diagonalisierung der Lagrangedichte führt zu einer Entkopplung zwischen den beiden Nukleonen. Die Lagrangedichte ist die Summe von zwei voneinander unabhängigen Lagrangedichten für jedes Nukleon:

$$\mathcal{L}_{naiv} = \sum_{i=N, N^*} \bar{\Psi}_i i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_i - a_i \bar{\Psi}_i (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_i + \mathcal{L}_{meson}. \quad (4.5)$$

Die chirale Symmetrie wird spontan gebrochen, wenn das σ -Meson einen v.e.v φ erhält: $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$. Das Nukleon erhält eine Masse $a_N \varphi$, die seines chiralen Partners wird $a_{N^*} \varphi$.

Ist die chirale Symmetrie wieder hergestellt und $\varphi \rightarrow 0$, werden beide Nukleonenmassen Null. Doch diese Entartung der Massen ist uninteressant, da die beiden Nukleonen nicht gekoppelt sind. Berücksichtigt man Kopplungen der Nukleonen an den Gradienten des Pionfeldes, sind diese Konsequenzen nicht mehr gültig.

Anschließend an diese Bemerkung sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass für die Enkopplung der beiden Nukleonen, wie es in Ref. [23] der Fall ist, ein Zerfall in $N\pi$ nicht beschrieben werden kann, da die nicht-diagonale Yukawa-Kopplung $g_{N\pi\pi}$ verschwindet. In der vorliegenden Arbeit jedoch ist es durch Einführung der (Axial-)Vektormesonen sehr wohl möglich, diesen Zerfall zu beschreiben. Durch die Verschiebung des Axialvektorfeldes $\mathbf{a}_{1\mu} \rightarrow \mathbf{a}_{1\mu} + w\partial_\mu \boldsymbol{\pi}$ (s. auch Gl. (3.9)), verschwindet die Kopplung der Nukleonen an die Ableitung des pseudoskalaren Pionfeldes *nicht*. Damit ist es möglich, den Zerfall $N^* \rightarrow N\pi$ zu berechnen.

2. Spiegel-Zuordnung

Im Spiegel-Assignemt haben Ψ_1 und Ψ_2 folgende gruppentheoretische Darstellung:

$$\Psi_1 \propto \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \Psi_2 \propto \left(0, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (4.6)$$

Die beiden Nukleonen sind daher echte chirale Partner [23, 24, 25].

In diesem Modell transformieren die links- und rechtshändigen Komponenten des chiralen Partners gerade entgegengesetzt, Ψ_{2R} transformiert unter $U(2)_L$, Ψ_{2L} dagegen transformiert unter $U(2)_R$:

$$\begin{aligned} \Psi_{1R} &\longrightarrow U_R \Psi_{1R}, \quad \Psi_{1L} \longrightarrow U_L \Psi_{1L}, \\ \Psi_{2R} &\longrightarrow U_L \Psi_{2R}, \quad \Psi_{2L} \longrightarrow U_R \Psi_{2L}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aufgrund der Transformationseigenschaften sind Terme der Form $a_{12} \bar{\Psi}_1 (\gamma_5 \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_2 + \text{h.c.}$ nicht mehr erlaubt. Terme, die linkshändige Komponenten von Ψ_1 mit rechtshändigen Komponenten von Ψ_2 , und umgekehrt, mischen, sind jetzt jedoch durchaus zugelassen, da sie chiral invariant sind. Daher kann ein Term der Form

$$m_0 (\bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} - \bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}), \quad (4.8)$$

parametrisiert durch die Größe m_0 , folgender Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{spiegel}} = & \bar{\Psi}_1 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_1 - a_1 \bar{\Psi}_1 (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_2 - a_2 \bar{\Psi}_2 (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi_2 \\ & + \mathcal{L}_{\text{meson}}\end{aligned}\quad (4.9)$$

ohne Weiteres hinzugefügt werden. Der Parameter m_0 steht für den Anteil der Nukleonenmasse, der nicht durch Symmetriebrechungen generiert wird. Somit entarten die Nukleonenmassen bei Wiederherstellung der chiralen Symmetrie nicht zu Null, sondern zu einem endlichen Wert $m_0 = m_N = m_{N^*}$.

4.2 Die Lagrangedichte für Nukleonen im Spiegel-Assignment

Die vollständige Lagrangedichte mit globaler chiraler Symmetrie, die die beiden Nukleonen und ihre Wechselwirkungen mit den (pseudo-) skalaren sowie den (axial-) vektoriellen Mesonen beschreibt, lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{bar}} = & \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2R} \\ & - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi \Psi_{2L}) \\ & - m_0 (\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}) .\end{aligned}\quad (4.10)$$

Die Isospinstrukturen, in denen die Mesonen angeordnet sind, sind durch Gl. (3.1) und Gl. (3.3) gegeben. Die kovarianten Ableitungen, parametrisiert durch die Kopplungskonstanten c_1 und c_2 ², sind:

$$\begin{aligned}D_{1R}^\mu &= \partial^\mu - ic_1 R^\mu, & D_{1L}^\mu &= \partial^\mu - ic_1 L^\mu, \\ D_{2R}^\mu &= \partial^\mu - ic_2 R^\mu, & D_{2L}^\mu &= \partial^\mu - ic_2 L^\mu.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen und den skalaren und pseudoskalaren Feldern wird durch die Größen \hat{g}_1 und \hat{g}_2 parametrisiert.

Die physikalischen Nukleonenfelder N und N^* , die nunmehr zu berechnen sind, sind Kombinationen aus den Spinoren Ψ_1 und Ψ_2 . Als Erstes wird zu diesem Zweck die Auswirkung der spontanen Symmetriebrechung im mesonischen Sektor auf den baryonischen Sektor betrachtet.

4.2.1 Auswirkung der spontanen Symmetriebrechung im mesonischen Sektor auf den baryonischen Sektor

Im Abschnitt 3.1.1 wurde aufgezeigt, dass bei dem Auftreten eines v.e.v. des skalaren Feldes φ nach der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie die anderen Mesonfelder ebenfalls betroffen sind:

Zunächst müssen die axialen Mesonfelder \mathbf{a}_1 und f_1 aufgrund von unphysikalischen Mischtermen gemäß Gl. (3.9) verschoben werden. Dieser Vorgang hat wiederum eine falsche

²Es sei zu beachten, dass im Fall $c_1 = c_2 = g_1$ die chirale Symmetrie lokal ist.

Normierung der Terme $\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2$ bzw. $\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_N)^2$ zur Folge, die nun durch einen Faktor Z korrekt renormiert werden müssen, siehe Gl. (3.19). Nach dieser Renormierung hat die Lagrangedichte der Nukleonen folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{bar}} = & \bar{\Psi}_{1L} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_{2R} \\
& + \bar{\Psi}_{1L} c_1 \gamma_\mu [(\omega^\mu + f_1^\mu + Zw \partial^\mu \eta_N) t^0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu + \mathbf{a}_1^\mu + w Z \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{1L} \\
& + \bar{\Psi}_{1R} c_1 \gamma_\mu [(\omega^\mu - f_1^\mu - Zw \partial^\mu \eta_N) t^0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu - \mathbf{a}_1^\mu - Zw \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{1R} \\
& - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} [(\sigma + \varphi + iZ \eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 + iZ \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{1R} \\
& - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1R} [(\sigma + \varphi - iZ \eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 - iZ \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{1L} \\
& + \bar{\Psi}_{2L} c_2 \gamma_\mu [(\omega^\mu - f_1^\mu - Zw \partial^\mu \eta_N) t^0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu - \mathbf{a}_1^\mu - w Z \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{2L} \\
& + \bar{\Psi}_{2R} c_2 \gamma_\mu [(\omega^\mu + f_1^\mu + Zw \partial^\mu \eta_N) t^0 + (\boldsymbol{\rho}^\mu + \mathbf{a}_1^\mu + w Z \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{2R} \\
& - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{1L} [(\sigma + \varphi - iZ \eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 - iZ \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{2R} \\
& - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{1R} [(\sigma + \varphi + iZ \eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 + iZ \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t}] \Psi_{2L} \\
& - m_0 (\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}) .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Wenn Ψ_1 und Ψ_2 die physikalischen Felder wären, könnten aus Gl. (4.12) ihre Massen direkt abgelesen werden. Es ist jedoch genau der Massenterm in der Lagrangedichte, der die beiden Felder miteinander mischt. Die Felder müssen folglich entmischt werden.

4.2.2 Mischung der Felder: ein einfaches Beispiel

Zunächst wird der Prozess der Entmischung anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Die Lagrangedichte zweier Skalarfelder ϕ_1 und ϕ_2 , mit den Massen m_1 und m_2 , die untereinander wechselwirken, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 + g\phi_1\phi_2. \tag{4.13}$$

Der letzte Term ist ein quadratischer Term, der die Wechselwirkung der Stärke g zwischen den beiden Feldern ϕ_1 und ϕ_2 beschreibt.

Ist $g = 0$, sind die beiden Felder voneinander unabhängig. Dann ist die Lagrangedichte \mathcal{L} die Summe der einzelnen Lagrangedichten der Felder. Für jedes der Felder wären also zwei unabhängige Propagatoren gegeben:

$$\mathcal{P}_{\phi_1} = \frac{1}{p^2 - m_1^2} \quad \mathcal{P}_{\phi_2} = \frac{1}{p^2 - m_2^2}. \tag{4.14}$$

Ist jedoch $g \neq 0$, so ist es keinesfalls möglich, die Propagatoren in dieser einfachen Weise zu formulieren. Der Wechselwirkungsterm $g\phi_1\phi_2$ beschreibt einen Übergang von einem Feld in das andere, wie es schon in Kapitel 3 erklärt wurde, siehe Abb. 3.1.1. Um die Felder zu entmischen, wird die Lagrangedichte in folgender Form geschrieben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}(\phi_1 \quad \phi_2) \begin{pmatrix} m_1^2 & g \\ g & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} m_1^2 & g \\ g & m_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

muss somit diagonalisiert werden. Die Berechnung ergibt für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{4g^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{4g^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

und für die Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} (m_1^2 - m_2^2 + \sqrt{4g^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2})/2g \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} (m_1^2 - m_2^2 - \sqrt{4g^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2})/2g \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Transformationsmatrix $B \subset SO(2)$, die die Eigenvektoren enthält, lautet:

$$B = \begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Auf diese Weise ergibt sich für die diagonalisierte Matrix:

$$\tilde{\Omega} = B\Omega B^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Da B eine orthogonale Rotationsmatrix ist, können ihre Argumente durch einen Winkel θ ausgedrückt werden, der über komplizierte trigonometrische Ausdrücke mit m_1^2 , m_2^2 und g zusammenhängt. Anschließend können die ursprünglichen Felder, ϕ_1 und ϕ_2 , mit Hilfe dieser Rotationsmatrix in die neuen, voneinander unabhängigen, Felder, $\tilde{\phi}_1$ und $\tilde{\phi}_2$ übergeführt werden:

$$Bv = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Die Lagrangedichte mit den zwei voneinander unabhängigen Felder $\tilde{\phi}_1$ und $\tilde{\phi}_2$ lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\tilde{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\tilde{\phi}_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda_1\tilde{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_2\tilde{\phi}_2^2 \quad (4.22)$$

Durch Gl. (4.21) können die neuen, umgemischten Felder jederzeit wieder in die ursprünglichen Felder zurücktransformiert werden.

4.2.3 Mischung der Felder Ψ_1 und Ψ_2

Aus der Lagrangedichte Gl. (4.12) werden die Terme verwendet, die direkt die Massenmatrix wiedergeben, also genau diejenigen, die durch spontane Symmetriebrechung ($\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$) entstanden sind, sowie den chiral invarianten Massenterm:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{masse}} = & -\hat{g}_1 \bar{\Psi}_{1L} \varphi \frac{\tau^0}{2} \Psi_{1R} - \hat{g}_1 \bar{\Psi}_{1R} \varphi \frac{\tau^0}{2} \Psi_{1L} \\ & -\hat{g}_2 \bar{\Psi}_{1L} \varphi \frac{\tau^0}{2} \Psi_{2R} - \hat{g}_2 \bar{\Psi}_{1R} \varphi \frac{\tau^0}{2} \Psi_{2L} \\ & -m_0 (\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}).\end{aligned}\quad (4.23)$$

Man erkennt, dass dies genau der folgenden Schreibweise entspricht:

$$(\bar{\Psi}_1 \quad -\bar{\Psi}_2 \gamma_5) \widehat{M} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \gamma_5 \Psi_2 \end{pmatrix} = (\bar{\Psi}_1 \quad -\bar{\Psi}_2 \gamma_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hat{g}_1 \varphi & m_0 \gamma_5 \\ m_0 \gamma_5 & -\frac{1}{2} \hat{g}_2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \gamma_5 \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

wobei, durch geschicktes Einführen der Matrix γ_5 , beide Spinoren die gleiche Parität erhalten. In dieser Weise erhält man die korrekte Massenmatrix, die nun diagonalisiert wird, um die Masseneigenwerte der physikalischen Felder N und N^* zu erhalten:

$$\det[\lambda \cdot 1_2 - \widehat{M}] = \left(\lambda - \frac{1}{2} \hat{g}_1 \varphi \right) \left(\lambda + \frac{1}{2} \hat{g}_2 \varphi \right) - m_0^2 = 0. \quad (4.25)$$

Sie lauten:

$$m_N = \lambda_1 = \sqrt{m_0^2 + \left[\frac{1}{4} (\hat{g}_1 + \hat{g}_2) \varphi \right]^2} + \frac{1}{4} (\hat{g}_1 - \hat{g}_2) \varphi, \quad (4.26)$$

$$m_N^* = \lambda_2 = \sqrt{m_0^2 + \left[\frac{1}{4} (\hat{g}_1 + \hat{g}_2) \varphi \right]^2} - \frac{1}{4} (\hat{g}_1 - \hat{g}_2) \varphi. \quad (4.27)$$

Damit sind die Kopplungskonstanten $\hat{g}_{1,2}$ eindeutig durch m_N , m_{N^*} und den Parameter m_0 definiert

$$\hat{g}_{1,2} = \frac{1}{\varphi} \left[\pm (m_N - m_{N^*}) + \sqrt{(m_N + m_{N^*})^2 - 4m_0^2} \right]. \quad (4.28)$$

Anhand Gl. (4.27) wird sofort der Effekt der spontanen Symmetriebrechung deutlich: ist die chirale Symmetrie wieder hergestellt, $\varphi \rightarrow 0$, entarten die Massen der beiden Nukleonen $m_N = m_{N^*} = m_0$. Der Unterschied in den Massen wird erst durch eine Brechung der chiralen Symmetrie $\varphi \neq 0$ generiert.

Weiter erkennt man sofort, dass die Nukleonenmasse nicht als eine einfache Summe geschrieben werden kann, etwa in der Form: $m_N = m_0 + \lambda \varphi$, d.h. m_0 kann nicht als linearer Beitrag zur Masse angesehen werden.

Wie in Abschnitt 4.2.2, Gl. (4.21), dargelegt wurde, stellt die Massenmatrix \widehat{M} eine Rotation zwischen den unphysikalischen und den physikalischen Feldern dar. Man kann sie

daher als Funktion eines Transformationsparameters δ ausdrücken. Als Rotationsmatrix wird gewählt:

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} \begin{pmatrix} e^{\delta/2} & \gamma_5 e^{-\delta/2} \\ \gamma_5 e^{-\delta/2} & -e^{\delta/2} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

wobei γ_5 wieder die unterschiedliche Parität der beiden Felder Ψ_1 und Ψ_2 , bzw N und N^* berücksichtigt. Der Parameter δ beschreibt die Stärke der Mischung zwischen beiden Feldern und ist gegeben durch:

$$\cosh \delta = \frac{m_N + m_{N^*}}{2m_0}. \quad (4.30)$$

Der Zusammenhang zwischen den Spinoren $\Psi_{1,2}$ und den physikalischen Feldern N und N^* lautet:

$$\begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (N e^{\delta/2} + \gamma_5 N^* e^{-\delta/2}), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (\gamma_5 N e^{-\delta/2} - N^* e^{\delta/2}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Wird ausgenutzt, dass der adjungierte Dirac-Spinor $(\bar{\Psi})^3$ gleich dem dualen Spinor, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ ist, wobei γ^0 die zeitartige Gammamatrix darstellt, ergibt sich für die adjungierten Felder:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (\bar{N} e^{\delta/2} - \bar{N}^* \gamma_5 e^{-\delta/2}), \\ \bar{\Psi}_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (\bar{N} \gamma_5 e^{-\delta/2} + \bar{N}^* e^{\delta/2}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.2.4 Lagrangedichte \mathcal{L}_{bar} mit physikalischen Feldern

Nachfolgend wird der Ausdruck für die baryonische Lagrangedichte berechnet, wobei die Spinoren Ψ_1 und Ψ_2 durch Gln. (4.32) ersetzt wurden, bzw. ihre adjungierten durch Gln. (4.33). Bei dieser Berechnung sind folgende Regeln zu beachten:

- Sind P_L und P_R die links- und rechtshändigen Projektoren, so gilt für die Spinoren:

$$\begin{aligned} \Psi_{1L} &= P_L \Psi_1, & \bar{\Psi}_{1L} &= \bar{\Psi}_1 P_R, \\ \Psi_{1R} &= P_R \Psi_1, & \bar{\Psi}_{1R} &= \bar{\Psi}_1 P_L. \end{aligned}$$

Analoges gilt für Ψ_2 .

³Der adjungierte Dirac-Spinor $\bar{\Psi}$ sei nicht zu verwechseln mit dem Hermiteschen adjungierten Spinor Ψ^\dagger .

- Für die Projektoren selbst gilt:

$$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R \quad , \quad P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L, \\ P_L^2 = P_L \quad , \quad P_R^2 = P_R.$$

Werden diese Regeln angewendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bar} = & \bar{\Psi}_1 i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi_2 \\ & + c_1 \bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} - [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \Psi_1 \\ & - \hat{g}_1 \bar{\Psi}_1 [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \Psi_1 \\ & + c_2 \bar{\Psi}_2 \gamma_\mu \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \Psi_2 \\ & - \hat{g}_2 \bar{\Psi}_2 [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \Psi_2 \\ & - m_0 (\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2 - \bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Unter Anwendung von Gln. (4.32) und (4.33) folgt die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bar} = & \bar{N} i \gamma_\mu \partial^\mu N + \bar{N}^* i \gamma_\mu \partial^\mu N^* \\ & + \frac{1}{4 \cosh \delta} \left(c_1 e^\delta \bar{N} \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N \right. \\ & + c_1 \bar{N} \{ -(\omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \} \gamma_\mu N^* \\ & - c_1 \bar{N}^* \{ (\omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \} \gamma_\mu N \\ & + c_1 e^{-\delta} \bar{N}^* \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N^* \\ & + c_2 e^{-\delta} \bar{N} \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N \\ & + c_2 \bar{N} \{ (\omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \} \gamma_\mu N^* \\ & - c_2 \bar{N}^* \{ -(\omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \} \gamma_\mu N \\ & + c_2 e^\delta \bar{N}^* \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Zw(\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N^* \\ & - \hat{g}_1 e^\delta \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \\ & - \hat{g}_1 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\ & + \hat{g}_1 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\ & + \hat{g}_1 e^{-\delta} \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \\ & + \hat{g}_2 \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \\ & - \hat{g}_2 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\ & + \hat{g}_2 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\ & \left. - \hat{g}_2 \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - iZ(\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \right) \\ & + m_0 \tanh \delta \bar{N} N^* \gamma_5 - m_0 \tanh \delta \bar{N}^* N \gamma_5 \\ & - \frac{m_0}{\cosh \delta} (\bar{N} N + \bar{N}^* N^*). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Die Lagrangedichte in dieser Form geschrieben lässt sofort erkennen, dass der Mischungswinkel δ genau Gl. (4.30) erfüllen muss. Da Mischungsterme wie $\varphi \bar{N} \gamma_5 N^*$ und $\varphi \bar{N}^* \gamma_5 N$ verschwinden müssen, muss gelten:

$$\frac{1}{4 \cosh \delta} (-\hat{g}_1 \varphi - \hat{g}_2 \varphi) \bar{N} \gamma_5 N^* + m_0 \tanh \delta \bar{N} \gamma_5 N^* = 0. \quad (4.36)$$

Damit gilt:

$$\sinh \delta = \frac{(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) \varphi}{4m_0}. \quad (4.37)$$

Mit Hilfe von Gln. (4.27) und den entsprechenden Relationen für die hyperbolischen Funktionen gilt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{m_N + m_{N^*}}{2} &= \sqrt{m_0^2 + \frac{(\hat{g}_1 + \hat{g}_2)^2 \varphi^2}{4}} = \sqrt{1 + \frac{(\hat{g}_1 + \hat{g}_2)^2 \varphi^2}{4m_0^2}} m_0 \\ &= m_0 \sqrt{1 + \sinh^2 \delta} = m_0 \cosh \delta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

und somit exakt Gl. (4.30). Der Parameter δ ist also genau so bestimmt, dass die Mischungsterme zwischen N und N^* verschwinden.

4.2.5 Spezialfälle für die Lagrangedichte \mathcal{L}_{bar}

Von Interesse sind des Weiteren verschiedene Spezialfälle. Im mesonischen Anteil tritt der Parameter g_1 in Erscheinung. Er ist die Kopplungskonstante zwischen den skalaren und den vektoriellen Mesonen, s. Gl. (3.1). Im lokalen Fall und bei Verschwinden des chiralen Partners erscheint er auch in der baryonischen Lagrangedichte, da in diesen Fällen die Nukleonen mit derselben Stärke an die (Axial-)Vektormesonen koppeln wie die skalaren Mesonen, also gilt: $c_1 = c_2 = g_1$. In den beiden Fällen von lokaler chiraler Symmetrie bzw. entkoppelten (Axial-)Vektormesonen gilt ebenfalls die Bedingung (4.30) für den Mischungswinkel.

- Lokale chirale Symmetrie: $c_1 = c_2 = g_1$.

In diesem Fall haben die kovarianten Ableitungen folgende Form: $D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi + ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi)$, $D_{1R}^\mu = \partial^\mu - ig_1 R^\mu$, $D_{1L}^\mu = \partial^\mu - ig_1 L^\mu$, $D_{2R}^\mu = \partial^\mu - ig_1 R^\mu$ und $D_{2L}^\mu = \partial^\mu - ig_1 L^\mu$, das bedeutet, sowohl die Skalare wie auch Ψ_1 und Ψ_2 koppeln alle mit derselben Stärke, g_1 , an die (Axial-)Vektormesonen. Hier wird jedoch vorerst

nur der nukleonische Anteil gezeigt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bar} = & \bar{N} i \gamma_\mu \partial^\mu N + \bar{N}^* i \gamma_\mu \partial^\mu N^* \\
& + \frac{1}{4 \cosh \delta} \left(g_1 \bar{N} \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Z w (\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N \right. \\
& - g_1 \bar{N} [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Z w (\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \gamma_\mu N^* \\
& - g_1 \bar{N}^* [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Z w (\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] \gamma_\mu N \\
& + g_1 \bar{N}^* \{ \omega^\mu + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + [f_1^\mu + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \boldsymbol{\tau} + Z w (\partial^\mu \eta_N + \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] \} \gamma_\mu N^* \\
& - \hat{g}_1 e^\delta \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \\
& - \hat{g}_1 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\
& + \hat{g}_1 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\
& + \hat{g}_1 e^{-\delta} \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \\
& + \hat{g}_2 \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \\
& - \hat{g}_2 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\
& + \hat{g}_2 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\
& \left. - \hat{g}_2 \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \right) \\
& + m_0 \tanh \delta \bar{N} N^* \gamma_5 - m_0 \tanh \delta \bar{N}^* N \gamma_5 \\
& - \frac{m_0}{\cosh \delta} (\bar{N} N + \bar{N}^* N^*). \tag{4.39}
\end{aligned}$$

- Die (Axial-)Vektormesonen enkoppeln komplett, wenn $c_1 = c_2 = g_1 = 0$. Dann hat die nukleonische Lagrangedichte folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bar} = & \bar{N} i \gamma_\mu \partial^\mu N + \bar{N}^* i \gamma_\mu \partial^\mu N^* \\
& - \frac{1}{4 \cosh \delta} \left(\hat{g}_1 e^\delta \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \right. \\
& - \hat{g}_1 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\
& + \hat{g}_1 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\
& + \hat{g}_1 e^{-\delta} \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \\
& + \hat{g}_2 \bar{N} [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N \\
& - \hat{g}_2 \bar{N} [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N^* \\
& + \hat{g}_2 \bar{N}^* [(\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5 - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})] N \\
& \left. - \hat{g}_2 \bar{N}^* [\sigma + \varphi + \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - i Z (\eta_N + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \gamma_5] N^* \right) \\
& + m_0 \tanh \delta \bar{N} N^* \gamma_5 - m_0 \tanh \delta \bar{N}^* N \gamma_5 \\
& - \frac{m_0}{\cosh \delta} (\bar{N} N + \bar{N}^* N^*). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

- $m_0 \rightarrow 0$:

Dies ist gleichbedeutend mit $\delta \rightarrow \infty$. Wie an Gln. (4.32) erkennbar, enkoppeln die

beiden baryonischen chiralen Partner in diesem Fall vollständig und es gilt $N = \Psi_1$ und $N^* = -\Psi_2$. Der Kompaktheit zuliebe werden zu diesem Zweck wieder die rechts- und linkshändigen Anteile des Nukleons, sowie die Isospinstrukturen der Mesonen nach Gln. (3.1) und (3.2), verwendet.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N &= \bar{N}_L i\gamma_\mu \partial^\mu N_L + \bar{N}_R i\gamma_\mu \partial^\mu N_R \\ &\quad - \hat{g}_1 \bar{N}_L \Phi N_R - \hat{g}_1 \bar{N}_R \Phi^\dagger N_L \\ &\quad + c_1 \bar{N}_L \gamma_\mu L^\mu N_L + c_1 \bar{N}_R \gamma_\mu R^\mu N_R.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Analog gilt für den chiralen Partner N^* :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{N^*} &= \bar{N}_L^* i\gamma_\mu \partial^\mu N_L^* + \bar{N}_R^* i\gamma_\mu \partial^\mu N_R^* \\ &\quad - \hat{g}_2 \bar{N}_L^* \Phi N_R^* - \hat{g}_2 \bar{N}_R^* \Phi^\dagger N_L^* \\ &\quad + c_2 \bar{N}_L^* \gamma_\mu L^\mu N_L^* + c_2 \bar{N}_R^* \gamma_\mu R^\mu N_R^*.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Die gesamte baryonische Lagrangedichte würde daher lauten:

$$\mathcal{L}_{bar} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{N^*}.\tag{4.43}$$

Einen Mischterm zwischen beiden Feldern ist in diesem Fall nicht vorhanden.

4.2.6 Zusammenfassung: Die Lagrangedichte im Spiegelmodell

Die gesamte Lagrangedichte muss die freien Lagrangedichten der Nukleonen und der Mesonenfelder, sowie die Kopplung von Nukleonen und Mesonen beinhalten. Die Lagrangedichte, die im Rahmen dieser Dissertation verwendet wird, setzt sich aus dem mesonischen Anteils Gl. (3.4) und dem baryonischen Anteil Gl. (4.10) zusammen und lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{mes} + \mathcal{L}_{bar} = \\ &\text{Tr} \left[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 \\ &\quad + c (\det \Phi^\dagger + \det \Phi) + h_0 \text{Tr}[(\Phi^\dagger + \Phi)] \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ &\quad + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\ &\quad + \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2R} \\ &\quad - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi^\dagger \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi \Psi_{2L}) \\ &\quad - m_0 (\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}),\end{aligned}\tag{4.44}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{a=0}^3 \phi_a t_a = (\sigma + i\eta_N) t^0 + (\mathbf{a}_0 + i\boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{t} , \\
V^\mu &= \sum_{a=0}^3 V_a^\mu t_a = \omega^\mu t^0 + \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \mathbf{t} , \\
A^\mu &= \sum_{a=0}^3 A_a^\mu t_a = f_1^\mu t^0 + \mathbf{a}_1^\mu \cdot \mathbf{t} , \\
D^\mu \Phi &= \partial^\mu \Phi + ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi) , \\
D_{1R}^\mu &= \partial^\mu - ic_1 R^\mu , \quad D_{1L}^\mu = \partial^\mu - ic_1 L^\mu , \\
D_{2R}^\mu &= \partial^\mu - ic_2 R^\mu , \quad D_{2L}^\mu = \partial^\mu - ic_2 L^\mu , \\
\Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (N e^{\delta/2} + \gamma_5 N^* e^{-\delta/2}) , \\
\Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} (\gamma_5 N e^{-\delta/2} - N^* e^{\delta/2}) .
\end{aligned}$$

4.3 Die Lagrangedichte für Nukleonen im naiven Assignment

Abschließend wird das erweiterte Modell, das ebenfalls die (Axial-)Vektormesonen einschließt, im Rahmen des naiven Assignments untersucht. Die Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{naive}} &= \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2R} \\
&+ c_{12} \bar{\Psi}_{1R} \gamma_\mu R^\mu \Psi_{2R} + c_{12} \bar{\Psi}_{2R} \gamma_\mu R^\mu \Psi_{1R} - c_{12} \bar{\Psi}_{1L} \gamma_\mu L^\mu \Psi_{2L} - c_{12} \bar{\Psi}_{2L} \gamma_\mu L^\mu \Psi_{1L} \\
&- \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi^\dagger \Psi_{2L}) \\
&+ \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{2L} - \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{2R} + \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{2L} \Phi \Psi_{1R} - \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{2R} \Phi^\dagger \Psi_{1L} .
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Die Ersetzung von Ψ_1 und Ψ_2 durch die physikalischen Felder N und N^* gemäß Gl. (4.32) führt wiederum zu unphysikalischen Propagatoren, ganz analog dazu, wie es im mesonischen Sektor nach der Verschiebung der axialen Felder erfolgte. Um Terme der Form $\varphi \bar{N} N^*$ bzw. $\varphi \bar{N}^* N$ zu eliminieren, wählt man für den Mischungswinkel:

$$\sinh \delta = \frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{2\hat{g}_{12}} . \tag{4.46}$$

Somit verschwinden die Mischungen zwischen den beiden Nukleonen:

$$\mathcal{L}_{N^* N \varphi} = \frac{1}{4 \cosh \delta} \{ \bar{N} [-(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \hat{g}_{12} e^\delta] \gamma_5 \varphi N^* + \bar{N}^* [\hat{g}_1 + \hat{g}_2 - \hat{g}_{12} e^\delta] \gamma_5 \varphi N \} = 0 . \tag{4.47}$$

Zur besseren Übersicht werden nachfolgend lediglich die Kopplungen, die für die weiteren Studien interessant sind, berücksichtigt, nämlich die zwischen den Nukleonen und dem Pion und den Nukleonen und dem σ -Meson. Die Kopplung an den Gradienten des Pions

resultiert aus der Verschiebung des Axialfeldes, $\mathbf{a}_{1\mu} \rightarrow \mathbf{a}_{1\mu} + w\partial_\mu \boldsymbol{\pi}$, s. Kapitel 3. Dies sind die Terme proportional zu Zw .

Die Lagrangedichte kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{naive}} = & \bar{N}i\gamma_\mu\partial^\mu N + \bar{N}^*i\gamma_\mu\partial^\mu N^* - \tilde{g}_1\bar{N}(\sigma + Zi\gamma_5\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})N - \tilde{g}_2\bar{N}^*(\sigma + Zi\gamma_5\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})N^* \\ & - Zw\tilde{c}_1\bar{N}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N - Zw\tilde{c}_2\bar{N}^*\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N^* \\ & - Zw\tilde{c}_{12}\left(\bar{N}\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N^* + \bar{N}^*\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N\right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Folgende Punkte sind zu beachten:

- Durch die geeignete Wahl des Mischungswinkels, Gl. (4.46), sind alle Terme der Form $\varphi\bar{N}N^*$ bzw. $\varphi\bar{N}^*N$ verschwunden. Damit wurden gleichfalls auch die Kopplungen der Art $\bar{N}i\gamma_5\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N^*$ bzw. $\bar{N}^*i\gamma_5\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N$ eliminiert.
- Die Kopplung zwischen den Nukleonen und dem Pion hat die Form $\bar{N}^*\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}N + \text{h.c.}$ und stammt ausschließlich aus der Verschiebung des a_1 -Mesons um $w\partial_\mu\boldsymbol{\pi}$.
- Die „geschlängelten“ Kopplungskonstanten in Gl. (4.48) sind Kombinationen aus den ursprünglichen Konstanten in (4.45), gegeben durch die Wahl des Mischungswinkels (4.46). Dies führt zu einer Reduzierung der Anzahl der Parameter von sieben, nämlich $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_{12}, c_1, c_2, c_{12}$ und δ , auf fünf Parameter, $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ und \tilde{c}_{12} .

Die „geschlängelten“ Kopplungskonstanten hängen in folgender Form von den ursprünglichen ab:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \frac{-1}{4 \cosh\delta} (2\hat{g}_{12} + \hat{g}_1e^\delta - \hat{g}_2e^{-\delta}), \\ \tilde{g}_2 &= \frac{-1}{4 \cosh\delta} (2\hat{g}_{12} - \hat{g}_1e^{-\delta} + \hat{g}_2e^\delta), \\ \tilde{c}_1 &= \frac{1}{4 \cosh\delta} (2c_{12} + c_1e^\delta + c_2e^{-\delta}), \\ \tilde{c}_2 &= \frac{1}{4 \cosh\delta} (-2c_{12} + c_1e^{-\delta} + c_2e^\delta), \\ \tilde{c}_{12} &= \frac{1}{4 \cosh\delta} (-2c_{12} \sinh \delta + c_1 - c_2). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die chirale Symmetrie wird durch einen von Null verschiedenen Vakuumserwartungswert (v.e.v) des σ -Mesons gebrochen, $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$. Dies generiert die Massen der Nukleonen, die aus der Lagrangedichte (4.48) unmittelbar abgelesen werden können:

$$m_N = \tilde{g}_1\varphi \quad \text{und} \quad m_{N^*} = \tilde{g}_2\varphi. \quad (4.50)$$

Auf diese Weise sind \tilde{g}_1 und \tilde{g}_2 direkt zu bestimmen, da die Nukleonenmassen und der v.e.v des σ -Mesons, $\varphi = Zf_\pi$, bekannt sind.

Die drei restlichen Parameter können mühelos aus den axialen Kopplungskonstanten des Nukleons und des Partners, sowie der Zerfallsbreite aus dem Zerfall $N^* \rightarrow N\pi$ berechnet

werden.

Nachdem die Lagrangedichten für die beteiligten Teilchen im Modell bekannt sind, können sie genutzt werden, um Eigenschaften über die Teilchen herauszufinden.

In Kapitel 5 wird als Erstes die Streuung zwischen Nukleonen und Mesonen untersucht, im darauffolgenden Kapitel 6 die Zerfallsbreite der baryonischen Resonanz N^* berechnet.

5. Pion-Nukleon-Streuung

Die Streuung zwischen Pion und Nukleon ist schon lange ein wichtiger Aspekt im Studium niederenergetischer Eigenschaften von Hadronen und wurde seither mit einer Vielzahl von Näherungen analysiert, siehe z.B. Refs. [26, 27, 28, 29, 30]. In diesem Kapitel wird die Streuung zwischen Pion und Nukleon beschrieben und die Streulängen bestimmt. Es werden die elastischen Prozesse, wie z.B. der Stoß von einem positiv geladenen Pion π^+ an einem Proton p , $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$, erläutert, sowie solche bei denen ein Ladungsaustausch stattfindet. Letzteres ist z.B. bei der Streuung eines negativ geladenen Pions an einem Proton $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ der Fall. Das π^- wandelt sich in ein neutrales Pion π^0 , das Proton in ein Neutron n um. Die Streuamplituden werden durch Variablen ausgedrückt, die zur theoretischen Beschreibung geeignet sind. Als solche haben sich die Mandelstam-Variablen (nach dem Physiker Stanley Mandelstam) erwiesen, welche den Impulsübertrag in einem Streuprozess widerspiegeln. Ausgehend von den Streuamplituden können die Streulängen deduziert werden. Sie geben Auskunft über die Stärke des Wechselwirkungspotentials zwischen Pion und Nukleon.

5.1 Kinematik und Amplituden der 2-Teilchen-Streuung

Die im Experiment zugänglichen Größen sind die Energie des einlaufenden Teilchens und der Winkel des gestreuten Teilchens. Diese Größen sind zwar anschaulich, jedoch zur theoretischen Beschreibung des Prozesses häufig nicht geeignet. Skalarprodukte von Vierervektoren sind relativistisch invariant, daher empfiehlt es sich, den Streuprozess mit Hilfe solcher Größen zu beschreiben. Anhand von Abb. 5.1 sieht man, dass der Streuprozess durch sechs Lorentz-Invarianten gekennzeichnet ist: $P_i P_j$ mit $i \neq j = A, B, C, D$. Aufgrund der vier Gleichungen, $P_A + P_B = P_C + P_D$, die die Viererimpulserhaltung beschreiben, verbleiben genau zwei unabhängige Variablen.

Die geeigneten Lorentz-Invarianten sind die sogenannten *Mandelstam-Variablen*, s , t und u . Sie beschreiben den Teilchenaustausch in den gleichnamigen Kanälen und sind ein Maß für den Impulsübertrag bei der Streuung. Sie sind wie folgt definiert:

$$s = (P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2 \quad \text{Quadrat der Schwerpunktsenergie,}$$

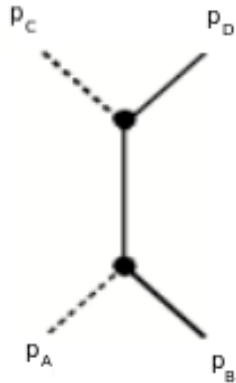
$$t = (P_A - P_C)^2 = (P_B - P_D)^2 \quad \text{Quadrat des Impulsübertrages von A nach C bzw. von B nach D bei Teilchenaustausch im t-Kanal,}$$

$$u = (P_A - P_D)^2 = (P_B - P_C)^2 \quad \text{Quadrat des Impulsübertrages von A nach D bzw. von B nach C bei Teilchenaustausch im u-Kanal.}$$

Beispiele für die drei Arten von Streuprozessen werden in nachfolgender Abb. 5.2 dargestellt.

Es gilt für die Teilchen A, B, C und D , die am Streuprozess in Abb. 5.1 beteiligt sind und die Massen m_A, m_B, m_C und m_D haben:

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \quad (5.1)$$



Teilchen 1 mit Anfangs-Viererimpuls P_A stößt elastisch mit Teilchen 2 mit Viererimpuls P_B . Nach der Streuung besitzt Teilchen 1 den Viererimpuls P_C , Teilchen 2 den Viererimpuls P_D . Aufgrund der Impulserhaltung gilt, dass die Summe der Anfangsimpulse gleich der Summe der Endimpulse ist, $P_A + P_B = P_C + P_D$.

Abbildung 5.1: Zwei-Teilchen-Streuprozess.

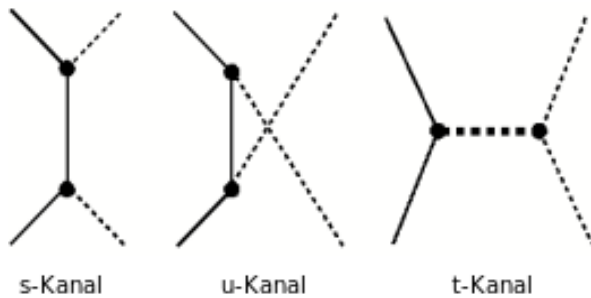


Abbildung 5.2: Zwei-Teilchen-Streuprozess in den verschiedenen Kanälen.

Die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen findet im s -, im u - oder im t -Kanal statt. Im s -Kanal wird der Impuls von den beiden Teilchen im Anfangszustand zu den beiden Teilchen im Endzustand übertragen. Im t -Kanal wird der Impuls zwischen den Teilchen ausgetauscht (Mesonenaustausch). Ein Impulsaustausch findet auch im u -Kanal statt, jedoch kann das Verstehen dieses Prozesses Schwierigkeiten bereiten, da das gestreute Teilchen ausläuft, noch bevor es einläuft.

Für die Viererimpulse gilt die Beziehung:

$$P_i P^i = m_i^2. \quad (5.2)$$

Nachfolgend wird die Berechnung der Streuamplitude erläutert. Ihre allgemeine Form lautet für Pion-Nukleon-Streuung [30]:

$$T_{ab} = \left[A^{(+)} + \frac{1}{2}(q_1^\mu + q_2^\mu) \gamma_\mu B^{(+)} \right] \delta_{ab} + \left[A^{(-)} + \frac{1}{2}(q_1^\mu + q_2^\mu) \gamma_\mu B^{(-)} \right] i \epsilon_{bac} \tau_c. \quad (5.3)$$

Die Amplituden A und B , ausgedrückt durch die Mandelstam-Variablen s und t , lassen sich direkt aus Diagrammen, wie z.B. in Abb. 5.2, berechnen. Die Diagramme stellen den Ablauf der Streuung und der Propagation der Teilchen auf Baumgraphenniveau dar. Diesem Ablauf kann man, entsprechend den Feynman-Regeln, wiederum analytische Ausdrücke zuordnen, aus denen A und B (nahezu) unmittelbar abgelesen werden können.

Die Indizes a und b beziehen sich auf den Isospin der Anfangs- und der Endzustände. Im ersten Term, gekennzeichnet durch den Exponenten $(+)$, sind die Amplituden enthalten, die zu den Prozessen gehören, bei denen sich der Isospin nicht ändert. Der zweite Term, gekennzeichnet durch den Exponenten $(-)$, beinhaltet die Prozesse, bei denen sich der Isospin um 1 ändert. Dies wird auch dadurch ersichtlich, dass der Teil, der den Isospin beibehält, mit einem Kronecker-Delta, δ_{ab} , versehen ist. Der Teil, bei dem sich der Isospin ändert, ist dagegen mit dem Epsilon-Tensor, ϵ_{bac} , versehen.

Die Impulse q_1^μ und q_2^μ entsprechen P_A und P_C in der obigen Beschreibung, also dem Anfangs- und Endimpuls einer der beiden Streupartner.

Des Weiteren stehen, wie gemeinhin, γ^μ für die Dirac-Matrizen und τ_c für die Pauli-Matrizen.

Um die Amplituden A und B ablesen zu können, muss man das Matrixelement \mathcal{T}_{ab} für die Streuung bestimmen. Mit Hilfe der Amplituden A und B lassen sich nun die Streulängen berechnen. Die Streulängen sind die zentralen Größen bei der Analyse von Streuproblemen und definieren die effektive Querschnittsfläche der Streuung. Die Massen m_1 und m_2 sind wieder die Massen der beiden Streupartner. Die Streulängen $a_0^{(\pm)}$ für s -Wellen-Streuung¹ lauten:

$$a_0^{(\pm)} = \frac{1}{4\pi(1 + m_2/m_1)} \left(A_0^{(\pm)} + m_2 B_0^{(\pm)} \right). \quad (5.4)$$

Für die p -Wellen-Streuvolumina gelten die Ausdrücke:

$$a_{1(+)}^{(\pm)} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi(1 + m_2/m_1)} C_0^{(\pm)} \quad (5.5)$$

und

$$a_{1(-)}^{(\pm)} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi(1 + m_2/m_1)} C_0^{(\pm)} - \frac{1}{16\pi m_1^2(1 + m_2/m_1)} \left(A_0^{(\pm)} - (2m_1 + m_2) B_0^{(\pm)} \right), \quad (5.6)$$

¹Dieses s sei nicht mit der Mandelstam-Variable zu verwechseln. Die s -Wellen-Streuung steht für Streuprozesse mit $l = 0$.

wobei:

$$C_0^{(\pm)} = \frac{\partial}{\partial t} (A^{(\pm)} + m_2 B^{(\pm)}) \Big|_{t=0}. \quad (5.7)$$

Der Index 0 bedeutet Auswertung der Ergebnisse an der Schwelle, d.h. an dem Punkt, an dem die Mandelstam-Variablen die Werte $s = (m_1 + m_2)^2$, $t = 0$, $u = (m_1 - m_2)^2$ annehmen.

Der Exponent (+) bzw. (−) beim Index 1 in den Gln. (5.5) und (5.6) bezieht sich auf das Rechenzeichen bei der Berechnung des Gesamtdrehimpulses aus Bahndrehimpuls l und Spin (hier: $S = \frac{1}{2}$): $j = l \pm \frac{1}{2}$. Für Gl. (5.5) gilt demnach: $j = l + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, entsprechend gilt für Gl. (5.6): $j = l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Die s -Wellen-Streulänge hat zwar die Dimension einer Länge (MeV^{-1}), gibt aber nur Auskunft über die Stärke des Potentials, nicht über dessen Reichweite. Um hierüber Informationen zu erhalten, definiert man die effektive Reichweite für s -Wellen:

$$r_0^{(\pm)} = \frac{1}{4\pi(1 + m_2/m_1)} \left\{ -2C_0^{(\pm)} + \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} D_0^{(\pm)} - \frac{1}{2m_1 m_2} \left[\left(1 - \frac{m_2}{2m_1}\right) A_0^{(\pm)} - \left(m_1 + \frac{m_2^2}{2m_1}\right) B_0^{(\pm)} \right] \right\},$$

mit

$$D_0^{(\pm)} = \frac{\partial}{\partial s} (A^{(\pm)} + m_2 B^{(\pm)}) \Big|_{t=0}. \quad (5.8)$$

5.2 Streuamplituden der Pion-Nukleon-Streuung

5.2.1 Lagrangedichte

Um die Pion-Nukleon-Streuung zu untersuchen, kann der in Abschnitt 5.1 eingeführte Formalismus angewendet werden. In diesem Abschnitt wird anhand einer Lagrangedichte mit beliebigen Kopplungskonstanten veranschaulicht, wie man bei der Ermittlung der Streuamplituden vorzugehen hat. Die Terme sind den Lagrangedichten Gl. (3.4) und Gl. (4.10) entnommen. Je nachdem, welcher Fall untersucht werden soll, können die „richtigen“ Ausdrücke für die Kopplungskonstanten eingesetzt werden. Die Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N} = & -ig_{N\pi} \bar{N} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5 N + g_{N\partial\pi} \bar{N} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N \\ & - ig_{N^*\pi} \bar{N}^* \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N + g_{N^*\pi\partial} \bar{N}^* \gamma^\mu \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N \\ & - ig_{NN^*\pi} \bar{N} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N^* + g_{NN^*\partial\pi} \bar{N} \gamma^\mu \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N^* \\ & - g_{\pi\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu) + g_{\partial\pi\partial\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi}) \\ & + g_{N\rho} \bar{N} \gamma^\mu \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} N \\ & - g_{\pi\sigma} \sigma \boldsymbol{\pi}^2 + g_{\partial\pi\sigma} \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + g_{\partial\sigma\pi} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ & - g_{N\sigma} \sigma \bar{N} N. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Diese Lagrangedichte setzt sich aus folgenden Termen zusammen:

Der erste Term beschreibt die pseudoskalare (oder γ_5 -) Kopplung von Pion und Nukleon, der zweite Term die pseudovektorielle (oder *Gradienten*-) Kopplung von Pion und Nukleon, dritter und vierter Term beschreiben die Kopplungen zwischen Pion, Nukleon und der baryonischen Resonanz N^* . Aus diesen Termen kann die elastische Streuung zwischen Pion und Nukleon berechnet werden, wobei einmal ein Nukleon ausgetauscht wird und einmal seine Resonanz N^* . Dies sind die Prozesse im s - und im u -Kanal.

Die darauffolgenden Terme beschreiben die Wechselwirkung von Pion und Nukleon jeweils mit den Mesonen σ und ρ . Aus diesen Termen kann die Streuung von Pion und Nukleon im t -Kanal mit Mesonen als intermediären Zustände ermittelt werden.

Auf welchem Weg gelangt man jetzt von der Lagrangedichte Gl. (5.9) zu den Streuamplituden?

Als Erstes müssen die Vertizes aus der Lagrangedichte ermittelt werden.

5.2.2 Matricelement und Amplituden

Soll für einen Streuprozess das Streu-Matricelement \mathcal{T}_{ab} ausgerechnet, sind zuallererst folgende *Feynman-Regeln* zu beachten:

- (i) Notation für externe Fermionen-Linien:
in den Vertex einlaufendes Fermion: u ,
aus dem Vertex auslaufendes Fermion: \bar{u} .
- (ii) Vertexfaktor: Der Vertex wird mit einem Faktor i multipliziert.
- (iii) Energie- und Impulserhaltung am Vertex erfordern jeweils einen Faktor $\int \prod_i \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})$, wobei, wenn eine Ableitung am Vertex ist, die Viererimpulse $p_{i\mu}$ mit $-ip_{i\mu}$ einlaufen bzw. mit $+ip_{i\mu}$ auslaufen.
- (iv) Den Faktor $(s - m_i^2)^{-1}$ für den Propagator \mathcal{P} mit Viererimpuls $p_{1\mu} + q_{1\mu}$, wobei $i = N, N^*$ im s -Kanal. Entsprechend muss im u -Kanal ein Faktor $(u - m_i^2)^{-1}$ mit Viererimpuls $p_{1\mu} - q_{2\mu}$ eingeführt werden. Dabei ist $p_{1\mu}$ der Impuls des Nukleons und $q_{1\mu}$ bzw. $q_{2\mu}$ der Impuls des Pions.
- (v) Symmetrisierung.

Aus der Lagrangedichte können sechs Wechselwirkungen abgelesen werden: π - N , π - N^* , π - σ , π - ρ , N - σ , N - ρ . Die zugehörigen Vertexfunktionen werden nun ermittelt. Unter Anwendung der Feynman-Regeln erhält man die korrekten Vertizes². In der folgenden Abb. 5.3 stellen die durchgezogenen Linien die Nukleonen N dar, die dünn gestrichelten die Pionen. Die intermediären Zustände σ , ρ und N^* werden jeweils durch die dick gestrichelten, die geschweiften und die doppelten Linien dargestellt. Rechts daneben stehen die Vertizes. Die Viererimpulse $\pm q_{i,\mu}$ stammen aus der pseudovektoriellen Kopplung von Nukleon und Pion, je nachdem, ob das Pion ein oder ausläuft, bekommt es den Impuls $-q_{1\mu}$ bzw. $+q_{2\mu}$.

²Genaue Berechnung im Anhang.

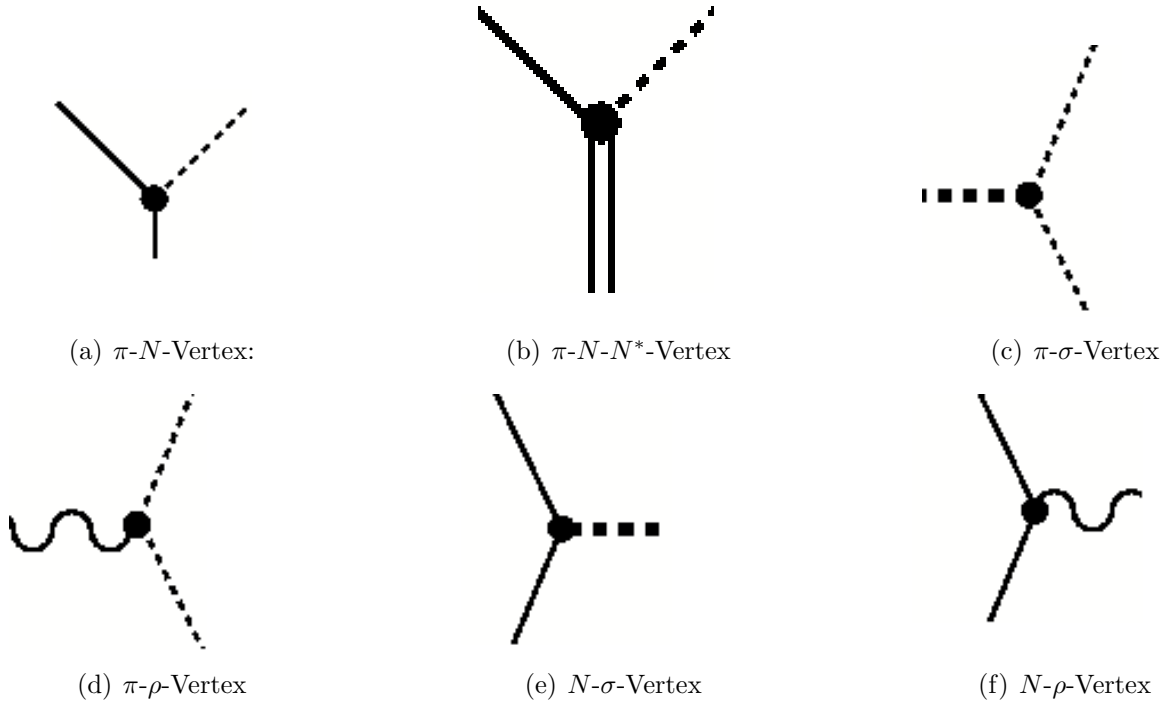


Abbildung 5.3: Die verschiedenen Vertizes, die in der Pion-Nukleon-Streuung eine Rolle spielen.

Im folgenden werden die Vertizes aus Abb. 5.3 aufgeführt, sowie auch die einzelnen Kopplungen als Funktion der Parameter aus der Lagrangedichte Gl. (9.27). Sie lauten:

- (a) Pion-Nukleon-Vertex: $\tau^a \gamma_5 (g_{N\pi} \pm g_{N\partial\pi} \gamma^\mu q_{i\mu})$.
- (a.1) $g_{N\pi} = Z(4 \cosh \delta)^{-1} (\hat{g}_1 e^\delta + \hat{g}_2 e^{-\delta})$ [MeV⁰].
- (a.2) $g_{N\partial\pi} = Zw(4 \cosh \delta)^{-1} (c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})$ [MeV⁻¹].
- (b) Pion- N - N^* -Vertex: $\tau^a (-g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\mu q_{1\mu})$ für einlaufendes $\partial_\mu \pi$, bzw. $\tau^b (g_{N^*N\pi} + g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\mu q_{2\mu})$ für auslaufendes $\partial_\mu \pi$.
- (b.1) $g_{N^*N\pi} = -Z(4 \cosh \delta)^{-1} (\hat{g}_1 - \hat{g}_2)$ [MeV⁰].
- (b.2) $g_{N^*N\partial\pi} = -Zw(4 \cosh \delta)^{-1} (c_1 + c_2)$ [MeV⁻¹].
- (c) Pion-Sigma-Vertex: $2i [g_{\sigma\pi} + g_{\partial\pi\sigma} (m_\sigma^2 - \frac{t}{2}) - g_{\partial\sigma\pi} \frac{t}{2}] \delta_{ab}$.
- (c.1) $g_{\sigma\pi} = Z(2f\pi)^{-1} (m_\sigma^2 - Z^{-2} m_\pi^2)$ [MeV].
- (c.2) $g_{\partial\pi\sigma} = Z^2 g_1 w (Z f_\pi g_1 w - 1)$ [MeV⁻¹].
- (c.3) $g_{\partial\sigma\pi} = Z^2 g_1 w$ [MeV⁻¹].
- (d) Pion-Rho-Vertex: $(g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} + g_{\rho\pi}) (q_{1\mu} + q_{2\mu}) \epsilon_{abc}$.
- (d.1) $g_{\partial\pi\partial\rho} = Z^2 g_1 w^2$ [MeV⁻²].
- (d.2) $g_{\rho\pi} = -g_1$ [MeV⁰].

(e) Nukleon-Sigma-Vertex: $-ig_{N\sigma}$.

$$(e.1) \quad g_{N\sigma} = (4 \cosh \delta)^{-1} (\hat{g}_1 e^\delta + \hat{g}_2 e^{-\delta}) [\text{MeV}^0].$$

(f) Nukleon-Rho-Vertex: $ig_{N\rho} - g_{N\partial\rho} \gamma^\mu \tau^a$.

$$(f.1) \quad g_{N\rho} = (4 \cosh \delta)^{-1} (c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta}) [\text{MeV}^0].$$

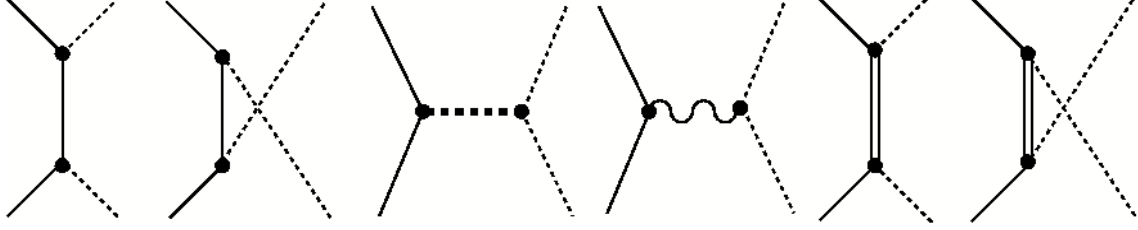


Abbildung 5.4: Pion-Nukleon-Streuung auf Baumgraphenniveau (durchgezogene Linie: N , fein gestrichelte Linie: π , dick gestrichelte Linie: σ , geschlängelte Linie: ρ , doppelte durchgezogene Linie: N^*).

Die Vertizes können so zusammengesetzt werden, dass alle Diagramme vorhanden sind, die die gewünschten Prozesse darstellen. Dies ist in Abb. 5.4 gezeigt. Die Diagramme werden „von unten nach oben“ gelesen.

Einige Rechenregeln sind noch zu beachten:

- Für die Dirac-Matrizen gilt:

$$\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}.$$

- Die Pauli-Matrizen erfüllen die Algebra: $\tau^b \tau^a = \delta_{ba} + i\epsilon_{bac} \tau^c$.
- Geschickte Umformung der Viererimpulse ergibt: $\gamma^\mu q_{1\mu} = \frac{1}{2} \gamma^\mu (q_1 + q_2)_\mu$.
- Werte der Mandelstam-Variablen an der Schwelle: $s = (m_1 + m_2)^2$, $t = 0$ und $u = (m_1 - m_2)^2$.
- Feynman-Slash-Notation: $\not{q} = \gamma^\mu q_\mu$.

Pion-Nukleon-Streuung im s - und u -Kanal

Das erste Diagramm in Abb. 5.4 stellt die Streuung von Pion $\pi(q_1)$ und Nukleon $N(p_1)$ im s -Kanal dar, mit einem intermediärem Zustand mit Impuls $p_1 + q_1$.

Das Matricelement kann nach folgender Vorschrift konstruiert werden:

$$\mathcal{T}_{ab} = \bar{u}(p_2) [\tau^b \gamma_5 (g_{N\pi} - g_{N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu})] \mathcal{P} [\tau^a \gamma_5 (g_{N\pi} + g_{N\partial\pi} \gamma^\mu q_{2\mu})] u(p_1). \quad (5.10)$$

Das Matrixelement des ersten Diagramms in Abb. 5.4 lautet folglich:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) [\tau^b \gamma_5 (g_{N\pi} - g_{N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu})] \frac{1}{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu - m_N} [\tau^a \gamma_5 (g_{N\pi} + g_{N\partial\pi} \gamma^\mu q_{2\mu})] u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) [\tau^b \gamma_5 (g_{N\pi} - g_{N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu})] \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{(p_1 + q_1)^2 - m_N^2} [\tau^a \gamma_5 (g_{N\pi} + g_{N\partial\pi} \gamma^\mu q_{2\mu})] u(p_1) \quad (5.11) \end{aligned}$$

Im Nenner des Propagators \mathcal{P} wird nun der Wert der Mandelstam-Variablen s an der Schwelle ersetzt. Multipliziert man die Terme aus, bekommt man vier Summanden, die im Folgenden einzeln berechnet werden:

1. $\bar{u}(p_2) g_{N\pi}^2 \tau^b \tau^a \gamma_5 \mathcal{P} \gamma_5 u(p_1)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi}^2 \gamma_5 \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} \gamma_5 u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi}^2 \gamma_5^2 \frac{-\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi}^2 \frac{-\gamma^\mu p_{1\mu} + m_N - \gamma^\mu q_{1\mu}}{s - m_N^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) (\delta_{ab} + i\epsilon_{bac} \tau^c) g_{N\pi}^2 \frac{-\gamma^\mu q_{1\mu}}{s - m_N^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) g_{N\pi}^2 (\delta_{ab} + i\epsilon_{bac} \tau^c) \frac{-\frac{1}{2} \gamma^\mu (q_{1\mu} + q_{2\mu})}{s - m_N^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \left[\frac{-g_{N\pi}^2 \gamma^\mu (q_{1\mu} + q_{2\mu})}{2(s - m_N^2)} \delta_{ab} - \frac{g_{N\pi}^2 \gamma^\mu (q_{1\mu} + q_{2\mu})}{2(s - m_N^2)} i\epsilon_{bac} \tau^c \right] u(p_1) . \quad (5.12) \end{aligned}$$

In dieser Berechnung wurde im vierten Schritt die Dirac-Gleichung verwendet, $(\gamma^\mu p_{1\mu} - m_N)u(p_1) = 0$. Wie man erkennen kann, hat dieser Ausdruck die Struktur von Gl. (5.3), und es kann abgelesen werden:

$$A^{(+)} = A^{(-)} = 0 \quad B^{(+)} = B^{(-)} = \frac{-g_{N\pi}^2}{s - m_N^2} . \quad (5.13)$$

2. $\bar{u}(p_2) g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \tau^b \tau^a \gamma_5 \mathcal{P} \gamma_5 \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \gamma_5 \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} \gamma_5 \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \frac{-\gamma^\mu (p_{1\mu} + q_{1\mu}) + m_N}{s - m_N^2} \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \tau^b \tau^a \frac{\not{q}_1 \not{p}_1 + m_N \not{q}_1 + m_N^2 - s}{s - m_N^2} u(p_1) . \quad (5.14) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ergibt sich durch Anwendung der oben genannten Rechenregeln. Die Dirac-Gleichung kann nun wieder genutzt werden; nach geschickter Umformung

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2) g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \tau^b \tau^a \left(\frac{2m_N \not{q}_1}{s - m_N^2} - 1 \right) u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \left\{ g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \left[\frac{2m_N}{s - m_N^2} \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) - 1 \right] \delta_{ab} \right. \\
& \left. + g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \left[\frac{2m_N}{s - m_N^2} \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) - 1 \right] i\epsilon_{bac} \tau^c \right\} u(p_1)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich nun der Beitrag zu den Streuamplituden $A^{(\pm)}$ und $B^{(\pm)}$ ablesen. Gemäß Gl. (5.3) gehört zu $A^{(\pm)}$ der jeweils zweite Summand beider Terme, zu $B^{(\pm)}$ der jeweils erste Summand:

$$A^{(+)} = A^{(-)} = -g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \quad , \quad B^{(+)} = B^{(-)} = g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \frac{2m_N}{s - m_N^2} . \tag{5.16}$$

3. $\bar{u}(p_2) g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \tau^b \tau^a \gamma_5 (-\gamma^\nu q_{2\nu}) \mathcal{P} \gamma_5 u(p_1)$:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \gamma_5 (-\gamma^\nu q_{2\nu}) \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} \gamma_5 u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a (-g_{N\pi} g_{N\partial\pi}) (-\gamma^\nu q_{2\nu}) \frac{-\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) (-g_{N\pi} g_{N\partial\pi}) \tau^b \tau^a \frac{-\not{q}_2 \not{q}_2 - \not{q}_2 \not{p}_2 - m_N^2 + s}{s - m_N^2} u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \tau^b \tau^a \left(\frac{-2m_N \not{q}_1}{s - m_N^2} + 1 \right) u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \left\{ g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \left[\frac{-2m_N}{s - m_N^2} \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) + 1 \right] \delta_{ab} \right. \\
& \left. + g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \left[\frac{-2m_N}{s - m_N^2} \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) + 1 \right] i\epsilon_{bac} \tau^c \right\} u(p_1)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Wiederum ergibt sich durch ablesen für die Beiträge zu den Amplituden:

$$A^{(+)} = A^{(-)} = -g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \quad , \quad B^{(+)} = B^{(-)} = g_{N\pi} g_{N\partial\pi} \frac{2m_N}{s - m_N^2} . \tag{5.18}$$

4. $\bar{u}(p_2) g_{N\partial\pi}^2 \tau^b \tau^a \gamma_5 (-\gamma^\nu q_{2\nu}) \mathcal{P} \gamma_5 \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1)$:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\partial\pi}^2 \gamma_5 (-\gamma^\nu q_{2\nu}) \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} \gamma_5 \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\partial\pi}^2 \gamma^\nu q_{2\nu} \frac{-\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_N}{s - m_N^2} \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a g_{N\partial\pi}^2 \frac{\frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) (-s - 3m_N^2) + 2(s - m_N^2) m_N}{s - m_N^2} u(p_1) = \\
& \bar{u}(p_2) \left\{ g_{N\partial\pi}^2 \left[\frac{-1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) - \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) \frac{4m_N^2}{s - m_N^2} + 2m_N \right] \delta_{ab} \right. \\
& \left. + g_{N\partial\pi}^2 \left[\frac{-1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) - \frac{1}{2} (\not{q}_1 + \not{q}_2) \frac{4m_N^2}{s - m_N^2} + 2m_N \right] i\epsilon_{bac} \tau^c \right\} u(p_1) .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Die Beiträge zu den Amplituden lauten:

$$A^{(+)} = A^{(-)} = g_{N\partial\pi}^2 2m_N, \quad B^{(+)} = B^{(-)} = -g_{N\partial\pi}^2 \left(1 + \frac{4m_N^2}{s - m_N^2}\right). \quad (5.20)$$

Auf diese Weise wurden demnach alle Amplituden, die im s -Kanal eine Rolle spielen, berechnet. Jetzt müssen die Rechnungen für den u -Kanal wiederholt werden. Sie verlaufen absolut analog, zwei Dinge müssen jedoch beachtet werden:

1. Das Pion mit Isospin b läuft aus, *bevor* es mit Isospin a hineinläuft, was sich auf den Isospin-ändernden Teil auswirkt. Mithin gilt nun: $\tau^a \tau^b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc} \tau^c$ und $\epsilon_{abc} = -\epsilon_{bac}$. Dies bedeutet, dass die Amplituden $A_0^{(-)}$ und $B_0^{(-)}$ ihre Vorzeichen im Vergleich zum s -Kanal umdrehen.
2. Der Propagator besitzt den Impuls $p_1 - q_2$. In diesem Fall ist $(p_1 - q_2)^2$ durch die Mandelstam-Variablen u zu ersetzen.

Pion-Nukleon-Streuung im t -Kanal

Bei Streuung im t -Kanal werden zwischen Pion und Nukleon zum einen das σ -, zum anderen das ρ -Meson ausgetauscht. Diese Mesonen sind demnach die intermediären Teilchen, deren Propagatoren entsprechend in die Berechnungen der Diagramme eingesetzt werden müssen. In Abb. 5.4 sind handelt es sich um die beiden mittleren Diagramme.

Betrachten wir als Erstes den σ -Meson-Austausch. Die Terme in der Lagrangedichte, die berücksichtigt werden müssen, lauten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N \sigma} = & -g_{N\sigma} \sigma \bar{N} N - g_{\pi\sigma} \sigma \boldsymbol{\pi}^2 \\ & + g_{\partial\pi\sigma} \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + g_{\partial\sigma\pi} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Aus diesen Termen ergibt sich für den Pion-Sigma-Vertexoperator:

$$-2iZ^2 \left[-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma} \left(m_\pi^2 - \frac{t}{2} \right) - g_{\partial\sigma\pi} \frac{t}{2} \right] \delta_{ab}, \quad (5.22)$$

und für den Nukleon-Sigma-Vertexoperator entsprechend:

$$-ig_{N\sigma}. \quad (5.23)$$

Demnach lautet das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) (-ig_{N\sigma}) \frac{1}{t - m_\sigma^2} \left\{ -2iZ^2 \left[-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma} \left(m_\pi^2 - \frac{t}{2} \right) - g_{\partial\sigma\pi} \frac{t}{2} \right] \delta_{ab} \right\} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \left\{ -g_{N\sigma} Z^2 \left[-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma} \left(m_\pi^2 - \frac{t}{2} \right) - g_{\partial\sigma\pi} \frac{t}{2} \right] \frac{1}{t - m_\sigma^2} \delta_{ab} \right\} u(p_1). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass zwischen den zwei Spinoren des Nukleons genau die Amplitude $A^{(+)}$ steht:

$$A^{(+)} = -g_{N\sigma} Z^2 \left[-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma} \left(m_\pi^2 - \frac{t}{2} \right) - g_{\partial\sigma\pi} \frac{t}{2} \right] \frac{1}{t - m_\sigma^2}. \quad (5.25)$$

Da das σ -Meson selbst keinen Isospin trägt, ist es verständlich, dass es auch nur zu einer Isospin-erhaltenden Amplitude beitragen kann, im Gegensatz zum ρ -Meson, welches Isospin $I = 1$ besitzt und dessen Austausch als nächstes berechnet werden soll.

Die relevanten Terme sind:

$$\mathcal{L}_{\pi N\rho} = g_{N\rho} \bar{N} \gamma^\mu \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau} N - g_{\pi\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu) + g_{\partial\pi\partial\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi}), \quad (5.26)$$

mit:

$$- \left(g_{\pi\rho} + g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} \right) (q_{1\mu} + q_{2\mu}) \epsilon_{bac}, \quad (5.27)$$

für den Pion-Rho-Vertex, und:

$$ig_{N\rho} \gamma_\nu \tau^c \quad (5.28)$$

für den Nukleon-Rho-Vertex. Damit lautet das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) (ig_{N\rho} \gamma_\nu \tau^c) \frac{-g^{\mu\nu}}{t - m_\rho^2} \left(-g_{\pi\rho} - g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} \right) (q_{1\mu} + q_{2\mu}) \epsilon_{bac} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) g_{N\rho} \left(-g_{\pi\rho} - g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} \right) \frac{-1}{t - m_\rho^2} \frac{\not{q}_1 + \not{q}_2}{2} i \epsilon_{bac} \tau^c u(p_1). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Es kann unmittelbar abgelesen werden:

$$B^{(-)} = g_{N\rho} \left(g_{\pi\rho} + g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} \right) \frac{1}{t - m_\rho^2}. \quad (5.30)$$

Pion-Nukleon-Streuung mit der Resonanz N^* als intermediäres Teilchen

Abschließend folgen Ausführungen zu den beiden letzten Diagrammen in Abb. 5.4, in denen die baryonische Resonanz N^* ausgetauscht wird. Bei diesem Austausch ist zu beachten, dass nun im Nenner des Propagators die Masse m_{N^*} der Resonanz steht. Das Matrixelement wird wie vorher konstruiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ab} &= \bar{u}(p_2) \tau^b (g_{N^*N\pi} + g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu}) \mathcal{P}_{N^*} \tau^a (-g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\alpha q_{1\alpha}) u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \tau^b (g_{N^*N\pi} + g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu}) \frac{1}{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_{N^*}^*} \tau^a (-g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\alpha q_{1\alpha}) u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \tau^b (g_{N^*N\pi} + g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu}) \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_{N^*}^*}{(p_1 + q_1)^2 - m_{N^*}^2} \tau^a (-g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\alpha q_{1\alpha}) u(p_1) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Terme werden nun wieder im Einzelnen berechnet:

1. $\bar{u}(p_2) \tau^b g_{N^*N\pi} \mathcal{P}_{N^*} \tau^a (-g_{N^*N\pi}) u(p_1)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a (-g_{N^*N\pi}^2) \frac{\gamma^\mu (p_1 + q_1)_\mu + m_{N^*}^*}{s - m_{N^*}^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a (-g_{N^*N\pi}^2) \frac{m_N + m_{N^*}^* + \not{q}_1}{s - m_{N^*}^2} u(p_1) = \\ \bar{u}(p_2) \tau^b \tau^a (-g_{N^*N\pi}^2) \left[\frac{m_N + m_{N^*}^*}{s - m_{N^*}^2} + \frac{\not{q}_1}{s - m_{N^*}^2} \right] u(p_1). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Die Beiträge zu den Amplituden sind:

$$A^{(+)} = A^{(-)} = \frac{-g_{N^*N\pi}^2(m_N + m_N^*)}{s - m_{N^*}^2}, \quad B^{(+)} = B^{(-)} = \frac{-g_{N^*N\pi}^2}{s - m_{N^*}^2}. \quad (5.33)$$

2. $\bar{u}(p_2)\tau^b g_{N^*N\pi} \mathcal{P}_{N^*} \tau^a (-g_{N^*N\partial\pi}) \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1)$:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\tau^b g_{N^*N\pi} \frac{\gamma^\mu(p_1 + q_1)_\mu + m_N^*}{s - m_{N^*}^2} \tau^a (-g_{N^*N\partial\pi}) \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\ & \bar{u}(p_2)\tau^b \tau^a (-g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi}) \left[\left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right) + \not{q}_1 \frac{m_N^* - m_N}{s - m_{N^*}^2} \right] u(p_1), \end{aligned} \quad (5.34)$$

womit sich die folgenden Beiträge zu den Amplituden ergeben:

$$\begin{aligned} A^{(+)} &= A^{(-)} = -g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi} \left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right), \\ B^{(+)} &= B^{(-)} = g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi} \frac{m_N - m_N^*}{s - m_{N^*}^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

3. $\bar{u}(p_2)\tau^b g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu} \mathcal{P}_{N^*} \tau^a (-g_{N^*N\pi}) u(p_1)$:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\tau^b (-g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi}) \gamma^\nu q_{2\nu} \frac{\gamma^\mu(p_1 + q_1)_\mu + m_N^*}{s - m_{N^*}^2} \tau^a u(p_1) = \\ & \bar{u}(p_2)\tau^b \tau^a (-g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi}) \left[\left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right) + \not{q}_2 \frac{m_N^* - m_N}{s - m_{N^*}^2} \right] u(p_1). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Beiträge zu den Amplituden lauten:

$$\begin{aligned} A^{(+)} &= A^{(-)} = -g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi} \left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right), \\ B^{(+)} &= B^{(-)} = g_{N^*N\pi} g_{N^*N\partial\pi} \frac{m_N - m_N^*}{s - m_{N^*}^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

4. $\bar{u}(p_2)\tau^b g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\nu q_{2\nu} \mathcal{P}_{N^*} \tau^a (-g_{N^*N\partial\pi}) \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1)$:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\tau^b (-g_{N^*N\partial\pi}^2) \gamma^\nu q_{2\nu} \frac{\gamma^\mu(p_1 + q_1)_\mu + m_{N^*}}{s - m_{N^*}^2} \tau^a \gamma^\alpha q_{1\alpha} u(p_1) = \\ & \bar{u}(p_2)\tau^b \tau^a (-g_{N^*N\partial\pi}^2) \left\{ - \left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right) (m_N - m_{N^*}) + \right. \\ & \left. \not{q}_2 \left[1 + \frac{(m_{N^*} - m_N)^2}{s - m_{N^*}^2} \right] \right\} u(p_1), \end{aligned} \quad (5.38)$$

was die Beiträge:

$$\begin{aligned} A^{(+)} &= A^{(-)} = g_{N^*N\partial\pi}^2 \left(1 - \frac{m_N^2 - m_{N^*}^2}{s - m_{N^*}^2} \right) (m_N - m_{N^*}), \\ B^{(+)} &= B^{(-)} = (-g_{N^*N\partial\pi}^2) \left[1 + \frac{(m_{N^*} - m_N)^2}{s - m_{N^*}^2} \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

liefert.

5.2.3 Ergebnisse: die Amplituden

Die Amplituden sind nun problemlos abzuleiten und das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
A^{(+)} &= 4g_{N\partial\pi}(g_{N\partial\pi}m_N - g_{N\pi}) - g_{N\sigma}Z^2 \left[-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma}(m_\pi^2 - \frac{t}{2}) - g_{\partial\sigma\pi}\frac{t}{2} \right] \frac{1}{t - m_\sigma^2} , \\
A^{(-)} &= 0 , \\
B^{(+)} &= -(g_{N\pi} - 2m_N g_{N\partial\pi})^2 \left(\frac{1}{s - m_N^2} - \frac{1}{u - m_N^2} \right) , \\
B^{(-)} &= -2g_{N\partial\pi}^2 - (g_{N\pi} - 2m_N g_{N\partial\pi})^2 \left(\frac{1}{s - m_N^2} + \frac{1}{u - m_N^2} \right) \\
&\quad + g_{N\rho}(g_{\pi\rho} + g_{\partial\pi\partial\rho}\frac{t}{2}) \frac{1}{t - m_\rho^2} .
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Amplituden, zu denen der Austausch der Resonanz N^* beiträgt:

$$\begin{aligned}
A^{(+)} &= 2g_{N^*N\partial\pi}^2 - 2g_{N^*N\partial\pi}g_{N^*N\pi} \\
&\quad - \frac{1}{m_N + m_{N^*}} [g_{N^*N\pi}(m_N + m_{N^*}) + g_{N^*N\partial\pi}(m_N^2 - m_{N^*}^2)]^2 \left(\frac{1}{s - m_{N^*}^2} + \frac{1}{u - m_{N^*}^2} \right) , \\
A^{(-)} &= \frac{-1}{m_N + m_{N^*}} [g_{N^*N\pi}(m_N + m_{N^*}) + g_{N^*N\partial\pi}(m_N^2 - m_{N^*}^2)]^2 \left(\frac{1}{s - m_{N^*}^2} - \frac{1}{u - m_{N^*}^2} \right) , \\
B^{(+)} &= -[g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi}(m_{N^*} - m_N)]^2 \left(\frac{1}{s - m_{N^*}^2} - \frac{1}{u - m_{N^*}^2} \right) , \\
B^{(-)} &= -[g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi}(m_{N^*} - m_N)]^2 \left(\frac{1}{s - m_{N^*}^2} + \frac{1}{u - m_{N^*}^2} \right) - 2g_{N^*N\partial\pi}^2 .
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Auswertung an der Schwelle liefert:

$$\begin{aligned}
A^{(+)} &= 4g_{N\partial\pi}(g_{N\partial\pi}m_N - g_{N\pi}) + \frac{g_{N\sigma}Z^2}{m_\sigma^2}(-g_{\pi\sigma} + g_{\partial\pi\sigma}m_\pi^2) , \\
A^{(-)} &= 0 , \\
B^{(+)} &= (g_{N\pi} - 2m_N g_{N\partial\pi})^2 \frac{4m_N}{m_\pi(m_\pi^2 - 4m_N^2)} , \\
B^{(-)} &= -2g_{N\partial\pi}^2 - (g_{N\pi} - 2m_N g_{N\partial\pi})^2 \frac{2}{m_\pi^2 - 4m_N^2} - \frac{g_{N\rho}g_{\pi\rho}}{m_\rho^2} .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

bzw. für den Austausch der Resonanz N^* :

$$\begin{aligned}
A^{(+)} &= 2g_{N^*N\partial\pi}^2 - 2g_{N^*N\partial\pi}g_{N^*N\pi} \\
&\quad - \frac{1}{m_N + m_{N^*}} [g_{N^*N\pi}(m_N + m_{N^*}) + g_{N^*N\partial\pi}(m_N^2 - m_{N^*}^2)]^2 \frac{2(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)}{(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)^2 - 4m_\pi^2 m_N^2}, \\
A^{(-)} &= \frac{1}{m_N + m_{N^*}} [g_{N^*N\pi}(m_N + m_{N^*}) + g_{N^*N\partial\pi}(m_N^2 - m_{N^*}^2)]^2 \frac{4m_\pi m_N}{(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)^2 - 4m_\pi^2 m_N^2}, \\
B^{(+)} &= [g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi}(m_{N^*} - m_N)]^2 \frac{4m_\pi m_N}{(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)^2 - 4m_\pi^2 m_N^2}, \\
B^{(-)} &= -[g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi}(m_{N^*} - m_N)]^2 \frac{2(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)}{(m_N^2 + m_\pi^2 m_{N^*}^2)^2 - 4m_\pi^2 m_N^2} - 2g_{N^*N\partial\pi}^2.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Es bereitet nun keine Schwierigkeiten, die erhaltenen Amplituden in Gl. (5.4) einzusetzen, um die s -Wellen-Streulängen zu erhalten, das Gleiche gilt für die p -Wellen-Streulängen in Gln.(5.5) und (5.6).

5.3 Experimentelle Bestimmung von Pion-Nukleon-Streulängen

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie Streulängen experimentell bestimmt werden und wie die experimentellen Ergebnisse aussehen, mit denen die Ergebnisse dieser Dissertation letztendlich verglichen werden.

Beschrieben wird die Messanlage, wie sie z. B. im Paul Scherrer Institut (*PSI*) in der Schweiz betrieben wird, siehe Abb. 5.5. Zwei der durchgeführten Experimente sind von Interesse:

- Das Experiment der Gruppe Schröder et al. [31], die den Übergang $3p \rightarrow 1s$ am pionischen Wasserstoff gemessen hat. Die erhaltenen Daten für die Streulängen werden in dieser Dissertation verwendet.
- Das Experiment **Pionic Hydrogen R-98.01**, durchgeführt von der *Pionic Hydrogen collaboration*, 1997-2006. Im Rahmen dieses Experimentes wurden drei Übergänge gemessen: $np \rightarrow 1s$ mit $n = 2, 3, 4$, [32, 33, 34]. Die Daten sind gegenwärtig noch nicht publiziert.

Es soll jedoch an dieser Stelle nicht jedes Detail des Experiments erklärt, sondern lediglich verstanden werden, wie das Prinzip funktioniert - für ausführlichere Beschreibungen sowie genaue Angaben zu den Apparaturen und Messprinzipien sei auf die oben angegebenen Veröffentlichungen verwiesen. Da die Streulängen etwas über die Stärke des Potentials, also der Wechselwirkung zwischen Pion und Nukleon, aussagen, wird man in den betreffenden Experimenten versuchen, die Wellenfunktionen beider Teilchen zu überlappen, weil nur so die Einflüsse der starken Wechselwirkung des einen auf das andere gemessen werden können. Dieser Zustand tritt genau dann in pionischen Atomen auf, wenn das Pion im Grundzustand ist, in welchem es dem Kern am nächsten ist. Es ist daher empfehlenswert, sich zunächst einen Einblick in die Physik der exotischen Atome zu verschaffen.

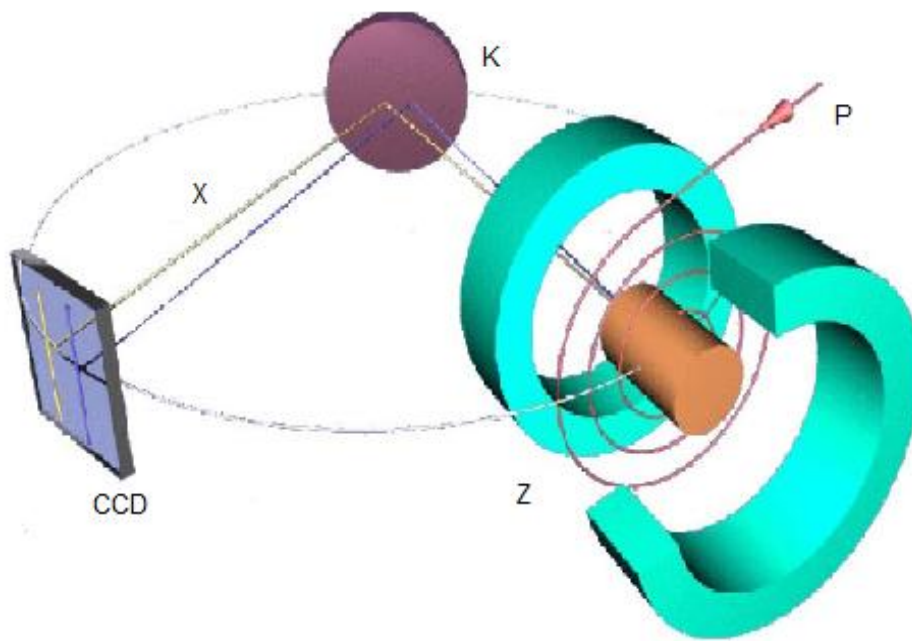


Abbildung 5.5: Messapparatur: durch die starke Wechselwirkung zwischen Kern und Pion wird das Grundzustandsniveau $1s$ verschoben und verbreitert (Verschiebung: ϵ_{1s} , Linienverbreiterung: Γ_{1s}). Diese hadronischen Effekte sind somit messbar. Die Pionen P gelangen in das Zyklotron Z , in dem sie von starken Magneten auf eine Kreisbahn gezwungen, abgebremst und schließlich im Inneren eines Wasserstoff-Targets gestoppt und eingefangen werden. Die emittierte Röntgenstrahlung X wird von dem Kristall-Spektrometer K reflektiert und schließlich von den Charge-coupled device Sensoren (CCD) aufgenommen. Diese können sodann ein zu der eingegangenen Strahlungsmenge proportionales Signal ausgeben.

5.3.1 Pionische Atome: Erzeugung und Termschema

Pionische Atome gehören zu den exotischen Atomen, Systeme, die außer ihren natürlichen Bausteinen (Elektronen e^- in der Hülle sowie Protonen p und Neutronen n im Kern), auch noch andere elementare Teilchen enthalten. Im Falle der pionischen Atome wird ein negatives Pion π^- in der Hülle eines Atoms eingefangen und bewegt sich dort in einem elektronenartigen Orbital. Diese Orbitale sind jedoch ca. 300 mal kleiner als ein Orbital eines Elektrons auf derselben Schale, was eine Folge der sehr viel größeren Masse des Pions ist, $\frac{m_e}{m_\pi} \approx 0.036$. Da die eingefangenen, negativ geladenen Pionen nicht dem Pauli-Prinzip unterliegen, können prinzipiell mehrere Pionen mit gleichen Quantenzahlen dieselbe Schale besetzen.

Pionischer Wasserstoff ist das elementarste gebundene System, um die Pion-Nukleon-Wechselwirkung im niederenergetischen Bereich zu analysieren. Die Untersuchung erfolgt durch Spektroskopie der Röntgenübergänge.

Ein von einem Beschleuniger kommender Pionenstrahl hoher Energie (ca. 100 MeV) wird in ein Zyklotron (Z in Abb. 5.5) geleitet, um dort zunächst auf wenige eV abgebremst und letztendlich im Targetmaterial (H_2) gestoppt zu werden und pionische Atome zu bilden. Es ist bekannt, dass die s -Wellen-Wechselwirkung zwischen Pion und Nukleon schwach repulsiv ist. Da andererseits das negativ geladene Pion aber eine anziehende Coulomb-Kraft vom positiven Kern erfährt, entsteht in der Nähe des Kernrandes ein Potentialminimum, in dem sich das pionische Atom bilden kann. Der typische Wert der Hauptquantenzahl der Schale, in der der atomare Einfang stattfindet, beträgt $n \sim (m_\pi/m_e)^{\frac{1}{2}} \sim 15$. Sobald das Pion eingefangen ist, beginnt es, sich abzuregen und auf niederenergetischere Bahnen zu fallen. Dieser Vorgang ist schematisch in Abb. 5.6 gezeigt. Wie sieht nun das Termschema genau aus?

Bei pionischem Wasserstoff, in dem kein weiteres Elektron vorhanden ist (das z. B. durch internen Auger-Effekt emittiert werden könnte, wie es bei Atomen mit $Z > 2$ der Fall ist), laufen die in Abb. 5.7 dargestellten Prozesse ab:

In den Bahnen mit einer hohen Hauptquantenzahl, $n > 8$, findet zum einen durch inelastische Stöße zwischen den gebildeten pionischen Atomen und im Target vorhandenen H_2 -Molekülen eine Abregung der Pionen statt, wobei die Übergangsenergie in kinetische Energie der Atome umgewandelt wird. Dies ist die sogenannte Coulomb-Abregung. Der Gewinn an kinetischer Energie führt zu einer zusätzlichen Verbreiterung der gemessenen Spektrallinie durch den Doppler-Effekt und muss als Korrektur berücksichtigt werden. Ein weiterer Effekt in diesem Bereich ($n > 8$) ist das *Stark mixing*, bei dem die Pionen einen Zustand mit gleicher Hauptquantenzahl, jedoch anderer Drehimpulsquantenzahl, annehmen, nachdem das pionische Atom mit einem freien Wasserstoff-Kern kollidiert ist. Beide Effekte erfolgen strahlungslos:

$$\begin{aligned} \text{Coulomb - Abregung : } & (\pi^- p)_{nl} + H_2 \rightarrow (\pi^- p)_{n'l'} + H_2 \quad , \quad n' < n, \\ \text{Stark - Abregung : } & (\pi^- p)_{nl} + H \rightarrow (\pi^- p)_{n'l'} + H \quad , \quad l' \neq l. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Durch Kollision mit noch vorhandenen H -Atomen findet in mittleren Bahnen ($7 \leq n \leq 8$) ein externer Auger-Effekt statt. Das bedeutet, dass die Abregungsenergie des Pions zur

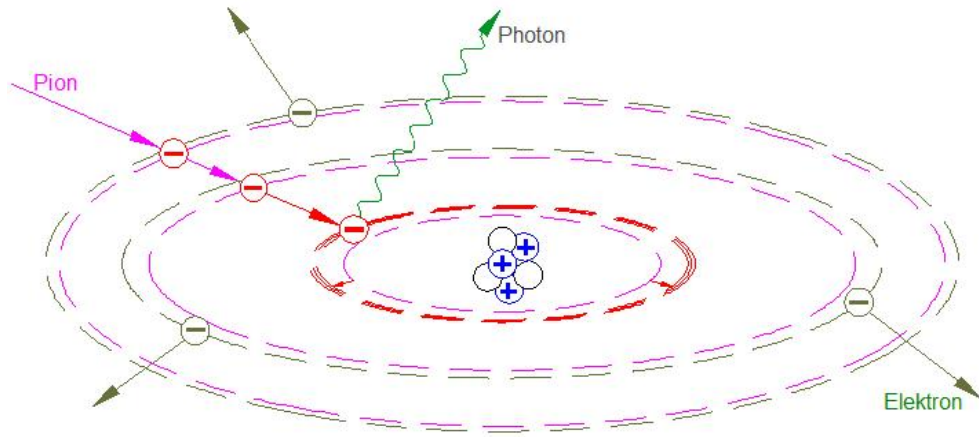


Abbildung 5.6: Entstehung eines pionischen Atoms: Das Pion wird in einer höheren Schale eingefangen, von der es in niederenergetischere Schalen bis hin zum Grundzustand fällt. Dies erfolgt in höheren Schalen mittels Freisetzung eines Elektrons aufgrund des Auger-Effektes (strahlungsloser Übergang) und in niedrigeren Schalen durch Emission eines Röntgenquants (Abb. aus [33]).

Emission eines Elektrons des H -Atoms genutzt wird, welches somit ionisiert wird, also positiv geladen zurückbleibt:

$$(\pi^- p)_{nl} + H \rightarrow (\pi^- p)_{n'l'} + p + e^- . \quad (5.45)$$

Ist das Pion in niederenergetischeren Bahnen ($2 \leq n \leq 6$), so dominiert der Strahlungsübergang, das Pion verliert Energie durch Emission eines Photons:

$$(\pi^- p)_{nl} \rightarrow (\pi^- p)_{n',l-1} + \gamma . \quad (5.46)$$

Die Energien der emittierten Photonen liegen im Bereich der Röntgenstrahlung, welche gemessen wird.

Wenn sich das Pion im Grundzustand befindet, wechselwirkt es mit dem Kern nicht nur elektromagnetisch, sondern auch stark, was zu einer Verschiebung und Verbreiterung des Grundzustandes führt, die dann letztendlich die Berechnung der Streulängen erlauben.

Experimentell wird so verfahren, dass die ausgesandte Röntgenstrahlung auf ein hochauflösendes Kristall-Spektrometer (K in Abb. 5.5) gesendet wird, wo ihre Energie E mittels des Braggschen Reflexionsgesetzes vermessen wird. Es gilt:

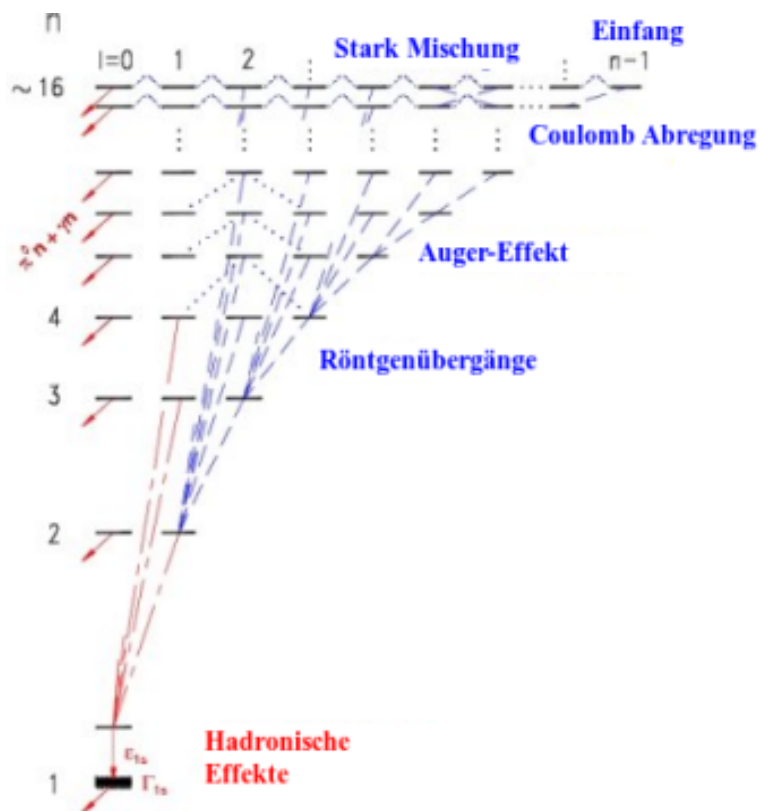
$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin \Theta_B ,$$

mit

$$\lambda = 2\pi \frac{\hbar c}{E} .$$

Hierbei sind:

- d der Abstand zwischen parallelen Gitterebenen des Bragg-Kristalls,



Die Übergänge des Pions von der oberen Schale bis zum Grundzustand erfolgen durch verschiedene Effekte. Im Grundzustand zeigt sich der Einfluss des Kerns auf das Pion (Abbildung aus www.fz-juelich.de/ikp/exotic-atoms/).

Abbildung 5.7:
Termschema des pioni-
schen Wasserstoffes

- λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung,
- Θ_B der Winkel zwischen Röntgenstrahl und Gitterebene, der sogenannte Glanz- oder Braggwinkel,
- n ist eine natürliche Zahl, die die Beugungsordnung angibt.

Um die Linienbreite mit höchster Genauigkeit (besser als 1%) messen zu können, muss auch die Antwortfunktion des Kristall-Spektrometers mit ausreichender Präzision bekannt sein. Zur Vorgehensweise bei der Kalibrierung wird auf Ref. [34] verwiesen. Da die Spektrallinie nicht nur durch starke Wechselwirkung, sondern auch durch den Doppler-Effekt aufgrund der Coulomb-Abregung verbreitert wird, genügt es nicht, nur die Antwortfunktion des Spektrometers möglich exakt zu kennen, sondern man muss auch wissen, welchen Beitrag der Doppler-Effekt zur Linienverbreiterung leistet. Eine Möglichkeit ist die Bestimmung der Energieverteilung eines myonischen Atoms, ein dem pionischen Atom sehr ähnliches System. Da das Myon jedoch ein Lepton ist, wird die Spektrallinie nicht zusätzlich durch starke Einflüsse verbreitert, sondern ausschließlich durch Doppler-Verbreiterung. Somit kann man die Effekte der Coulomb-Abregung direkt bestimmen. Dieser Effekt kann anschließend auf das pionische Atom übertragen und als Input für den Fit des πH -Spektrums genutzt werden.

Die Tatsache, dass Myonen gegenüber Pionen einen von Null verschiedenen Spin besitzen, was zu Hyperfeinstruktur-Aufspaltung führt, kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden [33].

5.3.2 Berechnung der Streulängen aus dem Experiment

Die starke Wechselwirkung zwischen Pion und Nukleon tritt erst dann auf, wenn die Wellenfunktionen beider Teilchen überlappen, d. h. wenn das Pion das Grundzustandsniveau $1s$ erreicht hat. Dies beeinflusst nun die Energie und die Linienbreite des Röntgenspektrums, das beim Übergang auf dieses Niveau gemessen wird [35]. Die nachfolgenden Daten beziehen sich auf die Messung des Übergangs $3p \rightarrow 1s$ im pionischen Wasserstoff, beschrieben in Ref. [31].

Die Verschiebung der Energie aufgrund starker Wechselwirkung ergibt sich durch die Differenz der gemessenen Energie und der Energie nur aufgrund der elektromagnetischen Bindung:

$$\epsilon_{1s} = E_{1s}^{\text{gemessen}} - E_{1s}^{e.m.} \quad (5.47)$$

Die Energie, die von der elektromagnetischen Wechselwirkung stammt, beträgt $E_{1s}^{e.m.} = 3238 \text{ eV}$, die gemessene Verschiebung ϵ_{1s} dagegen beträgt $7.108 \pm 0.013(\text{stat.}) \pm 0.034(\text{syst.}) \text{ eV}$ und deutet damit auf eine anziehende Wechselwirkung hin ($E_{1s}^{\text{gemessen}} > E_{1s}^{e.m.}$), d. h. der $1s$ -Grundzustand ist deutlich stärker gebunden.

Die Schwierigkeit bei der Berechnung der Linienbreite liegt darin, dass man sowohl die Dopplerverbreiterung, als auch Einflüsse der Antwortfunktion des Kristall-Spektrometers auf die Linienbreite berücksichtigen muss. Die Linienbreite hat den Wert: $\Gamma_{1s} = 0.868 \pm 0.040(\text{stat.}) \pm 0.038(\text{syst.}) \text{ eV}$.

Die Größen, die aus dieser Messung nun extrahiert werden können, sind die hadronische Streulänge a^h des elastischen Prozesses $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$ sowie die des Ladungsaustauschs $\pi^0p \rightarrow \pi^-p$. Dazu werden folgende Formeln [36, 37] verwendet:

$$\frac{\epsilon_{1s}}{E_{1s}} = -4 \frac{1}{r_B} a_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p}^h (1 + \delta_\epsilon) \quad (5.48)$$

und

$$\frac{\Gamma_{1s}}{E_{1s}} = 8 \frac{Q_0}{r_B} \left(1 + \frac{1}{P}\right) \left[a_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n}^h (1 + \delta_\Gamma)\right]^2. \quad (5.49)$$

Hierbei sind:

- r_B der Bohrsche Radius des pionischen Atoms mit $r_B = 222.56 \text{ fm}$,
- Q_0 ein kinematischer Faktor mit Wert 0.142 fm^{-1} ,
- P das sog. Panofsky-Verhältnis mit $P = 1.546 \pm 0.009$ [38],
- δ_ϵ und δ_Γ elektromagnetische Korrekturen zu den entsprechenden Größen.

Aus den hadronischen Streulängen werden nachfolgend die isoskalaren und die isovektoriellen Streulängen, $a_0^{(+)}$ bzw. $a_0^{(-)}$, bestimmt. Zu diesem Zweck wird die Übergangsmatrix aus Gl. (5.3) als Funktion der Streulängen an der Schwelle betrachtet:

$$T_{ba}^{rs} = a_0^{(+)} \delta_{ab} + a_0^{(-)} i \epsilon_{bac} \tau^c. \quad (5.50)$$

Die oberen Indizes r und s beziehen sich auf die Isospinindizes des Nukleons, a, b, c , wie gehabt, auf die des Pions.

Die geladenen Pionen und das neutrale Pion können mit Hilfe ihrer Isospinindizes 1, 2, 3 wie folgt dargestellt werden:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2) \quad , \quad \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \quad , \quad \pi^0 = \pi_3. \quad (5.51)$$

Außerdem gilt: $|\pi^+| = |\pi^-|$.

Als Erstes werden nun die Isospin-Streulängen aus dem Prozess $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$ berechnet.

Das Proton bleibt ein Proton, es gilt: $r = s = 1$. Der Übergang lautet:

$$\begin{aligned} a_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p}^h &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \pi_1 - i\pi_2 | T_{ba} \frac{1}{\sqrt{2}} | \pi_1 + i\pi_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\langle \pi_1 | \pi_1 \rangle + i \langle \pi_1 | \pi_2 \rangle - i \langle \pi_2 | \pi_1 \rangle + \langle \pi_2 | \pi_2 \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} [T_{11}^{11} + T_{22}^{11} + i(T_{12}^{11} - T_{21}^{11})]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Vergleicht man mit Gl. (5.50), ist offenkundig, dass T_{11}^{11} und T_{22}^{11} nur Beiträge zum ersten Term liefern, also zu der isoskalaren Streulänge $a_0^{(+)}$. Für diese beiden Matrixelemente wird der ϵ -Tensor im zweiten Term Null und somit gibt es keinen Beitrag zur isovektoriellen Streulänge $a_0^{(-)}$. Es gilt also: $T_{11}^{11} + T_{22}^{11} = 2a_0^{(+)}$.

Die Matrixelemente T_{12}^{11} und T_{21}^{11} dagegen liefern nur Beiträge zum zweiten Term, da hier das Kronecker-Delta Null wird. Hier gilt: $i(T_{12}^{11} - T_{21}^{11}) = -2a_0^{(-)}$.

Insgesamt ergibt sich:

$$a_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p}^h = \frac{1}{2} [T_{11}^{11} + T_{22}^{11} + i(T_{12}^{11} - T_{21}^{11})] = \frac{1}{2}(2a_0^{(+)} - 2a_0^{(-)}). \quad (5.53)$$

Für den Übergang mit Ladungsaustausch $\pi^0 p \rightarrow \pi^- p$ gelten analoge Überlegungen, wobei zu beachten ist, dass sich das Proton in ein Neutron verwandelt und somit gilt $r, s = 1, 2$. Das Ergebnis lautet:

$$a_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n}^h = \sqrt{2}a_0^{(-)}. \quad (5.54)$$

Die Streulängen $a_0^{(+)}$ und $a_0^{(-)}$ entsprechen daher genau den in Ref. [31] aufgeführten Größen b_0 und b_1 . Die Werte der Streulängen können daher direkt übernommen werden. Dies sind die experimentellen Werte der isoskalaren und isovektoriellen Streulängen, die im Rahmen dieser Dissertation gbenutzt werden, um sie mit den erhaltenen theoretischen Ergebnissen zu vergleichen:

$$a_0^{(+)} = (-8.8 \pm 7.2) \cdot 10^{-6} \text{MeV}^{-1}, \quad (5.55)$$

$$a_0^{(-)} = (6.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-4} \text{MeV}^{-1}. \quad (5.56)$$

Abschließend bleibt die Frage zu klären, warum man Pion-Nukleon-Streulängen durch das hier beschriebene Verfahren mit Hilfe exotischer Atome bestimmt und nicht durch ein tatsächliches Streuexperiment. Der Grund ist, dass die für Streuexperimente benötigten Energien bei 10 MeV oder höher liegen und damit nicht im erwünschten Bereich fast verschwindender Energien. Das bedeutet, dass exotische Atome Messungen an der Schwelle ermöglichen und mithin keine Extrapolation zum gewünschten Punkt erforderlich ist [39]. Ferner bietet die Messung mit exotischen Atomen die höchstmögliche Genauigkeit, bei anderen Experimenten ist dies nicht der Fall.

5.4 Ergebnisse: die Streulängen a_0^\pm im global symmetrischen Linearen-Sigma Modell mit chiralem Partner des Nukleons und Vektormesonen

Spiegel-Zuordnung

Um die Ausdrücke der Streulängen in dem Modell zu erhalten, müssen nur noch die geeigneten Kopplungskonstanten eingesetzt werden, wie sie durch Gl. (3.4) und Gl. (4.35) gegeben sind, mit folgenden Ergebnissen [40, 41].

Isoskalare Streulänge:

$$\begin{aligned}
a_0^{(+)} = & \frac{1}{4\pi(1 + \frac{m_\pi}{m_N})} \left(\frac{Z}{2 \cosh \delta} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \left[\hat{g}_1 - \hat{g}_2 + \frac{Z f_\pi}{2} w(c_1 + c_2)(\hat{g}_2 - \hat{g}_1) \right]^2 \right. \\
& \times \frac{(m_N + m_{N^*})(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} - w(c_1 + c_2)(\hat{g}_1 - \hat{g}_2) \\
& + \frac{Z f_\pi}{4} (\hat{g}_1 - \hat{g}_2) w^2(c_1 + c_2)^2 - w(c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})(\hat{g}_1 e^\delta + \hat{g}_2 e^{-\delta}) + w^2 m_N (c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})^2 \\
& + \frac{\hat{g}_1 e^\delta - \hat{g}_2 e^{-\delta}}{4 \cosh \delta} \left(2g_1 w m_\pi^2 + \frac{Z}{f_\pi} \left(m_\sigma^2 - \frac{m_\pi^2}{Z} \right) + Z^3 f_\pi w^2 m_\pi^2 (h_1 + h_2 - h_3) \right) \\
& + m_\pi \left\{ \left[\hat{g}_1 - \hat{g}_2 + \frac{Z f_\pi}{2} w(c_1 + c_2)(\hat{g}_2 - \hat{g}_1) \right]^2 \frac{m_N m_\pi}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \right. \\
& \left. + [\hat{g}_1 e^\delta + \hat{g}_2 e^{-\delta} - 2m_N w(c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})]^2 \frac{m_N}{m_\pi} \frac{1}{m_\pi^2 - 4m_N^2} \right\} \Bigg) . \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Isovektorielle Streulänge:

$$\begin{aligned}
a_0^{(-)} = & \frac{1}{4\pi(1 + \frac{m_\pi}{m_N})} \left(\frac{Z}{2 \cosh \delta} \right)^2 \left(\left[\hat{g}_1 - \hat{g}_2 + \frac{Z f_\pi}{2} w(c_1 + c_2)(\hat{g}_2 - \hat{g}_1) \right]^2 \right. \\
& \times \frac{(m_N + m_{N^*})m_N m_\pi}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \\
& + \frac{m_\pi}{2} \left\{ \left[\hat{g}_1 - \hat{g}_2 + \frac{Z f_\pi}{2} w(c_1 + c_2)(\hat{g}_2 - \hat{g}_1) \right]^2 \frac{m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \right. \\
& - [\hat{g}_1 e^\delta + \hat{g}_2 e^{-\delta} - 2m_N w(c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})]^2 \frac{1}{m_\pi^2 - 4m_N^2} \\
& \left. \left. - w^2 [(c_1 + c_2)^2 - (c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta})^2] + \frac{g_1}{m_\rho^2} \frac{4 \cosh \delta}{Z^2} (c_1 e^\delta - c_2 e^{-\delta}) \right\} \right) . \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Die Niederenergie-Theoreme (*Low-energy theorems: Weinberg-Tomozawa-Theorem* [42, 43]) für chirale Symmetrie verlangen, dass die Streulängen im chiralen Limes, $m_\pi = 0$, verschwinden, $a_0^{(\pm)} = 0$. Die Ausdrücke in Gln. (5.57) und (5.58) genügen dieser Anforderung, auch wenn dies aufgrund ihrer Kompliziertheit nicht sogleich erkennbar ist.

Naive Zuordnung

Im naiven Assignment fallen Terme der Art $\sigma \bar{N}^* N + \text{h.c}$ bzw. $\bar{N}^* i\gamma_5 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N + \text{h.c.}$, d.h. die Wechselwirkung zwischen N und N^* im skalaren Sektor, komplett weg. Somit erhalten die Streulängen folgende Ausdrücke:

Isoskalare Streulänge:

$$\begin{aligned}
a_0^{(+)} = & \frac{1}{4\pi(1 + \frac{m_\pi}{m_N})} \left\{ -2Z^2 w^2 \tilde{c}_{12}^2 (m_{N^*} - m_N) \left[1 + \frac{(m_{N^*}^2 - m_N^2)(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \right] \right. \\
& - 4Z^2 w \tilde{c}_1 (\tilde{\hat{g}}_1 - \tilde{c}_1 w m_N) + \frac{\tilde{\hat{g}}_1}{m_\sigma^2} \left[2g_1 w m_\pi^2 + \frac{Z}{f_\pi} \left(m_\sigma^2 - \frac{m_\pi^2}{Z} \right) + Z^3 f_\pi w^2 m_\pi^2 (h_1 + h_2 - h_3) \right] \\
& \left. + 4m_\pi m_N Z^2 \left[w^2 \tilde{c}_{12}^2 \frac{m_\pi (m_{N^*} - m_N)^2}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} - \frac{(\tilde{\hat{g}}_1 - 2\tilde{c}_1 w m_N)^2}{4m_\pi (m_N^2 - m_\pi^2)} \right] \right\} . \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Isovektorielle Streulänge:

$$\begin{aligned}
a_0^{(-)} = \frac{1}{4\pi(1 + \frac{m_\pi}{m_N})} & \left\{ 4Z^2 w^2 \tilde{c}_{12}^2 \frac{m_N m_\pi (m_{N^*} - m_N)^2 (m_{N^*} + m_N)}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \right. \\
& - m_\pi 2Z^2 w^2 \tilde{c}_{12}^2 \left[1 + \frac{(m_{N^*} - m_N)^2 (m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)}{(m_N^2 + m_\pi^2 - m_{N^*}^2)^2 - 4m_N^2 m_\pi^2} \right] \\
& \left. - 2Z^2 \frac{(\tilde{g}_1 - 2\tilde{c}_1 w m_N)^2}{4m_N^2 - m_\pi^2} - 2Z^2 w^2 \tilde{c}_1^2 + \frac{2w\tilde{c}_1}{Zf_\pi} \left(\frac{m_a^2}{m_\rho^2} \right) \right\}. \tag{5.60}
\end{aligned}$$

6. Zerfall der Nukleonenresonanz

Die Untersuchung der spektroskopischen Eigenschaften eines Teilchens sind, zusätzlich zu den Streuexperimenten, ein wichtiger Bestandteil zur Charakterisierung des Teilchens. In diesem Abschnitt wird der Zerfall der Resonanz N^* in ein Nukleon und ein pseudoskalares Meson, etwa das Pion π oder das η -Meson, behandelt.

Ein Term der Form $N^*N\pi$ wäre chiral nicht invariant, wenn man ihn *naiv* einbinden würde. Im naiven Assignment, das am Ende des Kapitels diskutiert wird, trägt nur $N^*N\partial\pi$ zur Zerfallsbreite bei. Der Term $N^*N\pi$ ist nur zulässig, wenn Gln. (4.7) erfüllt sind, also im Spiegel-Assignment. Hier gehen sowohl $N^*N\pi$ als auch $N^*N\partial\pi$ in die Zerfallsbreite ein.

6.1 Zerfall $N^* \rightarrow NP$ (I)

Zunächst wird der Zerfall des Partners des Nukleons, N^* , in ein Nukleon, N , und ein pseudoskalares Meson, P , betrachtet. Dieser Abschnitt ist lediglich als Einführung in die Berechnung der Zerfallsbreite von Baryonen gedacht. Infolgedessen wird die Kopplung der Nukleonen an die Ableitung des Pseudoskalars vernachlässigt (der rechnerische Aufwand wäre umfangreicher, wie in Abschnitt 6.2 ausführlich beschrieben) und nur die einfache Kopplung an das pseudoskalare Teilchen berücksichtigt. Die Lagrangedichte, die die N^*NP - Wechselwirkung beschreibt, ermöglicht, neben den Streuamplituden auch Zerfallsamplituden zu berechnen. Dazu werden wieder die relevanten Terme aus der Lagrangedichte Gl. (4.10) extrahiert:

$$\mathcal{L}_{PN} = -ig_{N^*NP} \bar{N}^* \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N - ig_{NN^*P} \bar{N} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N^*. \quad (6.1)$$

Zur Berechnung eines Zerfalls, in dem Fermionen involviert sind, müssen die Spinoren $u^\alpha(\mathbf{k})$ zu Hilfe genommen werden, da sie von den Feynman-Regeln als multiplikative Faktoren für jede Fermionenlinie verlangt werden. Demzufolge liegen vor:

- Ein einlaufendes Nukleon N^* , mit $u^\alpha(\mathbf{k})$, das den Viererimpuls $K = (k^0 = \sqrt{m_{N^*}^2 + \mathbf{k}^2}, \mathbf{k})$ und den Spin α trägt. Da der Zerfall im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens stattfindet, ist dessen Dreierimpuls Null, also $\mathbf{k} = 0$.
- Ein auslaufendes Proton N , mit $\bar{u}^\beta(\mathbf{k}_1)$, das den Viererimpuls $K_1 = (k_1^0 = \sqrt{m_N^2 + \mathbf{k}_1^2}, \mathbf{k}_1)$ und den Spin β trägt.
- Ein auslaufendes pseudoskalares Meson P mit Viererimpuls $K_2 = (k_2^0 = \sqrt{m_P^2 + \mathbf{k}_2^2}, \mathbf{k}_2)$. Der multiplikative Faktor an dieser Stelle ist 1.

Aus der Impulserhaltung folgt, dass $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, womit sich durch die Wahl des Ruhesystems sofort ergibt, dass: $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$. Die S -Matrix für den Zerfall lautet:

$$S = \langle f | \int d^4X \mathcal{L}_{PN} | i \rangle, \quad (6.2)$$

wobei der Anfangszustand $|i\rangle = |N^*\rangle$ durch 2-Teilchen-Zerfall in den Endzustand $\langle f| = \langle PN|$ übergeht. Nun wird die S -Matrix im Detail berechnet.

Die Darstellung der Fermion- und Meson-Felder durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ist bekannt:

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(X) &= \sum_{k,s=\pm 1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left[\widehat{b}_s(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}, s) e^{-iK \cdot X} + \widehat{d}_s^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}, s) e^{iK \cdot X} \right], \\ \widehat{\bar{\Psi}}(X) &= \sum_{k,s=\pm 1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left[\widehat{d}_s(\mathbf{k}) \bar{v}(\mathbf{k}, s) e^{-iK \cdot X} + \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k}) \bar{u}(\mathbf{k}, s) e^{iK \cdot X} \right],\end{aligned}\quad (6.3)$$

für die Fermionen. Das Meson hat die Darstellung:

$$\widehat{\Phi}(X) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} (\widehat{a}(\mathbf{k}_2) e^{-iK_2 \cdot X} + \widehat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2) e^{iK_2 \cdot X}). \quad (6.4)$$

Mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lauten der Anfangs- und Endzustand:
 $|i\rangle = |N^*\rangle = \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ (Erzeugung eines Fermions aus dem Vakuum),
 $|PN\rangle = \widehat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2) \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k}_1)|0\rangle$ ¹ (Erzeugung eines Fermions und eines pseudoskalares Mesons P).

Dementsprechend gilt ²:

$$\begin{aligned}S &= \langle f| \int d^4X \mathcal{L}_{PN} |i\rangle = \langle PN| \int d^4X (-i\mathcal{M}) \mathcal{T}(N^* N P) |N^*\rangle = \\ &= \langle 0| \widehat{a}(\mathbf{k}_2) \widehat{b}_s(\mathbf{k}_1) \int d^4X (-i\mathcal{M}) \mathcal{T}(N^* \bar{N} P) \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle,\end{aligned}\quad (6.5)$$

Werden die Fermionen und das Meson entsprechend Gln.(6.3) und (6.4) ersetzt, folgt:

$$\begin{aligned}& \langle 0| \widehat{a}(\mathbf{k}_2) \widehat{b}_s(\mathbf{k}_1) \sum_{s'=\pm 1/2} \int d^4X (-i\mathcal{M}) \times \\ & \int \frac{d^3\mathbf{k}'_1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_N}{E_{\mathbf{k}'_1}}} \left[\widehat{d}_{s'}(\mathbf{k}'_1) \bar{v}(\mathbf{k}'_1, s') e^{-iK'_1 \cdot X} + \widehat{b}_{s'}^\dagger(\mathbf{k}'_1) \bar{u}(\mathbf{k}'_1, s') e^{iK'_1 \cdot X} \right] \times \\ & \int \frac{d^3\mathbf{k}'_2}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2E_{\mathbf{k}'_2}}} (\widehat{a}(\mathbf{k}'_2) e^{-iK'_2 \cdot X} + \widehat{a}^\dagger(\mathbf{k}'_2) e^{iK'_2 \cdot X}) \times \\ & \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_{N^*}}{E_{\mathbf{k}'}}} \left[\widehat{b}_{s'}(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}', s') e^{-iK' \cdot X} + \widehat{d}_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}', s') e^{iK' \cdot X} \right] \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Unter Berücksichtigung der (Anti-)Kommutatorrelationen bekommt man:

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{\frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} \frac{1}{V^{3/2}} \int d^4X (-i\mathcal{M}) e^{i(K_1 + K_2 - K) \cdot X} = \\ &= \sqrt{\frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} \frac{1}{V^{3/2}} (-i\mathcal{M}) (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K).\end{aligned}\quad (6.7)$$

¹Zu beachten: aus $|PN\rangle = \widehat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2) \widehat{b}_s^\dagger(\mathbf{k}_1)|0\rangle$ folgt $\langle f| = \langle PN| = \langle 0| \widehat{a}(\mathbf{k}_2) \widehat{b}_s(\mathbf{k}_1)$.

²Das Symbol \mathcal{T} repräsentiert das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren.

Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, wird (6.7) quadriert:

$$S^2 = \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \frac{1}{V^3} | -i\mathcal{M}|^2 (2\pi)^8 [\delta^4(K_1 + K_2 - K)]^2. \quad (6.8)$$

Das Quadrat der Delta-Funktion kann nicht direkt berechnet werden, daher wird der sogenannte Fermi-Trick angewendet:

$$\begin{aligned} (2\pi)^8 [\delta^4(K_1 + K_2 - K)]^2 &= (2\pi)^8 \delta^4(K_1 + K_2 - K) \delta^4(K_1 + K_2 - K) = \\ (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K) (2\pi)^4 \int d^4 X e^{i(K_1 + K_2 - K) \cdot X} &= (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K) (2\pi)^4 \int d^4 X = \\ (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K) \int_V d^3 x \int_0^{t>0} dt &= \\ (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K) V t, \end{aligned} \quad (6.9)$$

wobei im vorletzten Schritt $\int_0^{t>0} dt$ bedeutet, dass das Teilchen (hier: N^*) zum Zeitpunkt $t = 0$ entstanden ist und nur über einen kurzen Zeitraum integriert werden darf, da nach einiger Zeit, $t \rightarrow \infty$, keine Wechselwirkung mehr stattfindet, bzw. das Teilchen schon zerfallen ist.

Für die Wahrscheinlichkeitsamplitude \mathcal{P} bleibt schließlich:

$$\mathcal{P} = \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \frac{1}{V^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} V | -i\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K) V t. \quad (6.10)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zu einer bestimmten Zeit t die Teilchen N und P vorgefunden werden, ist: $\mathcal{P} = \Gamma t$, mit der Zerfallsbreite Γ :

$$\Gamma = \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} | -i\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_1 + K_2 - K). \quad (6.11)$$

Folgende wichtige Eigenschaften der Dirac'schen Delta-Funktion werden benutzt, um die Zerfallsbreite zu berechnen:

$$\int dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0), \quad (6.12)$$

sowie auch der nachfolgende Ausdruck, wobei x_i die Nullstellen der Funktion sind, $f(x_i) = 0$, und außerdem gelten muss, dass die erste Ableitung der Funktion an diesen Stellen nicht verschwindet, $f'(x_i) \neq 0$:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (6.13)$$

mit: $x = \mathbf{k}_1$ und $x_i = \mathbf{k}_f$, wobei \mathbf{k}_f den Endimpuls bezeichnet.

Damit folgt (beachte, dass $E_{\mathbf{k}} = m_{N^*}$):

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}|^2}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 [\delta^4(K_1 + K_2 - K)]^2 \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k}_2 \frac{|-i\mathcal{M}|^2}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2} - m_{N^*}) \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k}_2 \frac{|-i\mathcal{M}|^2}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \delta(E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2} - m_{N^*}) \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}|^2}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \delta(|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_f|) \frac{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}{k_1 (E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})} \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}|^2 \delta(|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_f|)}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \frac{1}{k_1 (E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})} \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}} \int d\Omega dk_1 k_1^2 \frac{|-i\mathcal{M}|^2 \delta(|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_f|)}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}} \frac{1}{k_1 m_{N^*}} \\
&= \frac{m_N m_{N^*}}{2(2\pi)^2 m_{N^*}^2} 4\pi \int dk_1 k_1 \frac{|-i\mathcal{M}|^2 \delta(|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_f|)}{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Die Zerfallsbreite lautet demnach:

$$\Gamma = \frac{k_f}{8\pi m_{N^*}} 4m_N |-i\mathcal{M}|^2. \tag{6.15}$$

Dieses Ergebnis ist allgemein gültig für den Zerfall $N^* \rightarrow NP$.

Der Impuls k_f der beiden Teilchen, die beim Zerfall der Resonanz entstanden sind, kann aus dem Wissen berechnet werden, dass $m_{N^*} = E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2} = \sqrt{m_N^2 + \mathbf{k}_f^2} + \sqrt{m_P^2 + \mathbf{k}_f^2}$. Werden beide Seiten quadriert, ergibt sich für den Endimpuls folgendes Ergebnis:

$$k_f = \frac{\sqrt{m_N^4 + m_{N^*}^4 + m_P^4 - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_N^2 m_P^2 - 2m_P^2 m_{N^*}^2}}{2m_{N^*}}. \tag{6.16}$$

Die letzte Schwierigkeit besteht in der Berechnung der \mathcal{M} -Matrix:

$$-i\mathcal{M} = ig_{N^* N \pi} \bar{u}^\beta(\mathbf{k}_1) u^\alpha(\mathbf{k}), \tag{6.17}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\overline{|-i\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |-i\mathcal{M}^{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{|g_{N^* NP}|^2}{2} \sum_{\alpha, \beta} |\bar{u}^\beta(\mathbf{k}_1) u^\alpha(\mathbf{k})|^2 \\
&= \frac{|g_{N^* NP}|^2}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\bar{u}_\mu^{(\beta)}(\mathbf{k}_1) u_\mu^{(\alpha)}(\mathbf{k})) (\bar{u}_\nu^{(\alpha)}(\mathbf{k}) u_\nu^{(\beta)}(\mathbf{k}_1))^\dagger. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Zu diesem Zweck werden die folgenden Projektoren eingeführt:

$$\begin{aligned}\Lambda_+(\mathbf{k}) &= \sum_{r=1,2} u^{(r)}(\mathbf{k}) \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) = \frac{\not{K} + m_N}{2m_N}, \\ \Lambda_-(\mathbf{k}) &= - \sum_{r=1,2} v^{(r)}(\mathbf{k}) \bar{v}^{(r)}(\mathbf{k}) = \frac{-\not{K} + m_N}{2m_N}.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Es handelt sich dabei um die Energie-Projektionsoperatoren, die die Separierung eines Spinors mit gegebenem Vorzeichen der Energie aus einer Wellenfunktion oder einem Wellenpaket ermöglichen. Dabei steht r für die beiden Spin-Einstellungen. Für die nachfolgenden Rechnungen wird lediglich der Projektor der positiven Energie benötigt, $\Lambda_+(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned}\overline{|-i\mathcal{M}|^2} &= \frac{|g_{N^*NP}|^2}{2} \Lambda_+(\mathbf{k}) \Lambda_+(\mathbf{k}_1) \\ &= \frac{|g_{N^*NP}|^2}{2} \text{Tr} [\Lambda_+(\mathbf{k}) \Lambda_+(\mathbf{k}_1)] \\ &= \frac{|g_{N^*NP}|^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K} + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \frac{\not{K}_1 + m_p}{2m_p} \right] = \\ &= \frac{|g_{N^*NP}|^2}{2} \frac{K \cdot K_1 + m_{N^*} m_N}{m_{N^*} m_N} = \frac{|g_{N^*N\pi}|^2}{2} \left(\frac{E_p}{m_N} + 1 \right).\end{aligned}\quad (6.20)$$

Es ergibt sich damit die folgende Zerfallsbreite:

$$\Gamma = \frac{k_f m_N}{2\pi m_{N^*}} \frac{|g_{N^*N\pi}|^2}{2} \left(\frac{E_p}{m_N} + 1 \right). \quad (6.21)$$

6.2 Zerfall $N^* \rightarrow NP$ (II)

In diesem Abschnitt wird die gesamte Zerfallsbreite der Nukleonenresonanz N^* berechnet, so wie sie aus der Lagrangedichte (4.10) vorgegeben ist. Zu diesem Zweck sind wieder die relevanten Terme zu beachten, die die Kopplung der Nukleonen an das pseudoskalare Meson und an deren Ableitung beschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{PN} &= -ig_{N^*NP} \bar{N}^* \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N + g_{N^*N\partial P} \bar{N}^* \gamma^\mu \partial_\mu \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N \\ &\quad - ig_{NN^*P} \bar{N} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N^* + g_{NN^*} \bar{N} \gamma^\mu \partial_\mu \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} N^*.\end{aligned}\quad (6.22)$$

Im vorhergehenden Abschnitt wurde der allgemeingültige Ausdruck der Zerfallsbreite hergeleitet, s. Gl. (6.15). Besteht nun außer der einfachen Kopplung an das Meson auch eine Kopplung an dessen Ableitung, so wird dies Auswirkungen auf die Amplitude \mathcal{M} haben, wobei der zusätzliche Impuls des Mesons berücksichtigt werden muss. Für diesen Fall wird im Folgenden die Amplitude berechnet. Es gilt:

$$-iM_{\alpha\beta} = i\bar{u}_\beta^N(\mathbf{k}_1) B u_\alpha^{N^*}(\mathbf{k} = 0), \quad \text{mit} \quad B = g_{N^*NP} + g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\rho K_{2,\rho}. \quad (6.23)$$

Über Anfangszustände wird gemittelt und über Endzustände summiert, mit folgendem Resultat:

$$\overline{|-iM_{N^* \rightarrow NP}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |-iM_{\alpha\beta}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} [\bar{u}_\beta^N(\mathbf{k}_1) B u_\alpha^{N^*}(\mathbf{k} = 0)] [\bar{u}_\alpha^{N^*}(\mathbf{k} = 0) B' u_\beta^N(\mathbf{k}_1)] , \quad (6.24)$$

wobei verwendet wurde, dass $B^\dagger = \gamma^0 B' \gamma^0$, mit $B' = g_{N^*N\pi} - g_{N^*N\partial\pi} \gamma^\rho K_{2,\rho}$. Unter Anwendung der Energieprojektoren (6.19) und der bekannten Eigenschaften der Spuren der Gamma-Matrizen folgt:

$$\begin{aligned} \overline{|-iM|^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |-iM_{\alpha\beta}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[B \frac{\gamma^\mu k_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} B' \frac{\gamma^\nu k_{1,\nu} + m_N}{2m_N} \right] \\ &= \frac{g_{N^*NP}^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{\gamma^\mu k_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \frac{\gamma^\mu k_{1,\mu} + m_N}{2m_N} \right] \\ &\quad + \frac{g_{N^*N\partial P}^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\rho k_2^\rho \frac{\gamma^\mu k_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \gamma_\rho k_2^\rho \frac{\gamma^\mu k_{1,\mu} + m_N}{2m_N} \right] \\ &\quad - g_{N^*NP} g_{N^*N} \text{Tr} \left[\frac{\gamma^\mu k_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \gamma_\rho k_2^\rho \frac{\gamma^\mu k_{1,\mu} + m_N}{2m_N} \right] \\ &= \frac{g_{N^*NP}^2}{2} \left(\frac{E_N}{m_N} + 1 \right) + \frac{g_{N^*N\partial P}^2}{2} \left[(m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2) \frac{E_P}{m_N} + m_P^2 \left(1 - \frac{E_N}{m_N} \right) \right] \\ &\quad - g_{N^*NP} g_{N^*N\partial P} \left(\frac{m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2}{2m_N} + E_P \right) . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Es gilt daher für die gesamte Breite des Zerfalls $N^* \rightarrow NP$:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow NP} = \lambda_P \frac{k_P}{2\pi} \frac{M_N}{M_{N^*}} \overline{|-iM_{N^* \rightarrow NP}|^2} . \quad (6.26)$$

Der Faktor λ_P steht für einen eventuellen Vorfaktor, der je nach Zerfall auftreten kann, wie z.B. bei dem Zerfall in Pion-Nukleon die Berücksichtigung des Isospins des Pions.

6.3 Ergebnisse: die Zerfallsbreiten im global symmetrischen Linearen Sigma-Modell mit chiralem Partner des Nukleons und Vektormesonen

Spiegel-Zuordnung

Um die Ergebnisse der Zerfallsbreiten in dem Modell zu erhalten, müssen auch hier die korrekten Kopplungskonstanten eingesetzt werden:

$$g_{N^*N\pi} = -\frac{Z(\hat{g}_1 - \hat{g}_2)}{4 \cosh \delta} , \quad g_{N^*N\partial\pi} = -\frac{Zw(c_1 + c_2)}{4 \cosh \delta} . \quad (6.27)$$

Der Ausdruck für $N^* \rightarrow NP$, wobei $P = \pi, \eta$ lautet:

$$\begin{aligned} \Gamma_{N^* \rightarrow NP} = & \lambda_P \frac{k_P}{2\pi} \frac{m_N}{m_{N^*}} \frac{Z^2}{32 \cosh^2 \delta} \\ & \left\{ w^2 (c_1 + c_2)^2 \left[(m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2) \frac{E_P}{m_N} + m_P^2 \left(1 - \frac{E_N}{m_N} \right) \right] \right. \\ & \left. + (\hat{g}_1 - \hat{g}_2)^2 \left(\frac{E_N}{m_N} + 1 \right) + 2w (\hat{g}_1 - \hat{g}_2)(c_1 + c_2) \left(\frac{m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2}{2m_N} + E_P \right) \right\} , \quad (6.28) \end{aligned}$$

mit:

$$k_P = \frac{\sqrt{m_N^4 + m_{N^*}^4 + m_P^4 - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_N^2 m_P^2 - 2m_P^2 m_{N^*}^2}}{2m_{N^*}}. \quad (6.29)$$

Der Koeffizient λ_P ist für das Pion schlicht: $\lambda_\pi = 3$. Dadurch werden die drei möglichen Werte des Isospins des Pions berücksichtigt.

Die Zerfallsbreite $N^* \rightarrow N\eta$ bedarf einer kurzen Diskussion. Sie kann, aufgrund des fehlenden s Quarks, nicht direkt ausgewertet werden. Zur korrekten Berechnung muss berücksichtigt werden, dass

$$\eta = \eta_N \cos \phi_P + \eta_S \sin \phi_P , \quad (6.30)$$

mit $\eta_N \equiv (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$, $\eta_S \equiv \bar{s}s$, der Winkel ϕ_P liegt zwischen -32° und -45° [44]. Folglich kann die Zerfallsamplitude $\mathcal{A}_{N^* \rightarrow N\eta}$ geschrieben werden als:

$$\mathcal{A}_{N^* \rightarrow N\eta} = \mathcal{A}_{N^* \rightarrow N\eta_N} \cos \phi_P + \mathcal{A}_{N^* \rightarrow N\eta_S} \sin \phi_P . \quad (6.31)$$

Es wird angenommen, dass die Amplitude $\mathcal{A}_{N^* \rightarrow N\eta_S}$ OZI-unterdrückt und damit klein ist. Somit gilt die Näherung: $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta} \simeq \cos^2 \phi_P \Gamma_{N^* \rightarrow N\eta_N}$. Zur Auswertung der Zerfallsbreite $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}$ wurde die *physikalische* Masse, $m_\eta = 547$ MeV, benutzt. Daher muss auch $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta_N}$ bei der Masse m_η ausgewertet werden, nicht bei m_{η_N} . Der Vorfaktor lautet demgemäß: $\lambda_\eta = \cos^2 \phi_P$.

Naives Assignment

Im naiven Assignment entfallen die Terme, die die Wechselwirkung zwischen N , N^* und Mesonen im skalaren Sektor beschreiben. Die Kopplungskonstanten lauten:

$$g_{N^* N \pi} = 0 , \quad g_{N^* N \partial \pi} = -Zw\tilde{c}_{12} . \quad (6.32)$$

Die Zerfallsbreite nimmt damit folgende einfache Form an:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow NP} = \lambda_P \frac{k_P}{2\pi} \frac{m_N}{m_{N^*}} \frac{Z^2 w^2 \tilde{c}_{12}^2}{2} \left[(m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2) \frac{E_P}{m_N} + m_P^2 \left(1 - \frac{E_N}{m_N} \right) \right] . \quad (6.33)$$

Die Diskussion über den Koeffizient λ_P gilt hier entsprechend.

7. Die axialen Kopplungskonstanten

Die axialen Kopplungskonstanten sind Größen, die Aufschluss über die chirale Struktur des Baryonensektors geben. Ihre Definition erfolgt über das Matrixelement des axialen Stromes zwischen zwei nukleonischen Zuständen, das folgende Zerlegung in seine Formfaktoren aufweist [45]:

$$\langle P', s' | A_\mu | P, s \rangle = \bar{u}(P', s') \left[\gamma_\mu g_A(q^2) + \frac{Q}{2m_N} g_P(q^2) \right] \gamma^5 u(P, s). \quad (7.1)$$

Hierbei steht $u(P, s)$ für den Nukleonspinor mit Viererimpuls P und Spin s . Der Faktor $g_A(q^2)$ ist der axiale Formfaktor und $g_P(q^2)$ ist der sogenannte pseudoskalare Formfaktor, der aber im Weiteren nicht von Bedeutung ist. Der Viererimpulsübertrag ist $Q = p - p'$. Die axiale Kopplungskonstante ist nun definiert als der Wert des axialen Formfaktors bei $q^2 = 0$, d.h., wenn das Quadrat des Impulsübertrages verschwindet. Letzteres kann auch wieder über die in Kapitel 5 definierten Mandelstam-Variablen ausgedrückt werden, $t = (P - P')^2$.

Die axialen Kopplungskonstanten werden schon seit geraumer Zeit sowohl theoretisch als auch experimentell und mit Lattice-Rechnungen untersucht.

Für diese Arbeit werden folgende drei Werte benötigt:

Die axiale Kopplungskonstante des Nukleons [16],

$$g_A^{N,exp} = 1.267 \pm 0.004, \quad (7.2)$$

sowie die axialen Kopplungskonstanten der Resonanzen $N(1535)$ und $N(1650)$ aus Lattice-Rechnungen [46]:

$$\begin{aligned} g_A^{N(1535)} &= 0.2 \pm 0.3, \\ g_A^{N(1650)} &= 0.55 \pm 0.2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

7.1 Ermittlung der axialen Kopplungskonstanten

7.1.1 Im Spiegelmodell

Zur mathematischen Ermittlung der axialen Kopplungskonstante des Nukleons aus der Lagrangedichte (4.10) werden Terme folgender Form, nämlich genau der Form von Axialströmen, ermittelt:

$$A^{a,\mu} = g_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi. \quad (7.4)$$

Allgemein wird Strom aus der Lagrangedichte gemäß folgender Formel berechnet, siehe z. B. Ref. [14]:

$$J_\mu = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta \phi_k. \quad (7.5)$$

In dieser Arbeit ist $\phi = \pi$ und $\delta\pi = \frac{\varphi}{Z} + \dots$, wobei in letzterem Ausdruck nur der relevante Term aufgeführt wird.

Die erforderlichen Terme der Lagrangedichte Gl. (4.10) sind somit die pseudovektoriellen Kopplungen von Nukleon und Pion. Diese entstehen in den Termen, die die Wechselwirkung der Nukleonen mit den (axial-)vektoriellen Teilchen widerspiegeln, nachdem der Shift des Axialfeldes \mathbf{a}_1^μ erfolgt ist. Begonnen wird mit der Berechnung für den Spinor Ψ_1

$$\mathcal{L}_{\Psi_1, a_1} = \bar{\Psi}_{1L} c_1 \gamma^\mu L_\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} c_1 \gamma^\mu R_\mu \Psi_{1R} . \quad (7.6)$$

Nach dem Shift und der Renormierung des Pions lautet der relevante Term:

$$\mathcal{L}_{\Psi_1, a_1} = -Z w c_1 \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \partial_\mu \pi \Psi_1 . \quad (7.7)$$

Die Berechnung des Stromes entsprechend Gl. (7.5) ergibt:

$$A^{a, \mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi)} \frac{\varphi}{Z} = -Z w c_1 \frac{\varphi}{Z} \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_1 . \quad (7.8)$$

Aus dem kinetischen Anteil ergibt sich zusätzlich:

$$A^{a, \mu} = \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_1 . \quad (7.9)$$

Die Addition der beiden Anteile ergibt den gesamten Axialstrom:

$$A^{a, \mu} = (1 - c_1 w \varphi) \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_1 . \quad (7.10)$$

Die Ersetzung:

$$w \varphi = \frac{1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \quad (7.11)$$

liefert für den axialen Strom des Spinors Ψ_1 :

$$A_{\Psi_1}^{a, \mu} = \left[1 - \frac{c_1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right] \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_1 . \quad (7.12)$$

Völlig analog ergibt sich für den Spinor Ψ_2 :

$$A_{\Psi_2}^{a, \mu} = \left[-1 + \frac{c_2}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right] \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_2 . \quad (7.13)$$

Zwecks der Berechnung der axialen Ströme der physikalischen Felder N und N^* , werden die Vorfaktoren zusammengefasst wie:

$$g_A^{(1)} = 1 - \frac{c_1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) , \quad (7.14)$$

$$g_A^{(2)} = -1 + \frac{c_2}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) . \quad (7.15)$$

Folglich gilt mit den Ersetzungen aus Gl. (4.32):

$$\begin{aligned}
& g_A^{(1)} \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_1 + g_A^{(2)} \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \Psi_2 \\
&= g_A^{(1)} \frac{1}{2 \cosh \delta} (\bar{N} e^{\delta/2} - \bar{N}^* \gamma_5 e^{-\delta/2}) \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} (N e^{\delta/2} + \gamma_5 N^* e^{-\delta/2}) \\
&+ g_A^{(2)} \frac{1}{2 \cosh \delta} (\bar{N} \gamma_5 e^{-\delta/2} + \bar{N}^* e^{\delta/2}) \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} (\gamma_5 N e^{-\delta/2} - N^* e^{\delta/2}) .
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Relevant sind nur die Terme der Form $\bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N$ und $\bar{N}^* \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N^*$. Werden diese Terme aus Gl. (7.16) isoliert, erhält man für die axiale Kopplungskonstante des Nukleons:

$$\begin{aligned}
& g_A^{(1)} \frac{1}{2 \cosh \delta} e^{\delta/2} \bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N + g_A^{(2)} \frac{1}{2 \cosh \delta} e^{-\delta/2} \bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N \\
& \Rightarrow g_A^N = \frac{1}{2 \cosh \delta} (g_A^{(1)} e^{\delta/2} + g_A^{(2)} e^{-\delta/2}),
\end{aligned} \tag{7.17}$$

und die seines chiralen Partners:

$$\begin{aligned}
& g_A^{(1)} \frac{1}{2 \cosh \delta} e^{-\delta/2} \bar{N}^* \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N^* + g_A^{(2)} \frac{1}{2 \cosh \delta} e^{\delta/2} \bar{N}^* \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N^* \\
& \Rightarrow g_A^{N^*} = \frac{1}{2 \cosh \delta} (g_A^{(1)} e^{-\delta/2} + g_A^{(2)} e^{\delta/2}) .
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Spezialfälle

1. Lokale chirale Symmetrie $g_1 = c_1 = c_2$:

In diesem Fall gilt:

$$g_A^{(1)} = \frac{1}{Z^2} \quad g_A^{(2)} = \frac{-1}{Z^2}, \tag{7.19}$$

womit sich für die baryonischen axialen Kopplungskonstante folgende Werte ergeben:

$$g_A^{(N)} = \frac{\tanh \delta}{Z^2} < 1 \quad g_A^{(N^*)} = \frac{-\tanh \delta}{Z^2}. \tag{7.20}$$

Da angenommen wird, dass $Z > 1$, ist dieser Wert der axialen Kopplungskonstante für das Nukleon N nicht in Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $g_A^N = 1.267 \pm 0.004$ [16].

2. Ohne Vektormesonen $Z = 1$ und $c_1 = c_2 = 0$:

In diesem Grenzfall lauten die axialen Kopplungskonstanten:

$$g_A^N = -g_A^{N^*} = \tanh \delta. \tag{7.21}$$

Dieses Resultat entspricht dem Resultat aus Ref. [5].

Wird ferner der Limes $\delta \rightarrow \infty$ (Entmischung der chiralen baryonischen Partner/naives Modell) betrachtet, ergeben sich die Kopplungskonstanten zu $g_A^N = 1$ und $g_A^{N^*} = -1$.

Kurz, es ist ohne die Einbindung von Vektormesonen nicht möglich, die experimentellen Werte zu reproduzieren.

3. Im Falle $\delta \rightarrow \infty$ mit $N = \Psi_1$ und $N^* = -\Psi_2$, gilt dagegen:

$$g_A^{(N)} = g_A^{(1)} \quad g_A^{(N^*)} = g_A^{(2)}. \quad (7.22)$$

Da $Z > 1$, ist es plausibel, dass das Verhältnis c_1/g_1 negativ sein muss, um den experimentellen Wert $g_A^N = 1.267 \pm 0.004$ [16] erhalten zu können.

7.1.2 Im naiven Assignment

Die Rechnung erfolgt analog zu der in Abschnitt 7.1.1). Unter Benutzung der naiven Lagrangedichte (4.45) lauten die axialen Ströme:

$$\begin{aligned} A^{a,\mu} = & \left[1 + Zw f_\pi \frac{2c_{12} + c_1 e^\delta + c_2 e^{-\delta}}{2 \cosh \delta} \right] \bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N \\ & + \left[1 + Zw f_\pi \frac{(-2c_{12} + c_1 e^{-\delta} + c_2 e^\delta)}{2 \cosh \delta} \right] \bar{N}^* \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N^*. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Nach Ersetzung der Kopplungskonstanten gemäß Gl. (4.49) erhält man folgende axiale Kopplungskonstanten für das naive Assignment:

$$g_A^{(N)} = 1 + 2Zw f_\pi \tilde{c}_1 \quad , \quad g_A^{(N^*)} = 1 + 2Zw f_\pi \tilde{c}_2. \quad (7.24)$$

8. Ergebnisse im Vakuum - Modell mit globaler Symmetrie

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für die Streulängen, wie sie im *Spiegel-Modell* erzielt wurden, dargestellt. Für den chiralen Partner des Nukleons werden mehrere Möglichkeiten in Betracht gezogen: der natürlichste Kandidat ist die Resonanz $N^* = N(1535)$. Sie ist die leichteste Resonanz im Baryonenspektrum, die die korrekten Quantenzahlen besitzt ($J^P = \frac{1}{2}^-$) [16]. Ebenfalls werden die nächstschwerere Resonanz $N(1650)$, sowie ein spekulativer Kandidat $N(1200)$, der von den Autoren in Ref. [47] postuliert wurde, untersucht.

In den ersten beiden Abschnitten wird die Vorgehensweise bei der Parameterbestimmung sowie bei der Berechnung der interessanten physikalischen Größen vorgestellt und mit einer Einführung in die Fehlerrechnung geschlossen. Anschließend werden die Ergebnisse im global symmetrischen Modell mit chiralem Partner und Vektormesonen dargelegt, sowie die verschiedenen Grenzfälle: a) das Modell mit lokaler Symmetrie, b) ohne Vektormesonen und c) ohne Partner.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden kurz die Ergebnisse präsentiert, wie sie bei Einführung des chiralen Partners im *naiven Modell* erzielt wurden.

8.1 Parameteroptimierung

Liegt eine Theorie mit n unabhängigen Parametern $x_1, x_2 \dots x_n$ vor, stellt sich unmittelbar die Frage nach ihrer Bestimmung. In der Regel bietet sich an, eine Funktion des Typs

$$\chi^2[x_1, x_2 \dots x_n] = \left(\frac{A_1[x_1, x_2 \dots x_n] - A^{exp}}{\delta A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2[x_1, x_2 \dots x_n] - A^{exp}}{\delta A_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{A_q[x_1, x_2 \dots x_n] - A^{exp}}{\delta A_q} \right)^2 \quad (8.1)$$

zu minimieren, d.h. die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden. Die Funktionen $A_i[x_1, x_2, \dots, x_n]$, ($i = \{1, \dots, q\}$, $q > n$) sind die Funktionen der Theorie, die ihrerseits von den Parametern $x_1, x_2 \dots x_n$ abhängen. Die analytischen Ausdrücke dieser Funktionen können berechnet werden, ihre Werte und Fehler sind experimentell bekannt: $A^{exp} \pm \delta A$. Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{min}$ ein Minimum der Funktion χ^2 . Um zu untersuchen, ob ein Minimum vorliegt, wird die zweite Ordnung der Taylorentwicklung, d.h. die Hesse-Matrix in Augenschein genommen. Zu diesem Zweck wird folgender Vektor definiert:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{min} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{min} \end{pmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}. \quad (8.2)$$

Die Taylorentwicklung lautet:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \chi^2[\mathbf{x}^{min}] + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min})^t \nabla \chi^2(\mathbf{x}^{min})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}) \\ &\quad + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min})^t H(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}) + R(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}).\end{aligned}\quad (8.3)$$

Am stationären Punkt $\mathbf{x} = \{x_1^{min}, x_2^{min} \dots x_n^{min}\}$, bzw. $\mathbf{y} = 0$, gilt:

$$\nabla \chi^2(\mathbf{x}^{min}) = 0, \text{ hinreichende Bed. f. Extrempunkte.} \quad (8.4)$$

Dabei ist $R(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min})$ das zu vernachlässigende Restglied der Reihenentwicklung und H die Hesse-Matrix:

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi^2[y_1, \dots, y_n]}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{\mathbf{y}=0}. \quad (8.5)$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \chi^2[\mathbf{x}^{min}] + \frac{1}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min})^t H(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}). \quad (8.6)$$

Die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen in der Hesse-Matrix ist unter der Voraussetzung gegeben, dass die Funktion χ^2 in einer ganzen Umgebung von \mathbf{x}^{min} zweimal stetig differenzierbar ist. Dies führt dazu, dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist. Eine symmetrische Matrix besitzt immer reelle Eigenwerte. Da eine invertierbare Matrix B existiert, kann H diagonalisiert werden, und es gilt dass:

$$BHB^t = \lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad (8.7)$$

die Diagonalmatrix ist, mit den positiven Eigenwerten λ_i von H als Diagonalelemente. Es können nun neue Variablen z_i in der Art eingeführt werden, dass gilt:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{min} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{min} \end{pmatrix} = B(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{min}). \quad (8.8)$$

Die Matrix B hat folgende Form:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Da $B\mathbf{y} = \mathbf{z}$, bzw. $\mathbf{y}^t B^t = \mathbf{z}^t$, kann Gl. (8.6) als Funktion der neuen Variablen z_i geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{z}) &= \chi^2[\mathbf{x}^{min}] + \mathbf{z}^t BHB^t \mathbf{z} = \chi^2[\mathbf{x}^{min}] + \mathbf{z}^t \lambda \mathbf{z} \\ &= \chi^2[\mathbf{x}^{min}] + z_1^2 \lambda_1 + z_2^2 \lambda_2 + \dots + z_n^2 \lambda_n.\end{aligned}\quad (8.10)$$

Die Fehler der Variablen z_i sind nun genau:

$$\delta z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}. \quad (8.11)$$

Für eine beliebige Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$ wird der Fehler wie folgt berechnet: zuerst wird eine Variablentransformation vorgenommen, man erhält F als Funktion der neuen Variablen, $F(z_1, \dots, z_n)$, dann ergibt sich der Fehler zu:

$$\delta F_i = \sqrt{\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_1} \delta z_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_n} \delta z_n\right)^2}. \quad (8.12)$$

Die Fehler der ursprünglichen Variablen x_i erfolgen durch die Identifizierung der Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$ mit x_i . Die Fehler der Variablen x_i lauten:

$$\delta x_i = \sqrt{H_{ii}^{-1}}.$$

8.2 Die Parameter im Vakuum

Zunächst werden die Parameter, die vom mesonischen Teil der Theorie kommen, nämlich aus der Lagrangedichte Gl. (3.4), betrachtet. Es sind zehn: $\lambda_1, \lambda_2, c, h_0, h_1, h_2, h_3, \mu^2, g_1$, und m_1 . Es wird nun dargestellt, wie die Parameter durch die Massen der Mesonen und die Pion-Zerfallskonstante bestimmt werden können.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.1 dargelegt, ist die chirale Symmetrie im mesonischen Sektor spontan gebrochen, wodurch das skalare Feld σ einen Vakuumerwartungswert v.e.v. annimmt, $\langle \sigma \rangle = \varphi$, das chirale Kondensat. Dieses kann mit dem Minimum des Potentials der Theorie identifiziert werden. Nachdem das σ -Feld um seinen v.e.v. verschoben wurde, $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$, erhält man folgendes Potential, vgl. Gl. (3.4):

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}(\mu^2 - c)\varphi^2 + \frac{1}{4}\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right)\varphi^4 - h_0\varphi, \quad (8.13)$$

$$0 = \frac{dV}{d\varphi} = \left[\mu^2 - c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right)\varphi^2\right]\varphi - h_0. \quad (8.14)$$

Wie in Kapitel 3 beschrieben, entstehen durch die Verschiebung des skalaren Feldes um seinen v.e.v. Terme, die Axialvektorfelder und Pseudoskalare mischen. So ist z. B. der Mischungsterm zwischen dem a_1 -Meson und dem Pion der Form $-g_1 \mathbf{a}_1^\mu \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi}$. Diese Terme werden wiederum durch einen weiteren Shift beseitigt, dieses Mal ein Shift der Axialektorfelder um die pseudoskalaren Felder. Letztere müssen nach dieser Verschiebung renormiert werden. Für das a_1 -Meson und das Pion gilt:

$$\mathbf{a}_1^\mu \rightarrow \mathbf{a}_1^\mu + Z w \partial^\mu \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} \rightarrow Z \boldsymbol{\pi}, \quad \text{mit } w = \frac{g_1 \varphi}{m_{a_1}^2}, \quad Z^2 = \frac{m_{a_1}^2}{m_{a_1}^2 - (g_1 \varphi)^2}. \quad (8.15)$$

Nach zweimaligem Ableiten des Potentials nach dem entsprechenden Mesonenfeld ergeben sich für die Massen der Mesonen:

$$m_\sigma^2 = \mu^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \varphi^2, \quad m_{a_0}^2 = \mu^2 + c + \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \varphi^2, \quad (8.16)$$

$$m_{\eta_N}^2 = Z^2 \left[\mu^2 + c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \varphi^2 \right], \quad m_\pi^2 = Z^2 \left[\mu^2 - c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \varphi^2 \right] = \frac{Z^2 h_0}{\varphi}, \quad (8.17)$$

$$m_\omega^2 = m_\rho^2 = m_1^2 + \frac{\varphi^2}{2} (h_1 + h_2 + h_3), \quad m_{f_1}^2 = m_{a_1}^2 = m_1^2 + (g_1 \varphi)^2 + \frac{\varphi^2}{2} (h_1 + h_2 - h_3). \quad (8.18)$$

An diesen Gleichungen ist offenkundig, dass nur die Kombination $h_1 + h_2 = h$ erscheint, welche durch einen einzigen Parameter ersetzt werden kann, so dass nunmehr noch neun von den ursprünglichen zehn Parametern durch die sechs Mesonenmassen zu bestimmen sind. Die Parameter $h = h_1 + h_2$ und h_3 erhält man durch Auflösung der Gln.(3.13) und (3.15):

$$h = \frac{1}{Z^2 f_\pi^2} \left(m_\rho^2 - 2m_1^2 + \frac{m_a^2}{Z^2} \right), \quad (8.19)$$

$$h_3 = \frac{1}{Z^2 f_\pi^2} \left(m_\rho^2 - \frac{m_a^2}{Z^2} \right). \quad (8.20)$$

Eine siebte physikalische Größe ist die Pion-Zerfallskonstante, f_π , die aus dem axialen Strom bestimmt wird, s. Kapitel 3, $J_{A\mu}^a = \frac{\varphi}{Z} \partial_\mu \pi^a + \dots \equiv f_\pi \partial_\mu \pi^a + \dots$, also, $\varphi = Z f_\pi$. Schließlich verbleiben die beiden unabhängigen Parameter g_1 und m_1 . Der Massenparameter m_1 erscheint nur in der isoskalaren Pion-Nukleon-Streulänge $a_0^{(+)}$, so dass dieser Parameter vorerst unbestimmt gelassen werden kann. Später kann der Verlauf von $a_0^{(+)}$ in Abhängigkeit von m_1 untersucht werden. Für nachfolgende Rechnungen wird es auch von Vorteil sein, g_1 durch den Renormierungsfaktor der pseudoskalaren Wellenfunktion Z auszudrücken. Dies gelingt mit Gl. (8.15):

$$g_1(Z) = \frac{m_{a_1}}{Z f_\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}}. \quad (8.21)$$

Es ist vorteilhafter, Z anstatt g_1 zu benutzen, da g_1 eine echte Funktion von Z ist, dagegen $Z(g_1)$ mehrwertig ist, siehe Abschnitt 3.1.2. Als Wert für die Masse des a_1 -Mesons wird $m_{a_1} = 1.23 \text{ GeV}$ [16] benutzt.

Zunächst wird der Wert des Parameters Z bestimmt. Zu diesem Zweck ist der Zerfall $a_1 \rightarrow \pi \gamma$ von Nutzen, dessen Zerfallsbreite wohlbekannt ist, $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi \gamma}^{\text{exp}} = 640 \pm 246 \text{ keV}$ [16]. Die Zerfallsbreite berechnet sich durch minimale Kopplung des Photons im mesonischen Teil [20, 48] und hängt ausschließlich von Z ab:

$$\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi \gamma} [Z] = \frac{\alpha}{24} m_{a_1} (Z^2 - 1) \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_{a_1}^2} \right)^{3/2}, \quad (8.22)$$

mit der Feinstrukturkonstante $\alpha = 1/137$.

Die Größen m_1 und Z sind demnach die einzigen unabhängigen Parameter, die aus dem

mesonischen Sektor resultieren.

Aus dem baryonischen Sektor dagegen stammen die Parameter: \hat{g}_1 , \hat{g}_2 , c_1 , c_2 und m_0 . Die ersten beiden Parameter wurden schon in Kapitel 4 festgelegt, Gl. (4.28):

$$\hat{g}_{1,2} = \frac{1}{\varphi} \left[\pm(m_N - m_{N^*}) + \sqrt{(m_N + m_{N^*})^2 - 4m_0^2} \right]. \quad (8.23)$$

Als freie Parameter verbleiben hier somit c_1 , c_2 und m_0 . Diese drei, zusammen mit m_1 und Z , sind die fünf Parameter, die in den Ausdrücken der Kopplungskonstanten des Nukleons und seines Partners, den Zerfallsbreiten $N^* \rightarrow NP$ und den $N\pi$ -Streulängen auftreten.

Die Zerfallsbreite des a_1 -Mesons, Gl. (8.22), mitsamt den Bedingungen aus dem baryonischen Sektor, dienen der Bestimmung der Parameter, die in diesem Sektor von Bedeutung sind. Der Übersicht wegen werden alle Bedingungen noch einmal zusammengefasst, vgl. Kapitel 4, 6 und 7:

Die vier Parameter sind:

c_1 , c_2 , m_0 , Z .

Die vier Funktionen A_i in χ^2 lauten:

•

$$g_A^N = \frac{1}{2 \cosh \delta} \left[\left(1 - \frac{c_1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right) e^{\delta/2} + \left(-1 + \frac{c_2}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right) e^{-\delta/2} \right], \quad (8.24)$$

•

$$g_A^{N^*} = \frac{1}{2 \cosh \delta} \left[\left(1 - \frac{c_1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right) e^{-\delta/2} + \left(-1 + \frac{c_2}{g_1} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \right) e^{\delta/2} \right], \quad (8.25)$$

•

$$\begin{aligned} \Gamma_{N^* \rightarrow N\pi} = & 3 \frac{\sqrt{m_N^4 + m_{N^*}^4 + m_\pi^4 - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_N^2 m_\pi^2 - 2m_{N^*}^2 m_\pi^2}}{4\pi m_{N^*}} \frac{m_N}{m_{N^*}} \frac{Z^2}{32 \cosh^2 \delta} \times \\ & \left\{ w^2 (c_1 + c_2)^2 \left[(m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2) \frac{E_P}{m_N} + m_P^2 \left(1 - \frac{E_N}{m_N} \right) \right] \right. \\ & \left. + (\hat{g}_1 - \hat{g}_2)^2 \left(\frac{E_N}{m_N} + 1 \right) + 2w (\hat{g}_1 - \hat{g}_2) (c_1 + c_2) \left(\frac{m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_P^2}{2m_N} + E_P \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

•

$$\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma} [Z] = \frac{\alpha}{24} m_{a_1} (Z^2 - 1) \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_{a_1}^2} \right)^{3/2}. \quad (8.27)$$

Im folgenden Schritt werden die Werte der Parameter berechnet, die die χ^2 -Funktion minimieren, s. Gl. (8.1):

$$\begin{aligned} \chi^2[m_N, m_{N^*}, c_1, c_2, \delta, Z] = & \left(\frac{g_A^N[c_1, c_2, \delta, Z] - g_A^{N,exp}}{\delta g_A^N} \right)^2 + \left(\frac{g_A^{N^*}[c_1, c_2, \delta, Z] - g_A^{N^*,exp}}{\delta g_A^{N^*}} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}[m_N, m_{N^*}, c_1, c_2, \delta, Z] - \Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}^{exp}}{\delta \Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}[Z] - \Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}^{exp}}{\delta \Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Mit den erhaltenen Werten der Parameter werden anschließend sowohl die Pion-Nukleon-Streulängen, als auch der Zerfall $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}$ berechnet und die Ergebnisse mit den experimentellen Werten verglichen. Die analytischen Ausdrücke dieser Größen sind in den Kapiteln 5 und 6 zu finden, Gln. (6.28), (5.57), sowie (5.58).

8.3 $N(1535)$ als chiraler Partner des Nukleons $N(939)$

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse im Fall der Resonanz $N(1535)$ als chiraler Partner des Nukleons diskutiert. Die Resonanz $N(1535)$ besitzt die Masse $m_{N^*} = (1535 \pm 10)$ MeV [16]. Aus Ref. [16] sind überdies folgende Werte bekannt:

- $\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}^{exp} = (67.5 \pm 23.6)$ MeV,
- $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}^{exp} = (0.640 \pm 0.246)$ MeV,
- $g_A^{N,exp} = 1.267 \pm 0.004$,
- sowie $g_A^{N^*,lattice} = 0.2 \pm 0.3$ aus Ref. [46].

Die Kopplungskonstanten \hat{g}_1 und \hat{g}_2 können geradewegs aus Gl. (4.28) bestimmt werden:

$$\hat{g}_1 = 11.0 \pm 1.5, \quad \hat{g}_2 = 18.8 \pm 2.4. \quad (8.29)$$

Der Parameter $h(m_1)$ bleibt als einziger Parameter frei, während $h_3 = 2.47$ ist.

Die Massen der Baryonen und Mesonen sind bekannt: $m_N = 939$ MeV, $f_\pi = 92.4$ MeV, $m_a = 1230$ MeV und $m_\pi = 139$ MeV [16]. Mit der oben beschriebenen Standard χ^2 -Analyse ergeben sich für die Parameter und ihre Fehlergrenzen folgende Ergebnisse:

Parameter	Werte
c_1	-3.0 ± 0.6
c_2	11.6 ± 3.6
Z	1.67 ± 0.2
m_0	(460 ± 136) MeV

Tabelle 8.1: Werte der Parameter für $N(1535)$ im Rahmen des Spiegelmodells.

Der Wert von m_0 ist mit (460 ± 136) MeV beträchtlich höher als der von ref. [5] berechnete ((270) MeV). Diese Tatsache deutet auf einen nicht unerheblichen Beitrag anderer Kondensate zur Nukleonenmasse hin.

Vorab soll jedoch der Zusammenhang zwischen m_0 , dem chiralen Kondensat φ und den Nukleonenmassen veranschaulicht werden, s. Abb. 8.1, linkes Bild [49]. Nach Gl. (4.27) ist die Beziehung zwischen m_0 und φ offenkundig nicht linear. Ist $m_0 \neq 0$, Abb. 8.1 a), so sind in der Phase, in der chirale Symmetrie besteht, $\varphi \rightarrow 0$, die Nukleonenmassen nicht Null, sondern entarten bei einem endlichen Wert, $m_N = m_N^* = m_0 = (460 \pm 136)$ MeV. Wird die chirale Symmetrie gebrochen, werden die Werte der Massen größer und

nehmen bei $\varphi = Zf_\pi = 154.3$ MeV ihre physikalischen Werte an, $m_N = 939$ MeV und $m_N^* = 1535$ MeV. Das chirale Kondensat ist hier also für den Unterschied zwischen den Werten der Massen der Nukleonen verantwortlich. Ist dagegen $m_0 \rightarrow 0$, verschwindet die Mischung zwischen den Feldern Ψ_1 und Ψ_2 und die Nukleonenmasse wird ausschließlich durch Brechung der chiralen Symmetrie generiert, siehe Abb. 8.1 b). Der v.e.v. $\varphi = Zf_\pi$ des skalaren-isoskalaren σ -Feldes wird durch ein *mexican-hat*-Potential erzeugt (gemäß Kapitel 2), wobei $Z \approx 1.67$ durch die Einbindung von (Axial-)Vektorfeldern erscheint. Infolgedessen führt die Verschiebung $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$ zu nichtverschwindenden Baryonenmassen. In diesem Fall könnte eine Lagrangedichte konstruiert werden, die aus zwei voneinander unabhängigen Lagrangedichten für jedes Baryon besteht, da $\Psi_1 = N$ und $\Psi_2 = N^*$, jedoch wird an dieser Stelle nur der massengenerierende Term formuliert:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hat{g}_1}{2}\bar{\Psi}_1(\sigma + \varphi)\Psi_1 - \frac{\hat{g}_2}{2}\bar{\Psi}_2(\sigma + \varphi)\Psi_2. \quad (8.30)$$

Dies entspricht dem in Kapitel 4 beschriebenen *naiven Modell*. Die Massen der Nukleonen lassen sich daraus unmittelbar ablesen:

$$m_N = \frac{\hat{g}_1}{2}\varphi, \quad m_N^* = \frac{\hat{g}_2}{2}\varphi. \quad (8.31)$$

Werden die physikalischen Massen sowie $\varphi = 154.3$ MeV benutzt, bekommt man:

$$\hat{g}_1 = 12.2 \quad \text{sowie} \quad \hat{g}_2 = 20. \quad (8.32)$$

Beide Massen sind schlichte lineare Funktionen des chiralen Kondensates und verschwinden, wenn $\varphi \rightarrow 0$.

Andererseits kann auch der Verlauf der Nukleonenmassen von m_0 untersucht werden, siehe rechte Seite von Abb. 8.1, wobei das chirale Kondensat den festen Wert 154.3 MeV annimmt. Wie schon an Gl. (4.27) erkennbar, sind die Massen eine langsam steigende Funktion von m_0 . Wird in diesem Fall der Grenzwert $m_0 \rightarrow 0$ gebildet, so ergibt sich für die Nukleonenmassen:

$$m_N = \frac{\hat{g}_{1,\text{spiegel}}}{2}\varphi \approx 850 \text{ MeV}, \quad m_N^* = \frac{\hat{g}_{2,\text{spiegel}}}{2}\varphi \approx 1450 \text{ MeV}. \quad (8.33)$$

Aufgrund dieser Betrachtungsweise würde der Wert $m_0 = 460$ MeV daher lediglich eine Erhöhung von ≈ 100 MeV in der Nukleonenmasse verursachen.

An dieser Stelle ist angebracht, einen Einblick in die Zusammensetzung von m_0 als Funktion von anderen Kondensaten zu geben, womit das Modell dilatationsinvariant wird. Ausführlich wird dieser Punkt dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt. Ein Modell ist dann dilatationsinvariant (oder skaleninvariant), wenn alle Kopplungskonstanten dimensionslos sind. So führen etwa explizite Teilchenmassen zu einer Brechung der Skaleninvarianz. Der Massenterm der Lagrangedichte der Baryonen in Gl. (4.10) ist damit der einzige nicht dilatationsinvariante Term. Hier ergeben die bilinearen Ausdrücke der Form $\bar{\Psi}\Psi$ die Dimension $D = 3$, da jedes Fermion die Dimension $3/2$ hat. Der Parameter m_0 muss daher die Dimension $D = 1$, also einer Energie, besitzen. Um Dilatationsinvarianz zu erreichen, wie es auch in der QCD verlangt wird, können die Nukleonen an

das chiral invariante Dilatonfeld G [61], sowie an ein Tetraquarkfeld gekoppelt werden:
 $\chi \equiv [\bar{u}, \bar{d}] [u, d]$:

$$\mathcal{L}_{mass} = (a\chi + bG)(\bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L}) , \quad (8.34)$$

a und b sind somit *dimensionslose* Kopplungskonstanten. Werden beide skalaren Felder um ihre Vakuum Erwartungswerte verschoben, $G \rightarrow G + G_0$ und $\chi \rightarrow \chi + \chi_0$, resultiert für m_0 :

$$m_0 = a\chi_0 + bG_0, \quad (8.35)$$

wobei G_0 das Gluonkondensat und χ_0 das Kondensat des Tetraquarks darstellen.

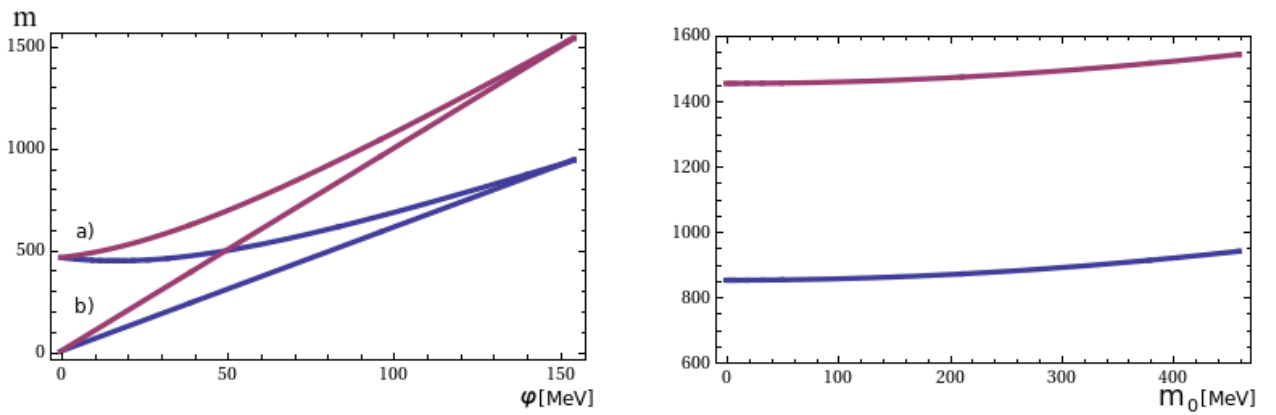


Abbildung 8.1: Massen der Nukleonen als Funktion des chiralen Kondensats φ (N : blaue Linie, N^* : violette Linie).

Links: Bei den Kurven a) wird das Kondensat von Null bis zu seinem physikalischen Wert 154.308 MeV bei fixem $m_0 = 460$ MeV variiert. Die Massen der Nukleonen, die sowohl von φ als auch von m_0 abhängen, laufen von 460 MeV, dem Wert von m_0 , bis zu ihren physikalischen Werten, $m_N = 939$ MeV und $m_N^* = 1535$ MeV. b) Schaltet man m_0 aus, setzt also voraus, dass die Nukleonenmasse ausschließlich durch chirale Symmetriebrechung entsteht, so sind die Nukleonenmassen für $\varphi = 0$ (Restaurierung der chiralen Symmetrie) beide Null, $m_N = m_N^* = 0$.

Rechts: Während φ seinen festen Wert bei 154.3 MeV behält, wird m_0 von 0 bis 460 MeV variiert.

In Abb. 8.2 ist der Verlauf von m_0 in Abhängigkeit der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners gezeigt. Der grün gekennzeichnete Bereich entspricht dem mit Lattice QCD ermittelten Wert und seinen Fehlergrenzen: $g_A^{N^*} = 0.2 \pm 0.3$ [46]. Bei dem Zentralwert $g_A^{N^*} = 0.2$ nimmt der Massenparameter genau den Wert $m_0 = 460$ MeV an.

Um nun die Gültigkeit des Modells zu untersuchen, werden die Werte der Streulängen $a_0^{(\pm)}$ berechnet und den experimentellen Werten gegenüber gestellt. Die isovektorielle Streulänge $a_0^{(-)}$ hängt von c_1 , c_2 , Z und m_0 , sowie von m_ρ und g_1 , ab. Der Parameter g_1 ist wiederum eine Funktion von Z und m_a . Die Werte der Massen des ρ - und des a_1 -Mesons sind mit hinreichender Genauigkeit bekannt [16], so dass der Wert der isovektoriellen Streulänge

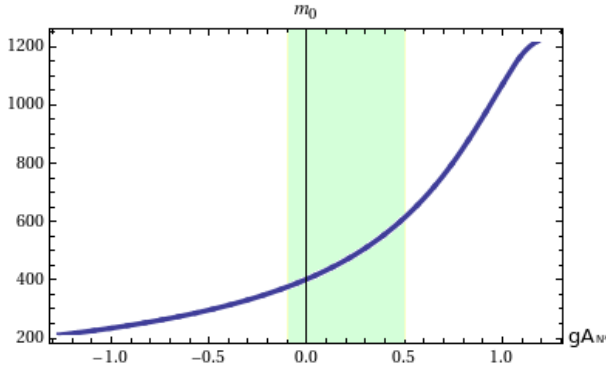


Abbildung 8.2: m_0

Der Massenparameter m_0 als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners $N(1535)$. (Grünes Band: mit Lattice QCD bestimmter Bereich für $g_A^{N(1535)}$).

sehr präzise bestimmbar ist:

$$a_0^{(-)} = (6.04 \pm 0.63) \cdot 10^{-4} \text{MeV}^{-1}, \quad (8.36)$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentell gemessenen Wert, vgl. Kapitel 5:

$$a_{0,exp}^{(-)} = (6.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-4} \text{MeV}^{-1}. \quad (8.37)$$

In Abb. 8.3 ist die Streulänge als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners geplottet. Die Bestimmung der isoskalaren Streulänge $a_0^{(+)}$ gestaltet sich schwie-

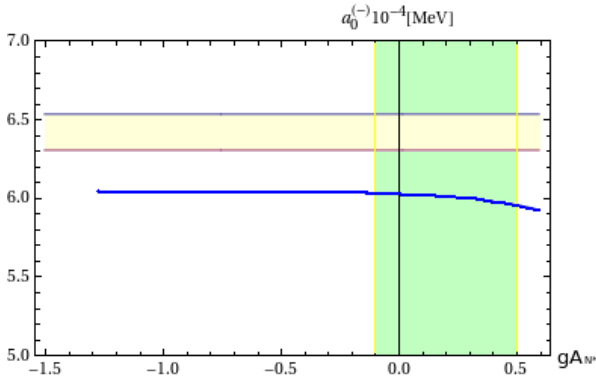


Abbildung 8.3:

Isovektorielle Streulänge. $a_0^{(-)}$ als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners $N(1535)$. (Gelbes Band: experimentell gemessener Bereich der Streulänge; grünes Band: mit Lattice QCD bestimmter Bereich für $g_A^{N(1535)}$).

riger, da sie, abgesehen von c_1 , c_2 , Z und m_0 zusätzlich noch von m_σ und m_1 abhängt. Die Zuordnung des σ -Mesons ist nicht eindeutig, so wie auch die Massen der skalaren Mesonen mit großer Unbestimmtheit versehen sind. So ist z.B. für $f_0(600)$ der Bereich der Masse $m = (400 - 1200) \text{ MeV}$, und für $f_0(1370)$, $m = (1200 - 1500) \text{ MeV}$ [16].

Der Parameter m_1 wiederum parametrisiert nach Gl. (3.15) den Beitrag zur Masse des ρ -Mesons, der nicht von dem chiralen Kondensat stammt. Physikalisch sinnvolle Werte für m_1 liegen mithin zwischen 0 und m_ρ . An der unteren Schranke ist also $m_1 = 0$ und so wird die Masse des ρ -Mesons ausschließlich durch chirale Symmetriebrechung generiert, d.h. seine Masse verschwindet, wenn $\varphi \rightarrow 0$. Bei $m_1 = m_\rho$ dagegen spielt die chirale Symmetriebrechung bei der Massenerzeugung von ρ keine Rolle. In Abb. 8.4 wird die Streulänge $a_0^{(+)}$ als Funktion des freien Massenparameters m_1 für verschiedene Werte von m_σ zwischen

400 und 1370 MeV gezeigt. Man beachte die Skalierung: die Werte der Streulänge sind in $[10^{-6} \text{ MeV}]$ angegeben. Der experimentelle Bereich,

$$a_{0,exp}^{(+)} = (-8.8 \pm 7.2) \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}, \quad (8.38)$$

ist als gelbes Band eingezeichnet. Es ist ersichtlich, dass für einen kleinen Wert der σ -Masse, $m_\sigma = 400 \text{ MeV}$, ein großer Wert von m_1 erforderlich ist, um die experimentellen Werte wiederzugeben. Bei steigenden Werten von m_σ wird der Wert von m_1 immer kleiner. Für $m_\sigma \geq 1200 \text{ MeV}$ können die experimentellen Werte nicht reproduziert werden. Dieses letzte Resultat schließt jedoch ein schweres σ -Meson nicht aus, es deutet vielmehr darauf hin, dass zusätzlich ein leichtes skalares-isoskalares Meson erforderlich ist.

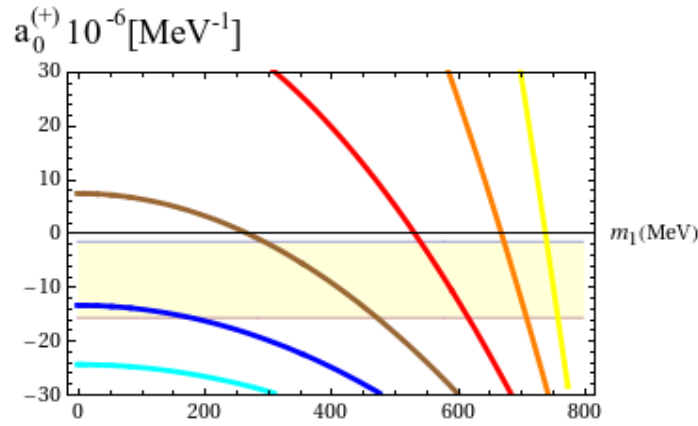


Abbildung 8.4: Isoskalare Streulänge $a_0^{(+)}$ als Funktion des Parameters m_1 für verschiedene Werte von m_σ . Farbcode: gelb: $m_\sigma = 400 \text{ MeV}$, orange: $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$, rot: $m_\sigma = 800 \text{ MeV}$, braun: $m_\sigma = 1000 \text{ MeV}$, blau: $m_\sigma = 1200 \text{ MeV}$, cyan: $m_\sigma = 1370 \text{ MeV}$, gelbes Band: experimenteller Bereich.

Als letzter Wert wird die Zerfallsbreite $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}$ nach Gl. (6.28) bestimmt:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta} = (10.9 \pm 3.8) \text{ MeV}, \quad (8.39)$$

wobei der Fehler im pseudoskalaren Mischungswinkel $\phi_P = -38.7^\circ \pm 6^\circ$ berücksichtigt wurde.

Der Wert dieser Zerfallsbreite ist um einen Faktor 7 kleiner als der von $\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}$, wie es zu erwarten ist, beachtet man, dass das Verhältnis der Vorfaktoren $\lambda_\eta/\lambda_\pi \approx 0.097$ beträgt. Allerdings ist das Resultat (8.39) offensichtlich sehr viel kleiner als der experimentelle Wert [16]:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}^{exp} = (78.7 \pm 24.3) \text{ MeV}. \quad (8.40)$$

Eine Verbesserung könnte erzielt werden, wenn man ein Szenario mit vier Nukleonen (zwei chirale Partner-Paare) entwickelt, etwa $N(939)$, $N(1440)$, $N(1535)$ und $N(1650)$, in dem die Zerfälle von $N(1535)$ und $N(1650)$ in $N^* \rightarrow N\pi$ und $N^* \rightarrow N\eta$ simultan beschrieben werden können. Dies ist im Rahmen eines Modells mit nur einem Nukleon und seinem chiralen Partner nicht möglich.

8.4 $N(1650)$ als chiraler Partner von $N(939)$

Eine weitere Möglichkeit für den chiralen Partner des Nukleons ist die Resonanz $N(1650)$. Aus ref. [16] sind folgende Werte bekannt:

- $m_{N^*} = (1650 \pm 15) \text{ MeV}$,
- $\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}^{exp} = (128 \pm 44) \text{ MeV}$,
- $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}^{exp} = (0.640 \pm 0.246) \text{ MeV}$,
- $g_A^{N,exp} = 1.267 \pm 0.004$,
- sowie $g_A^{N^*,lattice} = 0.55 \pm 0.2$ aus Ref. [46].

Damit ergibt sich für die Parameter:

Parameter	Werte
c_1	-3.3 ± 0.7
c_2	14.8 ± 3.4
Z	1.67 ± 0.2
m_0	$(709 \pm 157) \text{ MeV}$

Tabelle 8.2: Werte der Parameter für $N(1650)$ im Rahmen des Spiegelmodells.

Die Kopplungskonstanten \hat{g}_1 und \hat{g}_2 lauten:

$$\hat{g}_1 = 9.45 \pm 1.81, \quad \hat{g}_2 = 18.68 \pm 2.68. \quad (8.41)$$

In diesem Fall ist die Masse m_0 größer als im Fall von $N(1535)$, jedoch nach wie vor in einem plausiblen physikalischen Bereich. Abbildung 8.5 stellt m_0 als Funktion von $g_A^{N(1650)} = 0.55 \pm 0.2$ dar. Für die isovektorielle Streulänge ergibt sich:

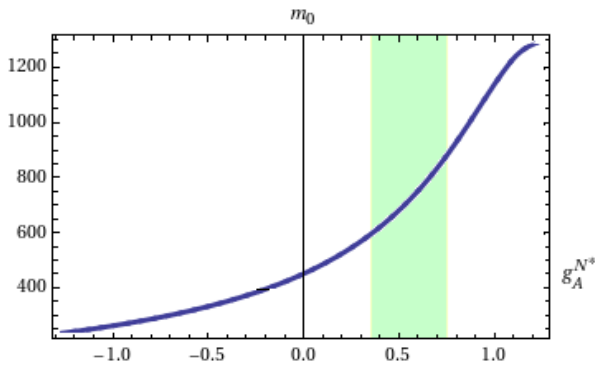


Abbildung 8.5: m_0

Der Massenparameter m_0 als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners $N(1650)$ (Grünes Band: mit Lattice QCD bestimmter Bereich für $g_A^{N(1650)} = 0.55 \pm 0.2$).

$$a_0^{(-)} = (5.90 \pm 0.46) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}, \quad (8.42)$$

und damit einen vergleichbaren Wert zum vorhergehenden Fall, $N(1535)$. Der Verlauf von $a_0^{(-)}$ als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners ist ebenfalls vergleichbar, siehe Abb. 8.6.

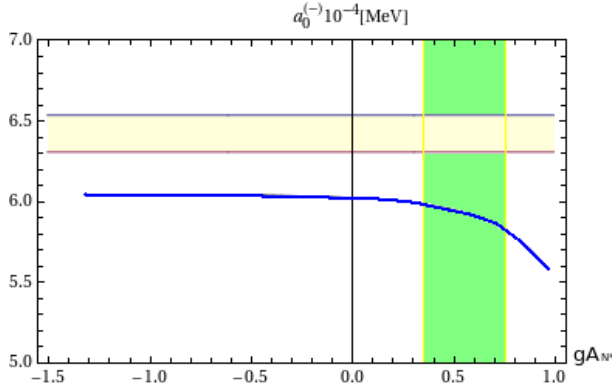


Abbildung 8.6: Isovektorielle Streulänge. $a_0^{(-)}$ als Funktion der axialen Kopplungskonstante des chiralen Partners $N(1650)$. (Gelbes Band: experimentell gemessener Bereich der Streulänge; grünes Band: mit Lattice QCD bestimmter Bereich für $g_A^{N(1650)}$).

Die isoskalare Streulänge wird auch in diesem Fall gegen m_1 und für verschiedene Werte von m_σ geplottet. Es werden vergleichbare Ergebnisse wie im vorhergehenden Fall erlangt, wobei hier etwas kleinere Massen des σ -Mesons erforderlich sind, um die experimentellen Daten zu reproduzieren, siehe Abb. 8.7.

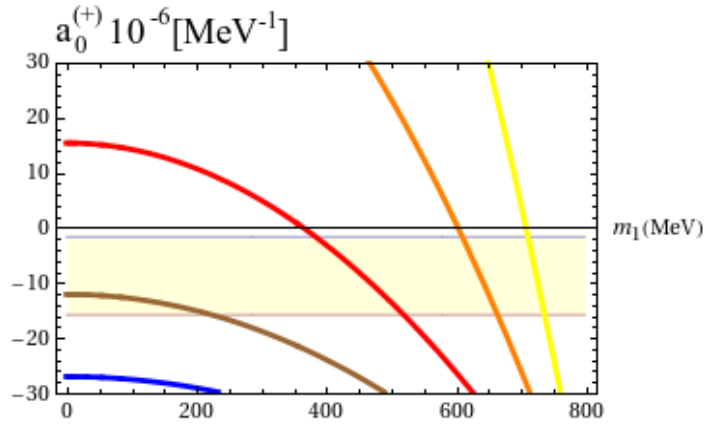


Abbildung 8.7: Isoskalare Streulänge $a_0^{(+)}$ als Funktion des Parameters m_1 für verschiedene Werte von m_σ . Farbcode: gelb: $m_\sigma = 400$ MeV, orange: $m_\sigma = 600$ MeV, rot: $m_\sigma = 800$ MeV, braun: $m_\sigma = 1000$ MeV, blau: $m_\sigma = 1200$ MeV, cyan: $m_\sigma = 1370$ MeV, gelbes Band: experimenteller Bereich.

Für die Zerfallsbreite in $N\eta$ ergibt sich der Wert:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta} = (18.3 \pm 8.5) \text{ MeV}. \quad (8.43)$$

Der Vergleich mit dem experimentellen Wert [16]:

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}^{exp} = (10.7 \pm 6.7) \text{ MeV}. \quad (8.44)$$

zeigt eine wesentlich bessere Übereinstimmung zwischen berechnetem und gemessenem Wert als im Fall $N(1535)$.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Zuordnung des chiralen Partners des Nukleons zu $N(1535)$ oder $N(1650)$ für die Streulängen weitgehend unwesentlich ist, da sie vergleichbare Resultate liefern. Die Zerfallsbreite $\Gamma_{N(1650) \rightarrow N\eta}$ dagegen liefert einen Wert, der sehr viel näher am Experiment liegt als die Zerfallsbreite $\Gamma_{N(1535) \rightarrow N\eta}$. In diesem Fall wäre allerdings die Einordnung von $N(1535)$ als chiraler Partner problematisch.

8.5 $N(1200)$: ein spekulativer Partner

Als letzten Anwärter für den chiralen Partner des Nukleons wird die spekulative Resonanz $N(1200)$, mit einer Masse $m_N^* \sim 1200$ MeV, erwogen. Eine baryonische Resonanz dieser Art wurde bisher nicht nachgewiesen, so dass eine Zerfallsbreite $\Gamma_{N(1200) \rightarrow N\eta} \geq 800$ MeV angenommen werden muss, d.h. eine Zerfallsbreite, die so groß ist, dass diese Resonanz nicht experimentell nachweisbar ist. Die Begründung zur Existenz einer solchen Resonanz stammt aus Ref. [47] im Rahmen von Untersuchungen von symmetrischer Kernmaterie und wurde danach auch in Ref. [51] auf asymmetrische Kernmaterie angewendet, wie sie z.B. in Neutronensternen existiert. Ausschlaggebend für die Annahme der Existenz dieser Resonanz war der Vergleich mit dem Mesonenspektrum, das einen Massenunterschied zwischen chiralen Partnern von 300–400 MeV aufweist. Da die dem Nukleon nächst schwerere Resonanz (mit entgegengesetzter Parität) ca. 600 MeV darüber liegt, nahm man an, dass es noch eine leichtere Resonanz geben muss.

Für diese Resonanz ist der Wert der axialen Kopplungskonstante unbekannt. Wird jedoch m_0 für die Werte von z.B. $g_A^{N(1535)}$ geplottet, Abb. 8.8, und angenommen, dass sich der Wert von $g_A^{N(1200)}$ in einem ähnlichen Bereich befindet wie der von $g_A^{N(1535)}$, ergibt sich ein außergewöhnlich großer Wert von $m_0 \geq 1000$ MeV. Ein solch großer Wert wäre jedoch nicht einfach zu begründen, da in diesem Fall $m_0 > m_{N(939)}$, d.h. das chirale Kondensat müsste einen negativen Beitrag zur Masse des Nukleons leisten.

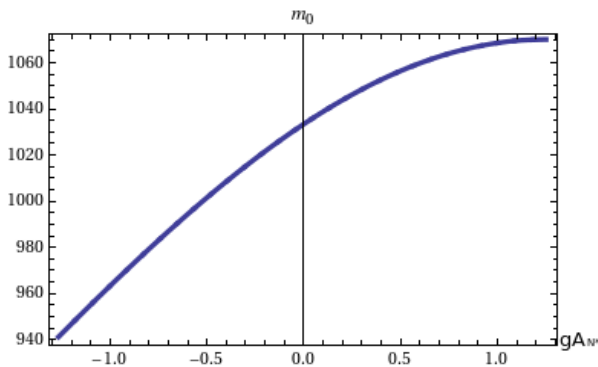


Abbildung 8.8: m_0

Der Parameter m_0 als Funktion der axialen Kopplungskonstante $g_A^{N^}$ für $N(1200)$. Die axiale Kopplungskonstante ist für dieses spekulative Baryon nicht bekannt. Würde man jedoch annehmen, dass sie im Bereich von ≈ 0.3 , wie die des Nukleons, läge, dann wäre m_0 viel zu groß und das chirale Kondensat müsste einen negativen Beitrag zur Masse leisten.*

Die Streulängen ergeben:

$$a_0^{(+)} \sim 10^{-4} \text{ MeV}^{-1} \quad , \quad a_0^{(-)} \sim 10^{-2} \text{ MeV}^{-1} \quad , \quad (8.45)$$

und liegen dementsprechend zwei Größenordnungen oberhalb des experimentellen Bereiches.

Diese Resonanz wurde somit im Rahmen dieser Dissertation als ein möglicher chiraler Partner des Nukleons ausgeschlossen.

8.6 Grenzfälle

Nachfolgend werden drei wichtige Grenzfälle der Studien untersucht.

8.6.1 Lokale Symmetrie

Lokale chirale Symmetrie ist gegeben, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $g_1 = c_1 = c_2$, sowie
- $h_1 = h_2 = h_3 = 0$,

demnach folgt gemäß Gln. (3.15) und (3.13):

$$m_a^2 = m_1^2 + g_1^2 \varphi^2, \quad m_\rho^2 = m_1^2 \quad \text{und} \quad Z = \frac{m_a}{m_\rho}. \quad (8.46)$$

Mit den experimentellen Werten von $\Gamma_{N(1535) \rightarrow N\pi}$ und $\Gamma_{a_1 \rightarrow \gamma\pi}$ ergibt sich:

$$m_0 = (730 \pm 229) \text{ MeV}. \quad (8.47)$$

Die axialen Kopplungskonstanten lauten:

$$g_A^N = -g_A^{N*} = \frac{\tanh \delta}{Z^2} = 0.33 \pm 0.02. \quad (8.48)$$

Die axiale Kopplungskonstante des Nukleons g_A^N entspricht nicht dem experimentellen Wert.

Dagegen liegt die isovektorielle Streulänge

$$a_0^{(-)} = (4.9 \pm 1.7) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1} \quad (8.49)$$

im experimentellen Bereich.

Im Fall lokaler Symmetrie ist $m_1 = m_\rho$ und hat somit den festen Wert $(775.49 \pm 0.34) \text{ MeV}$. Folglich hängt die isoskalare Streulänge nur noch von m_σ ab. Für verschiedene vorgegebene σ -Massen ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} a_0^{(+)} &= (7.06 \pm 3.12) \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1} \quad , \quad m_\sigma = 1370 \text{ MeV}, \\ a_0^{(+)} &= (4.46 \pm 0.11) \cdot 10^{-5} \text{ MeV}^{-1} \quad , \quad m_\sigma = 440 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Beide Werte liegen außerhalb der experimentellen Fehlergrenzen von $a_0^{(+)}$.

Abbildung 8.9 zeigt für den Fall $N^* = N(1535)$ eine Studie aller Größen, die die Pion-Nukleon-Streuung betreffen: s - und p -Wellen-Streulängen, a_0^\pm und $a_{1(\pm)}^\pm$, sowie die effektive s -Wellen-Reichweite, r_0^\pm .

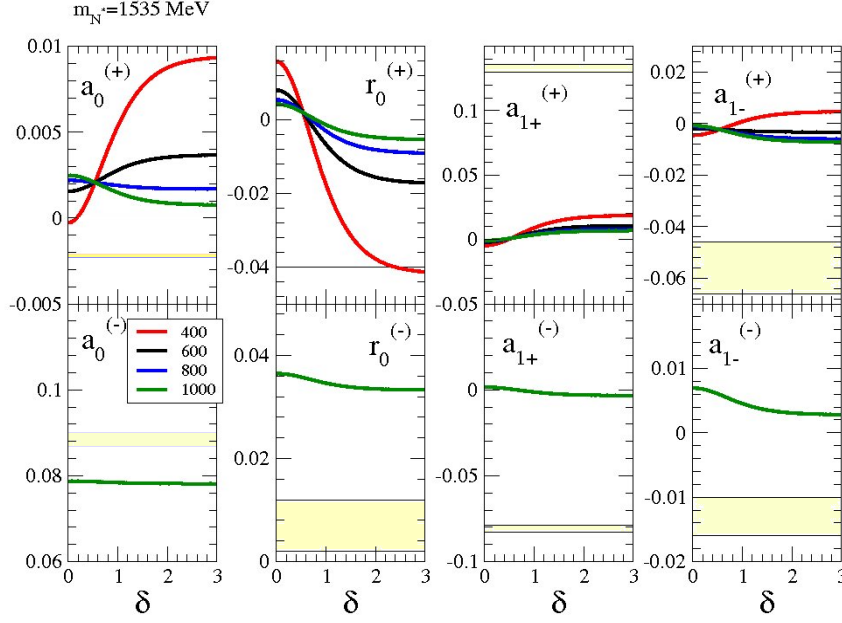


Abbildung 8.9: Die Streulängen im Fall der lokalen Symmetrie.

Aufgetragen sind die Größen in Einheiten von m_π . Dies hat den Grund, dass neue verlässliche experimentelle Daten nur für s -Wellen a_0^\pm verfügbar sind [31]. Die experimentellen Daten für $a_{1(\pm)}^\pm$ und r_0^\pm stammen dagegen aus Ref. [52], die weniger verlässlich sind, aber zur ursprünglichen Einheitsgebung führten. Die experimentellen Daten entsprechen den gelben Bändern in der Abbildung.

Die Streuparameter sind als Funktion des Mischungsparameters δ geplottet, welcher äquivalent zu dem Parameter m_0 ist. Die niedrigen Werte des Mischungsparameters, $\delta \rightarrow 0$, entsprechen einerseits großen Werten von $m_0 \approx 1230$ MeV, andererseits entspricht ein großer Wert von δ kleinen Werten von m_0 , wie etwa $\delta \approx 3$ den Wert $m_0 \approx 120$ MeV gibt. Im oberen Teil des Bildes sind die isoskalaren Streuparameter dargestellt. Da sie alle von der Masse des σ -Mesons abhängen, wurden die Kurven für verschiedene m_σ geplottet. Die Werte der jeweiligen Masse m_σ stehen in der Legende, im unteren Teil des ersten Bildes. Die isovektoriellen Größen (unterer Teil) sind dagegen unabhängig von m_σ .

Folgende Ergebnisse können abgelesen werden:

- (i) Für einen kleinen Wert von $m_\sigma \approx 400\text{--}600$ MeV ist ein kleiner Wert von δ favorisiert. Dies entspricht dem Fall, dass der größte Anteil der Nukleonenmasse von m_0 stammt. Der experimentelle Bereich wird jedoch nicht erreicht.

- (ii) Für größere m_σ ist die Abweichung von den experimentellen Werten noch größer.
- (iii) Die effektive Reichweite favorisiert klar einen größeren Mischungsparameter, sowie eine kleinere Masse m_σ . Die experimentellen Daten stammen allerdings aus Ref. [52] und wurden danach nicht mehr gemessen.
- (iv) Die p -Wellen-Streulängen sind eine Größenordnung kleiner als die von Ref. [52] gegebenen Daten.

Es entstehen daher Unklarheiten bezüglich des Zusammenhangs zwischen m_σ und δ bzw. m_0 . Aus diesem Grund ist es nicht möglich, an diesem Punkt eine Aussage über den Ursprung der Nukleonenmasse zu treffen. Auch eine korrekte Beschreibung der niederenergetischen πN -Phänomenologie kann im Rahmen einer lokalen chiralen Symmetrie nicht erbracht werden [53, 20].

8.6.2 Entkopplung der Vektormesonen

Die Wechselwirkungsterme, die Vektormesonen enthalten, verschwinden, wenn:

- $g_1 = c_1 = c_2 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$, und somit
- $Z = 1, w = 1$.

N(1535)

Aus der Zerfallsbreite $\Gamma_{N(1535) \rightarrow N\pi}$ berechnet sich der Wert:

$$m_0 = (262 \pm 46) \text{ MeV}, \quad (8.51)$$

welcher das Ergebnis von Ref. [5] wiedergibt.

Die physikalischen Größen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Größen	Werte
$g_A^N = -g_A^{N*}$	0.97 ± 0.01
$a_0^{(-)}$	$(5.7 \pm 0.47) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
$a_0^{(+)} (m_\sigma = 1.37 \text{ GeV})$	$(-1.08 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
$a_0^{(+)} (m_\sigma = 0.44 \text{ GeV})$	$(-7.55 \pm 0.19) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
m_0	$(262 \pm 46) \text{ MeV}$

Tabelle 8.3: Tabellarische Zusammenfassung der physikalischen Größen für den Spezialfall ohne Vektormesonen, $N(1535)$.

Die axialen Kopplungskonstanten lauten:

$$g_A^N = -g_A^{N*} = \tanh \delta = 0.97 \pm 0.01. \quad (8.52)$$

Die isovektorielle Streulänge ist:

$$a_0^{(-)} = (5.7 \pm 0.47) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}. \quad (8.53)$$

Diese beiden Größen liegen somit nicht innerhalb der experimentellen Grenzen bzw. Lattice QCD-Studien. Die isoskalare Streulänge liegt zwei Größenordnungen unterhalb der gemessenen Werte, siehe Abb. 8.10.

N(1650)

Streulängen und axiale Kopplungskonstanten liegen für beide Partner nicht innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen bzw. der durch Lattice QCD berechneten Bereiche. An diesen Werten ist deutlich erkennbar, dass die Wahl zwischen $N(1535)$ und $N(1650)$ als chiraler Partner des Nukleons unwesentlich ist und die Werte der physikalischen Größen für beide Resonanzen fast gleich sind.

In Abb. 8.10 ist die isoskalare Streulänge als Funktion von m_σ gezeigt, sie liegt zwei Größenordnungen unterhalb der gemessenen Werte (gelbes Band).

Größen	Werte
$g_A^N = -g_A^{N^*}$	0.97 ± 0.01
$a_0^{(-)}$	$(5.99 \pm 0.66) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
$a_0^{(+)} (m_\sigma = 1.37 \text{ GeV})$	$(-1.08 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
$a_0^{(+)} (m_\sigma = 0.44 \text{ GeV})$	$(-7.43 \pm 0.19) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}$
m_0	$(301 \pm 51) \text{ MeV}$

Tabelle 8.4: Tabellarische Zusammenfassung der physikalischen Größen für den Spezialfall ohne Vektormesonen, $N(1650)$.

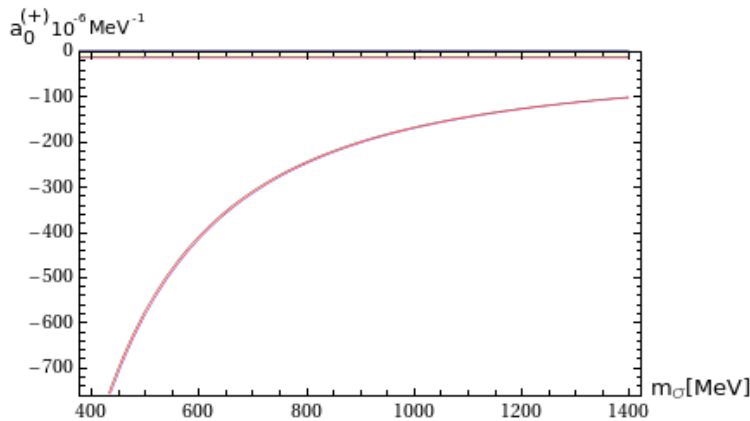


Abbildung 8.10: Isoskalare Streulängen bei Entkopplung der Vektormesonen

Isoskalare Streulängen $a_0^{(+)}$ für $N(1535)$ (blaue Kurve) und $N(1650)$ (rote Kurve) als Funktion der σ -Masse. Sie liegen deutlich unterhalb des experimentellen Bereiches (gelbes Band). Da die Kurven aufeinander liegen, wird gefolgert, dass die Wahl des chiralen Partners in diesem Fall geringfügig relevant ist.

8.6.3 Ohne Partner

Abschließend wird das Modell ohne chiralen Partner des Nukleons untersucht. Dies ist der Grenzfall $m_0 \rightarrow 0$. In diesem Limes entkoppelt der chirale Partner und es bleibt das Lineare Sigma-Modell mit Vektor- und Axialvektor-Mesonen. Eine Beschreibung des Zerfalls $N^* \rightarrow NP$, wobei P für ein pseudoskalares Meson steht, ist hier nicht möglich. Aufgrund der Entkopplung des chiralen Partners entfallen auch die Parameter c_2 und \hat{g}_2 . Mit $g_A^{N,exp} = 1.26 \pm 0.004$ und $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}^{exp} = (0.640 \pm 0.246)$ MeV ergeben sich:

$$c_1 = 0.59 \pm 0.51, \quad Z = 1.66 \pm 0.2. \quad (8.54)$$

Die isovektorielle Streulänge ergibt sich zu:

$$a_0^{(-)} = (5.99 \pm 0.66) \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1}. \quad (8.55)$$

Die isoskalare Streulänge ist in Abb. 8.11 als Funktion von m_1 dargestellt. In diesem Fall sind für kleine Werte von m_σ sehr große Werte von $m_1 \approx m_\rho$ erforderlich. Große Massen des σ -Mesons ($m_\sigma = 1.2$ GeV) erfordern eine kleines m_1 , in diesem Fall liegt die Streulänge aber durchaus in bzw. nahe dem experimentellen Bereich.

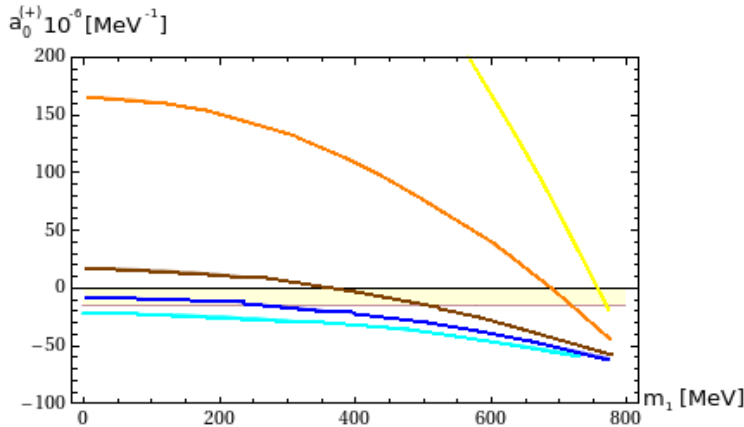


Abbildung 8.11: Isoskalare Streulänge
Isoskalare Streulänge als Funktion von m_1 für das Lineare Sigma-Modell ohne chiralen Partner des Nukleons. Farbcode: gelb: $m_\sigma = 400$ MeV, orange: $m_\sigma = 600$ MeV, rot: $m_\sigma = 800$ MeV, braun: $m_\sigma = 1000$ MeV, blau: $m_\sigma = 1200$ MeV, cyan: $m_\sigma = 1370$ MeV, gelbes Band: experimenteller Bereich.

Die Ergebnisse dieses Falles zeigen deutlich, dass für eine Reproduktion der experimentellen Werte der Streulängen der chirale Partner nur eine marginale Rolle spielt, jedoch unentbehrlich ist, sollen Zerfälle des Typs $N^* \rightarrow NP$ beschrieben werden.

8.7 Über den Ursprung von m_0

Die isoskalare Streulänge $a_0^{(+)}$ weist eine starke Abhängigkeit von der Masse des σ -Mesons auf. Eine ähnliche Situation zeigt sich bei $\pi\pi$ -Streuung bei niedrigen Energien [20]. Obwohl ein leichtes σ -Meson von den Streulängendaten bevorzugt wird, zeigen andere Studien, z.B. [20], dass für das σ – als der chirale Partner des Pion im Linearen Sigma-Modell – eine Masse größer als 1 GeV favorisiert wird. Daher muss es mit der Resonanz $f_0(1370)$

identifiziert werden, anstatt mit dem leichteren $f_0(600)$ [54, 55]. Jedoch ist auch im Rahmen des Linearen Sigma Modells, das in dieser Dissertation verwendet wird, die Zerfallsbreite $f_0(600) \rightarrow \pi\pi$ zu klein, wenn das σ -Meson mit $f_0(600)$ identifiziert wird [20].

Identifiziert man das σ -Meson mit der Resonanz $f_0(1370)$, bleiben zwei Möglichkeiten für die Resonanz $f_0(600)$:

- (i) Sie ist ein dynamisch generierter Zustand aufgrund der Pion-Pion-Wechselwirkung. Auch die verbleibenden Skalare unterhalb von 1 GeV, $f_0(980)$, $a_0(980)$ und $K_0^*(800)$, können so interpretiert werden.
- (ii) Die Resonanz $f_0(600)$ besteht vorwiegend aus einem Diquark $[u, d]$ und einem Antidiquark $[\bar{u}, \bar{d}]$: $f_0(600) \simeq [\bar{u}, \bar{d}][u, d]$. In diesem Fall bilden die leichten Skalare, $f_0(600)$, $f_0(980)$, $a_0(980)$ und $K_0^*(800)$, ein zusätzliches Tetraquarknonet [56, 57, 58, 59, 60].

In diesen beiden Fällen ist die Resonanz $f_0(600)$, die zur Erklärung der $\pi\pi$ - und πN -Streuung benötigt wird, sowie auch zum Verständnis der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, nicht der chirale Partner des Pions.

Im Folgenden werden die Konsequenzen des Falles (ii) qualitativ diskutiert. Zu diesem Zweck ist ein kurzer Exkurs in die Dilatonfelder nützlich.

In der QCD ist die Dilatationsinvarianz der Lagrangedichte im chiralen Limes durch Quanteneffekte gebrochen. Dem kann durch Einführung eines Dilatonfeldes G Rechnung getragen werden [61]. Das Potential spiegelt die Spur -Anomalie der QCD wider und hat die Form: $V(G) \propto G^4 \left(\log \frac{G}{\Lambda_G} + \frac{1}{4} \right)$, wobei $\Lambda_G \sim \Lambda_{QCD}$ die einzige dimensionsbehaftete Größe ist, die im chiralen Limes in der Lagrangedichte auftritt. Da das Feld G einen nicht verschwindenden v.e.v besitzt, muss es um diesen verschoben werden: $G \rightarrow G_0 + G$, wobei die Fluktuationen um das Minimum einem skalaren Glueball entsprechen. Lattice-Rechnungen zufolge liegt seine Masse bei $M_G \sim 1.7$ GeV [62].

Im chiralen Limes ist das gesamte Wechselwirkungspotential $V[\Phi, L_\mu, R_\mu, \Psi_1, \Psi_2, G, \chi]$ endlich für jeden endlichen Wert der Felder, sowie dilatationsinvariant, mit Ausnahme des Λ_G -Termes. Das bedeutet, es verbleiben nur Terme der Art: $G^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]$, $\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]^2$, ... Nach der Verschiebung des Dilatonfeldes $G \rightarrow G_0 + G$, wird der Term $G^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]$ zu $G_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] + \dots$, wobei die Punkte für die Wechselwirkungen zwischen dem Glueball und den Mesonen stehen.

Wohlgemerkt ist ein Term der Form $G^{-4} \text{Tr} [\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi]^2$ nicht erlaubt aufgrund der Annahme, dass das Potential immer endlich ist. Ferner kann die Lagrangedichte keine Operatoren beinhalten mit Ordnung $O > 4$, da diese durch Terme $\propto G^{-n}$ erzeugt werden mit $n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ [63].

Nun kann man sich dem Massenterm $\sim m_0$ in Gl. (4.10) zuwenden:

$$m_0(\bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L}) . \quad (8.56)$$

Der Parameter m_0 hat die Dimension einer Masse und ist der einzige Term der Lagrangedichte der Nukleonen, der nicht dilatationsinvariant ist. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, wobei die chirale Symmetrie unverletzt bleibt, ist, ihn an ein chiral invariantes Dilatonfeld

G zu koppeln. Darüber hinaus ist auch ein Tetraquarkfeld der Form $\chi \equiv \frac{1}{2}[\bar{u}, \bar{d}][u, d]$ chiral invariant unter $U(2)_R \times U(2)_L$ -Transformationen.

Der dilatationsinvariante Wechselwirkungsterm lautet:

$$(a\chi + bG) (\bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L}), \quad (8.57)$$

wobei a und b dimensionslose Kopplungskonstanten sind.

Nach einer Verschiebung der Felder um ihren v.e.v., $\chi \rightarrow \chi_0 + \chi$ und $G \rightarrow G_0 + G$, erhält man erneut den Massenterm (8.56) der Lagrangedichte, setzt man:

$$m_0 = a\chi_0 + bG_0, \quad (8.58)$$

wobei χ_0 und G_0 das Tetraquark- und das Glueballkondensat sind.

Auch im Sektor der hochangeregten Baryonen bleibt die vorausgehende Diskussion gültig [64]. Je schwerer die Baryonen werden, desto geringer wird die Rolle des Quarkkondensats φ sein. Für zwei schwere chirale Partner B und B^* wird eine Massenentartung der Form: $m_B \simeq m_{B^*} \simeq m_0$ erwartet.

Im Bereich der schweren Baryonen wird angenommen, dass das Glueballkondensat G_0 die dominierende Rolle spielt, $m_0 \simeq bG_0$, während die Rolle des Tetraquarkkondensates χ_0 unerheblich wird. Bei niederenergetischen nukleonischen Zuständen liefert das Tetraquarkkondensat χ_0 jedoch einen maßgeblichen Beitrag. Ferner ist sein Verhalten mit dem des Quarkkondensats φ eng verbunden [59, 65].

Im Folgenden wird die Wechselwirkung des Nukleons mit dem Tetraquark χ betrachtet. Vom niederenergetischen Standpunkt aus handelt es sich um einen sehr interessanten Zustand, da er leichter als das Gluonium sowie das skalare Quarkonium ist, $m_\chi \sim M_{f_0(600)} \sim 0.6$ GeV. Eine Wechselwirkung der Art:

$$a\chi(\bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L}) \quad (8.59)$$

trägt zur Pion-Nukleon-Streuung bei und es ist nicht ausgeschlossen, dass sie zu einer Verbesserung der theoretischen Ergebnisse bzgl. der experimentellen Daten führt.

Überdies stellt das Tetraquark einen Zwischenzustand bei der Nukleon-Nukleon(N-N)-Wechselwirkung dar und aufgrund seiner kleinen Masse könnte es eine wichtige Rolle im Ein-Meson-Austausch Bild der N-N-Wechselwirkung spielen. Allgemein wird angenommen, dass diese Wechselwirkung aufgrund eines Mesonaustausches (also eines Quark-Antiquark Zustandes) erfolgt. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass auch ein weiteres skalares Feld (das Tetraquark) diese Wechselwirkung vermittelt. Dies wird in Abb. 8.12 veranschaulicht.

Ein Nukleon sei ein gebundener Zustand von einem Quark und einem Diquark. Dann basiert im gewöhnlichen Quarkbild die Wechselwirkung von zwei Nukleonen auf dem Austausch der beiden Quarks (*one-meson-exchange*). Es ist jedoch auch möglich, dass, anstatt der beiden Quarks, die beiden Diquarks ausgetauscht werden. Wohlgemerkt sind die Diquarks in der korrekten Farb- und Flavour-Antitriplett-Darstellung, nach Ref. [56].

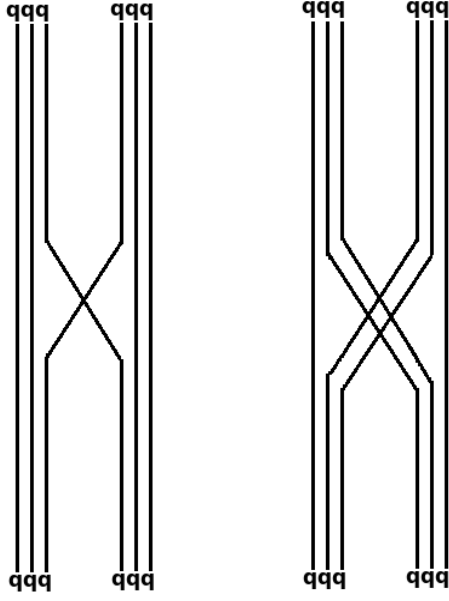


Abbildung 8.12: N-N Wechselwirkung im Quarkbild
Links: im gewöhnlichen Quarkbild der N-N-Wechselwirkung werden zwischen beiden Nukleonen zwei Quarks ausgetauscht. Rechts: mit Einbindung eines Tetraquarks ist auch der Austausch zweier Diquarks zwischen den Nukleonen nicht ausgeschlossen. (Die Farben der Quarks wurden nicht berücksichtigt. Es ist klar, dass das Nukleon ein weisses Objekt sein muss und somit jedes Quark eine andere Farbe trägt.)

8.8 Ergebnisse im naiven Modell

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse im Fall eines naiven Assignments vorgestellt. Die Untersuchung beschränkt sich auf die Resonanz $N(1535)$ als chiraler Partner des Nukleons.

Aus der *naiven* Lagrangedichte (4.48) sind folgende fünf Parameter zu ermitteln: \tilde{g}_1 , \tilde{g}_2 , \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 und \tilde{c}_{12} . Alle dafür benötigten Gleichungen wurden schon in den vorhergehenden Kapiteln aufgestellt. In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, dass sich die ersten beiden Parameter unmittelbar aus den Nukleonenmassen berechnen lassen:

$$m_N = \tilde{g}_1 \varphi \quad \text{und} \quad m_{N^*} = \tilde{g}_2 \varphi. \quad (8.60)$$

Die Parameter \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 folgen aus der Kenntnis der axialen Kopplungskonstanten der Nukleonen:

$$g_A^{(N)} = 1 + 2Zwf_\pi \tilde{c}_1, \quad g_A^{(N^*)} = 1 + 2Zwf_\pi \tilde{c}_2. \quad (8.61)$$

Den letzten Parameter, \tilde{c}_{12} , kann man nun durch den Zerfall $N^* \rightarrow N\pi$ ermitteln, s. Gl. (6.33):

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi} = 3 \frac{k_P}{2\pi} \frac{m_N}{m_{N^*}} \frac{Z^2 w^2 \tilde{c}_{12}^2}{2} \left[(m_{N^*}^2 - m_N^2 - m_\pi^2) \frac{E_\pi}{m_N} + m_\pi^2 \left(1 - \frac{E_N}{m_N} \right) \right]. \quad (8.62)$$

Die benötigten Werte der physikalischen Größen wurden in Abschnitt 8.3 vorgestellt. Die Massen der Baryonen und Mesonen sind: $m_N = 939$ MeV, $f_\pi = 92.4$ MeV, $m_a = 1230$ MeV und $m_\pi = 139$ MeV [16]. Es ergeben sich für die Parameter und ihre Fehlergrenzen folgende Ergebnisse:

Parameter	Werte
\tilde{g}_1	6.08 ± 0.7
\tilde{g}_2	9.95 ± 1.19
\tilde{c}_1	1.29 ± 0.31
\tilde{c}_2	-3.98 ± 3.13
\tilde{c}_{12}	1.05 ± 0.18

Tabelle 8.5: Werte der Parameter für $N(1535)$ im Rahmen des naiven Modells.

Damit berechnen sich die Werte der isoskalaren und isovektoriellen Streulängen, gemäß Gln. (5.59) und (5.60), zu:

$$a_0^{(-)} = (5.40 \pm 0.95) \cdot 10^{-4} \text{MeV}^{-1} , \quad (8.63)$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment $a_{0,exp}^{(-)} = (6.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-4} \text{MeV}^{-1}$. Jedoch liegt die isoskalare Streulänge mit:

$$a_0^{(+)} = -3.85 \cdot 10^{-3} \text{MeV}^{-1} \quad (8.64)$$

etwa drei Größenordnungen über dem experimentellen Wert $a_{0,exp}^{(+)} = -8.85 \cdot 10^{-6} \text{MeV}^{-1}$. Das naive Assignment wird daher als korrektes Assignment für den chiralen Partner ausgeschlossen.

9. Kernmaterie bei endlicher Dichte

Die statistische Physik beschreibt Naturphänomene von Systemen, die zwar aus vielen Subsystemen bestehen, von denen jedoch nur Aussagen über die Gesamtheit von Interesse sind. Diese Aussagen sind abhängig von den Eigenschaften der Subsysteme, nicht desto trotz sind letztere nicht bis ins Detail bekannt, was auch nicht erforderlich ist. Bei dieser Art von Systemen werden statistische Methoden angewandt.

Kernmaterie ist ein theoretisches Konstrukt, das die Berechnungen der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung vereinfachen soll. Kernmaterie ist definiert als ein unendlich ausgedehntes System von gleichvielen Protonen und Neutronen mit einer konstanten Dichte über das ganze Volumen. Man vermeidet dadurch Einflüsse von Oberflächeneffekten, elektromagnetischen Effekten oder Symmetrieeffekten. Letztere erscheinen, wenn die Anzahl von Protonen und Neutronen nicht übereinstimmt. Einen solchen Zustand gibt es in der Natur nicht. Dieser theoretischen Vorstellung mögen Zustände, wie sie in Neutronensternen, im frühen Universum oder im Zentrum schwerer Kernen herrschen oder geherrscht haben, am nächsten kommen. In den Berechnungen für unendlich ausgedehnte Kernmaterie benutzt man drei Größen, deren Werte aus Experimenten mit endlichen Kernen gewonnen werden: die Bindungsenergie pro Nukleon, die Sättigungsdichte und die Kompressibilität, die alle in diesem Kapitel ausführlich erläutert werden.

Für die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen (die sogenannte N-N-Wechselwirkung) sind die Mesonen verantwortlich. Die durch den π -Austausch erzeugte Kraft mittelt sich in isospin-symmetrischer Materie zu Null. Ebenso wie die vom ρ -Austausch verursachte Kraft. Die maßgebenden Kräfte in isospin-symmetrischer Materie kommen von den Mesonen σ und ω , die in der sogenannten Mittlere-Feld-Näherung in das Modell eingebunden werden. In der Mittlere-Feld-Näherung nehmen die Mesonenfelder ihren Mittelwert an. Die Gleichung der Nukleonen ist damit immer noch die freie Dirac-Gleichung, jedoch mit einer durch das σ -Feld modifizierten Masse. Das ω -Feld modifiziert das chemische Potential.

Mit diesem Trick ist es möglich, das System ähnlich einem freien Fermi-Gas zu beschreiben und durch den Fermi-Impuls zu charakterisieren. Die zugrunde liegende Fermi-Dirac-Statistik berücksichtigt den Spin $1/2$ der Nukleonen und damit das Pauli-Prinzip. Bei $T = 0$ sind alle Zustände bis zu einer maximalen Energie E_F , genannt Fermikante, besetzt, oberhalb dieser Energie sind die Zustände unbesetzt. Der Impuls, der dieser Energie E_F entspricht, p_F , nennt sich Fermi-Impuls. Die Nukleonenmasse ist dabei eine effektive Masse und das chemische Potential in der Fermi-Dirac-Statistik wird vom Mittelwert des ω -Mesons verändert.

Die Eigenschaften der Kernmaterie sollen hier kurz zusammengefasst werden [66]:

- Die Nukleonen bewegen sich näherungsweise in sphärischen Gebilden (den Kernen) mit Radius R , Nukleonenzahl A und homogener Ladungsverteilung. Es gilt der Zusammenhang:

$$R \approx 1.2A^{1/3}\text{fm.} \quad (9.1)$$

- Das System befindet sich bei $T = 0$ so lange im Vakuum, bis der Wert des chemischen Potentials auf $\mu = 923$ MeV ansteigt. Dies ist der Wert, an dem die Baryonendichte von 0 zu dem Wert „normaler“ Kernmaterie springt - es liegt demzufolge ein Phasenübergang vor. Die dazugehörige Dichte, die sogenannte Sättigungsdichte, beträgt: $\rho_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$.

Ihr Zusammenhang mit dem Fermi-Impuls, wie später im Detail beschrieben wird, lautet:

$$\rho_0 = \frac{2p_F^3}{3\pi^2}.$$

- Der Wert des chemischen Potentials bei Sättigung, $\mu = 923$ MeV (korrespondierend zu dem Wert $p_F = 258$ MeV für den Fermi-Impuls), entspricht der Ruhemasse des Nukleons minus der Bindungsenergie pro Nukleon in Kernmaterie,

$$E_B = -16 \text{ MeV}. \quad (9.2)$$

- Die Energiedichte ϵ in Kernmaterie hängt mit der vorigen Größe wiederum über:

$$\frac{\epsilon}{\rho} - m = E_B \quad (9.3)$$

zusammen und beträgt $\epsilon(\rho_0) = 141 \text{ MeV/fm}^3$, wobei $m = 938.9 \text{ MeV}$ die gemittelte Masse von Proton und Neutron ist.

- Eine weitere wichtige Eigenschaft von Kernen ist ihre Kompressibilität K , die durch die Krümmung der Zustandsgleichung $\epsilon(\rho)/\rho$ am Punkt der Sättigung $\rho = \rho_0$ gegeben ist:

$$K = 9 \left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]_{\rho=\rho_0}. \quad (9.4)$$

Ihr Wert ist nicht genau bestimmt und liegt zwischen 100 und 300 MeV, wobei der generell bevorzugte Wert um die 250 MeV beträgt. Dies wird am Schluss dieses Kapitels ausführlich diskutiert.

Im folgenden Abschnitt sollen mit statistischen Methoden die thermodynamischen Eigenschaften von Kernmaterie, die hier dargelegt wurden, ausführlich hergeleitet werden. Weiterhin wird kalte ($T = 0$) Kernmaterie bei endlicher Dichte ($\mu > 0$) untersucht. Bedauerlicherweise sind Lattice-QCD-Rechnungen, die sich bei $T > 0$ und $\mu = 0$ als sehr nützlich erweisen, gänzlich unbrauchbar, sobald sie auf den Bereich mit nicht-verschwindendem chemischen Potential angewendet werden. Man ist auf Näherungsmethoden angewiesen. In diesem Kapitel wird die Mean-Field-Näherung genutzt.

9.1 Thermodynamische Größen

Aus der statistischen Physik [67] ist bekannt, dass es drei verschiedene Arten von Ensembles gibt:

- Das mikrokanonische Ensemble, das ein abgeschlossenes System mit fester Energie und Teilchenanzahl in einem festen Volumen beschreibt.
- Das kanonische Ensemble, das mit seiner Umgebung Energie austauschen kann, wobei die Temperatur vorgegeben ist.
- Das großkanonische Ensemble, das mit seiner Umgebung Energie und Teilchen bei vorgegebener Temperatur und vorgegebenem chemischen Potential austauschen kann. In diesem System sind die Temperatur T , das chemische Potential μ und das Volumen V die festen Größen.

Für ein relativistisches Quantensystem aus Fermionen, in dem Erzeugung und Zerstörung von Teilchen stattfinden kann, ist es daher naheliegend, das großkanonische Ensemble zu wählen.

In einem großkanonischen Ensemble, das durch die Hamilton-Funktion H beschrieben wird und in dem die Ladung Q erhalten ist, gilt für die großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z} = \text{Tre}^{-\beta(H-\mu Q)}. \quad (9.5)$$

Hierbei sind: $\beta = T^{-1}$ und μ das zur erhaltenen Ladung gehörende chemische Potential. Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Integration der Hamilton-Dichte \mathcal{H} über den gesamten Raum:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (9.6)$$

In einem System aus Fermionen Ψ ist die erhaltene Ladung genau die Baryonenzahl:

$$Q = \int d^3x \Psi^\dagger \Psi = N, \quad (9.7)$$

wobei $\Psi^\dagger \Psi$ die Baryonendichte ist.

Die Hamilton-Dichte \mathcal{H} hängt mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \nabla \phi, \dot{\phi})$ über folgende Beziehung zusammen:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (9.8)$$

wobei:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (9.9)$$

das kanonisch konjugierte Feld ist.

Die großkanonische Zustandssumme ist die zentrale Größe der Thermodynamik. Aus ihr kann das thermodynamische großkanonische Potential berechnet werden:

$$\Omega = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}, \quad (9.10)$$

aus dem wiederum alle anderen thermodynamischen Größen bestimmbar sind.

Um diese Größen herzuleiten, muss geklärt werden, was genau $\ln \mathcal{Z}$ ist. Im Allgemeinen

nimmt man $\ln \mathcal{Z}_{\mathbf{p}}$ bei einem festen Impuls \mathbf{p} und integriert nachfolgend über alle Impulse:

$$\ln \mathcal{Z} = V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \mathcal{Z}_{\mathbf{p}}. \quad (9.11)$$

Bei Fermionen existieren bei einem festen Impuls nur zwei Zustände, das Vakuum, $|0\rangle$, und der eine Zustand mit festen Impuls \mathbf{p} , der durch die Wirkung des Erzeugungsoperators auf das Vakuum entstanden ist, $|\mathbf{p}\rangle$. Es bleibt daher:

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}} = \langle 0 | e^{-\beta(H-\mu Q)} | 0 \rangle + \langle 1 | e^{-\beta(H-\mu N)} | \mathbf{p} \rangle. \quad (9.12)$$

Wird ausgenutzt, dass

$$\begin{aligned} \text{im Vakuum : } H = Q = 0 &\Rightarrow e^0 = 1 \\ \text{im Zustand } |1\rangle : H |1\rangle &= E^* |1\rangle, \quad Q |1\rangle = 1 |1\rangle, \end{aligned} \quad (9.13)$$

wobei $E^* = \sqrt{p^2 + m^2}$ die Energie des einzelnen Teilchens mit Impuls \mathbf{p} ist, gilt:

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}} = 1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}. \quad (9.14)$$

In einer relativistischen Quantenfeldtheorie setzt sich die Nettoladung Q aus der Differenz von Teilchen N_T und Antiteilchen N_A zusammen, $Q = N_T - N_A$. Die Nettoladung ist auch die Ladung, die erhalten bleibt, nicht die von den einzelnen Teilchen oder Antiteilchen. Daher gilt es, letztere in der vorangegangenen Rechnung einzufügen, so dass:

$$\ln \mathcal{Z} = \gamma V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [(\ln \mathcal{Z})_{\mathbf{p}, N_T} + (\ln \mathcal{Z})_{\mathbf{p}, N_A}]. \quad (9.15)$$

Der Faktor γ berücksichtigt die möglichen Spin-Einstellungen.

Das Ergebnis für $\ln \mathcal{Z}$ lautet schließlich:

$$\ln \mathcal{Z} = \gamma V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)})]. \quad (9.16)$$

Man stellt fest, dass der Beitrag von Teilchen und Antiteilchen sich nur in dem Vorzeichen des chemischen Potentials μ unterscheiden.

Die Nettoladung Q (Baryonenzahl) und die Energie des Systems werden definiert durch:

$$Q = T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z} \quad \text{und} \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} + \mu Q. \quad (9.17)$$

Unter Verwendung von Gl. (9.16), ergeben sich für die drei thermodynamisch wichtigen Größen folgende Resultate:

- Großkanonisches Potential Ω (Gl. (9.10)):

$$\Omega = -T \gamma \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)})], \quad (9.18)$$

- Baryonenzahl:

$$Q = N_T - N_A = V\gamma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu)}} \right], \quad (9.19)$$

- Energie des Systems:

$$E = V\gamma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{E^*}{1 + e^{\beta(E^* - \mu)}} + \frac{E^*}{1 + e^{\beta(E^* + \mu)}} \right]. \quad (9.20)$$

Aus Gl. (9.19) folgt sofort die Bedeutung des Parameters μ :

- (i) Ist $\mu > 0$, so ist $N_T > N_A$ und damit die Anzahl an Teilchen größer als die an Antiteilchen.
- (ii) Ist $\mu < 0$, so ist auch $N_T < N_A$, die Anzahl an Antiteilchen überwiegt.
- (iii) Ist $\mu = 0$ gilt $N_T = N_A$.

Das bedeutet, μ ist das chemische Potential und misst hier die Asymmetrie von Teilchen und Antiteilchen.

9.1.1 Kalte Materie endlicher Dichte: Limes $\beta \rightarrow \infty$

Bei normaler Kerndichte und niedriger Temperatur (nahezu 0 MeV) liegt kalte Kernmaterie vor. Um die Gleichungen, die sie beschreiben, zu erhalten, muss bei obigen Gleichungen (9.18)-(9.20), die Temperatur „ausgeschaltet“ werden, $T \rightarrow 0$.

Es gilt $\mu > 0$, folglich muss auch für die Teilchenenergien erfüllt sein, dass: $E^* < \mu$. Wäre dies nicht der Fall, wäre aus der Exponentialfunktion sofort ersichtlich, dass alle drei Größen Null würden bei $T \rightarrow 0$.

Untersuchung des Ausdrucks:

$$\ln \mathcal{Z} = \gamma V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu)})]. \quad (9.21)$$

im Limes $T \rightarrow 0$ verschwindet der zweite Summand unter dem Integral. Im ersten Summanden dagegen bleibt die Exponentialfunktion. Unter Berücksichtigung, dass gelten muss $E^* < \mu$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \mathcal{Z} &= \gamma V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(e^{-\beta(E^* - \mu)}) \Theta(\mu - E^*) \\ &= \gamma V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-\beta(E^* - \mu)) \Theta(\mu - E^*). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Mit diesem Ergebnis aus Gl. (9.22) folgt für die thermodynamischen Größen:

- Großkanonisches Potential Ω :

$$\Omega = \gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (E^*(p) - \mu), \quad (9.23)$$

- Baryonenzahl:

$$Q = V\gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (9.24)$$

- Energie des Systems:

$$E = V\gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E^*. \quad (9.25)$$

Aus der Baryonenzahl Gl. (9.24) folgt sofort, dass:

$$\frac{Q}{V} = \rho_B = \gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \gamma \frac{p_F^3}{6\pi^2}. \quad (9.26)$$

Dies ist der Ausdruck für die Baryondichte in einem System kalter baryonischer Materie und gibt den überaus wichtigen Zusammenhang zwischen Baryondichte und Fermi-Impuls wieder.

Nachdem die wichtigsten thermodynamischen Größen ermittelt wurden, werden sie im folgenden Abschnitt auf das Modell mit Baryonen und Mesonen angepasst und verwendet. Zuerst müssen jedoch die Näherungen, die man im Fall von endlicher Dichte durchführt, eingeführt werden.

9.2 Erweitertes Lineares Sigma Modell in Mean-field-Näherung

Schon in den 1970er Jahren veröffentlichten Lee und Wick eine Studie über Kernmaterie, beschrieben mit dem normalen Linearen Sigma-Modell. Sie zeigten, dass eine chirale symmetrische Phase existiert, in der die Nukleonenmasse fast verschwindet [68]. Bald darauf wurde jedoch gezeigt, dass diese Lösung nicht stabil ist und Kernmaterie nicht beschrieben kann [69]. In diesem Abschnitt wird das Lineare Sigma-Modell mit (Axial-)Vektormesononen, einem skalaren Dilatonfeld und Paritätspartner des Nukleons verwendet. Um die Eigenschaften von Kernmaterie bei endlicher Dichte im Rahmen des Modells, Gl. (9.27), zu untersuchen, müssen eine Reihe von Näherungen angenommen werden. Die Lösung des vollen quantenfeldtheoretischen Problems ist, aufgrund seiner Komplexität, nicht möglich.

Die volle Lagrangedichte sei hier noch einmal festgehalten, wobei der Massenterm der Nukleonen durch die Kopplung eines Tetraquarkfeldes (welches bei endlicher Dichte eine nicht unerhebliche Rolle spielt) an die Nukleonen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{mes}} + \mathcal{L}_{\text{bar}} = \\
&\text{Tr} \left[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 \\
&+ c (\det \Phi^\dagger + \det \Phi) + h_0 \text{Tr}[(\Phi^\dagger + \Phi)] \\
&- \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\
&+ \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\
&+ \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2R} \\
&- \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi^\dagger \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi \Psi_{2L}) \\
&- a(\chi + \chi_0)(\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}). \tag{9.27}
\end{aligned}$$

Die erste Näherung besteht darin, die Mesonenfelder durch ihre Mittelwerte zu ersetzen. Dies ist die bekannte *Mean-field-Näherung* oder *Näherung des mittleren Feldes* [70]. Formal bedeutet dies, dass das σ - und das ω -Meson durch ihren Mittelwert plus einer Fluktuation δ um diesen Wert dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}
\sigma &\rightarrow \bar{\sigma} + \delta\sigma, \\
\omega_\mu &\rightarrow \omega_0 g_{0\mu} + \delta\omega_\mu, \\
\chi &\rightarrow \bar{\chi} + \delta\chi. \tag{9.28}
\end{aligned}$$

Dabei sind die Erwartungswerte im Vakuum ($p_F = 0$): $\bar{\sigma}(0) = \varphi$, $\omega_0(0) = 0$, sowie $\bar{\chi}(0) = \chi_0$.

Dies sind die einzigen Mesonen, die bei endlicher Dichte kondensieren. Kondensate der anderen Mesonen würden die verlangten Symmetrien brechen. Aufgrund der Annahme von homogener und isotroper unendlich ausgedehnter Kernmaterie, ist nur die zeitliche Komponente des ω -Mesons erlaubt, ω_0 . Alle anderen Komponenten verschwinden wegen der Rotationssymmetrie, $\omega_i = 0$. In Mean-field-Näherung werden die Fluktuationen um die Felder vernachlässigt, so dass: $\delta\sigma, \delta\omega_\mu, \delta\chi \rightarrow 0$.

Die Mesonenfelder sind damit Potentiale, die durch Nukleonendichten erzeugt werden. Die Nukleonen bewegen sich unabhängig voneinander in diesen mittleren Feldern $\bar{\sigma}$, ω_0 und $\bar{\chi}$.

Die Terme der effektiven Lagrangedichte, die in Mean-field-Näherung (MFN) benötigt werden, sind folgende:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{4} (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) \\
&+ \frac{1}{2} \bar{\mu}^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_1^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + \frac{\lambda}{4} \sigma^4 + g\chi \sigma^2 - \epsilon\sigma \\
&+ \bar{\Psi}_1 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi_2 - \frac{\hat{g}_1}{2} \bar{\Psi}_1 \sigma \Psi_1 - \frac{\hat{g}_2}{2} \bar{\Psi}_2 \sigma \Psi_2 \\
&- g_\omega^{(1)} \bar{\Psi}_1 i\gamma_\mu \omega^\mu \Psi_1 - g_\omega^{(2)} \bar{\Psi}_2 i\gamma_\mu \omega^\mu \Psi_2 + a\chi (\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2), \tag{9.29}
\end{aligned}$$

wobei noch zusätzlich eine Wechselwirkung zwischen den beiden Skalaren σ und χ eingeführt wurde, parametrisiert durch die Kopplungskonstante g [65], sowie ein Massen- und ein kinetischer Term für das Tetraquarkfeld.

Mit der Notation aus Kapitel 4 lauten die Kopplungskonstanten der Nukleonen an das ω -Meson außerdem:

$$g_\omega^{(1)} = \frac{c_1}{2} \quad , \quad g_\omega^{(2)} = \frac{c_2}{2}. \quad (9.30)$$

9.2.1 Bestimmung thermodynamischer Größen

In Abschnitt 9.1.1 wurde das großkanonische Potential für ein System von *einer Sorte* von Nukleonen, nämlich N , bei $T = 0$ bestimmt. Existieren mehr als eine Sorte Nukleonen, speziell N und N^* , so muss über diese summiert werden. Darüber hinaus liefert auch das Potential der Mesonen V_M einen Beitrag. Die Definition des großkanonischen Potentials lautet in diesem Zusammenhang:

$$\frac{\Omega}{V} = V_M - V_M(\phi = \phi_0) + \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F_i}} d^3p (E_i^*(p) - \mu_i^*), \quad (9.31)$$

mit $i \in \{N, N^*\}$, und dem Entartungsgrad jedes Nukleontyps γ_i . Die Energie eines Nukleons N_i ist gegeben durch: $E_i^*(p) = \sqrt{p_i^2 + m_i^{*2}}$. Der Term $V_M(\phi = \phi_0)$ steht für die Auswertung des Mesonpotentials, wenn die Kondensate ϕ ihren Vakuum Erwartungswert ϕ_0 annehmen, $\sigma = \varphi$, $\chi = \chi_0$, und $\omega = 0$. Das Potential V_M ist abhängig von der Änderung der Kondensate mit der Dichte. Das effektive chemische Potential lässt sich aus der Lagrangedichte ablesen. In der Lagrangedichte (9.29) erkennt man, dass die Kopplung der Nukleonen sowie die Terme der erhaltenen Ladung von derselben Struktur sind, führt man die Mean-field-Näherung ein:

$$\mathcal{L}_{MFN,eff} \propto -g_\omega^{(i)}\omega_0 \Psi_i^\dagger \Psi_i + \mu_i \Psi_i^\dagger \Psi_i = (\mu_i - g_\omega^{(i)}\omega_0) \Psi_i^\dagger \Psi_i. \quad (9.32)$$

Damit lautet das effektive chemische Potential:

$$\mu_i - g_\omega^{(i)}\omega_0 = \mu_i^* = \sqrt{p_{F_i}^2 + m_i^{*2}}. \quad (9.33)$$

Mit Gl. (9.29) ergibt sich für das großkanonische Potential damit ($\gamma_{N,N^*} = 4$):

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} &= \frac{\lambda\sigma^4}{2} - \frac{\mu^2\sigma^2}{2} - \epsilon\sigma + \frac{m_\omega^2\omega^2}{2} - \frac{m_\chi^2\chi^2}{2} + g\chi\sigma^2 \\ &- \left(\frac{\lambda\sigma^4}{2} - \frac{\mu^2\sigma^2}{2} - \epsilon\sigma + \frac{m_\omega^2\omega^2}{2} - \frac{m_\chi^2\chi^2}{2} + g\chi\sigma^2 \right)_{p_{F,N}=0} \\ &+ \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F,N}} \sqrt{p^2 + m_N^{*2}} d^3p \\ &+ \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F,N^*}} \sqrt{p^2 + m_{N^*}^{*2}} d^3p. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Folgende Größen sind von Bedeutung:

- Die Energien des Nukleons und seines chiralen Partners:

$$\begin{aligned} E_N^* &= \sqrt{p_N^2 + m_N^{*2}} \\ E_{N^*}^* &= \sqrt{p_{N^*}^2 + m_{N^*}^{*2}}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

- Die effektiven chemischen Potentiale der beiden Bayonen in Abhängigkeit des Fermi-Impulses:

$$\begin{aligned} \mu_N^* &= \mu_N - g_{\omega,N}\omega = \sqrt{p_{F,N}^2 + m_N^{*2}} \quad \text{für das Nukleon,} \\ \mu_{N^*}^* &= \mu_{N^*} - g_{\omega,N^*}\omega = \sqrt{p_{F,N^*}^2 + m_{N^*}^{*2}} \quad \text{für den Partner.} \end{aligned} \quad (9.36)$$

- Unter der Annahme, dass alle Baryonen dasselbe chemische Potential besitzen, $\mu_N = \mu_{N^*} = \mu_B$, berechnet sich der Fermi-Impuls des chiralen Partners, p_{F,N^*} , zu:

$$\begin{aligned} g_{\omega,N}\omega + \sqrt{p_{F,N}^2 + m_N^{*2}} &= g_{\omega,N^*}\omega + \sqrt{p_{F,N^*}^2 + m_{N^*}^{*2}} \\ p_{F,N^*} &= \sqrt{\left[\sqrt{p_{F,N}^2 + m_N^{*2}} + (g_{\omega,N} - g_{\omega,N^*})\omega \right]^2 - m_{N^*}^{*2}}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

- Die Massen der Baryonen (vgl. Gl. (4.27)), in Abhängigkeit der beiden skalaren Felder, sind:

$$\begin{aligned} m_N &= \sqrt{\left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{4} \right]^2 \sigma^2 + (a\chi)^2 + \frac{\hat{g}_1 - \hat{g}_2}{4} \sigma}, \\ m_{N^*} &= \sqrt{\left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{4} \right]^2 \sigma^2 + (a\chi)^2 - \frac{\hat{g}_1 - \hat{g}_2}{4} \sigma}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Wichtig sind auch folgende thermodynamische Größen:

1. Das chemische Potential: $\mu_N(p_N) = g_{\omega,N}\omega(p_N) + \sqrt{p_{F,N}^2 + m_N(p_N)^2}$.
2. Die Baryondichte : $\rho_B(p_N) = \frac{2p_N^2}{3\pi^2}$.
3. Die Energiedichte : $\epsilon_B(p_N) = \frac{\Omega}{V}(p_N) + \mu_N(p_N)\rho_B(p_N)$.
4. Die Energie pro Nukleon: $\frac{E}{A} = \frac{\epsilon_B(p_N)}{\rho_B(p_N)} = \frac{1}{\rho_B(p_N)} \frac{\Omega}{V}(p_N) + \mu_N(p_N)$.

Es ist bekannt, dass bei $p_N = p_{F_N} = 258\text{MeV}$ die Energie pro Nukleon $E/A(p_N) - m_N = -16\text{MeV}$ beträgt. Sie dient daher als Bedingung bei der Bestimmung der Parameter.

9.3 Ergebnisse bei endlicher Dichte

9.3.1 Die Gleichungen für die Mesonenfelder

Die mittleren Mesonenfelder werden ermittelt durch die Minimierung des großkanonischen Potentials Ω/V :

$$\left. \frac{\partial(\Omega/V)}{\partial\sigma} \right|_{\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}} = \lambda\sigma^3 - \mu\sigma - \epsilon - 2g\chi\sigma + \rho_N^*(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) \left. \frac{\partial m_N}{\partial\sigma} \right|_{\bar{\sigma}} + \rho_{N^*}^*(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) \left. \frac{\partial m_{N^*}}{\partial\sigma} \right|_{\bar{\sigma}} = 0, \quad (9.39)$$

$$\left. \frac{\partial(\Omega/V)}{\partial\omega} \right|_{\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}} = m_\omega^2\omega - g_{\omega,N}\rho_N(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) - g_{\omega,N^*}\rho_{N^*}(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) = 0, \quad (9.40)$$

$$\left. \frac{\partial(\Omega/V)}{\partial\chi} \right|_{\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}} = -g\sigma^2 + m_\chi^2\chi + \rho_N^*(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) \left. \frac{\partial m_N}{\partial\chi} \right|_{\bar{\chi}} + \rho_{N^*}^*(\bar{\sigma}, \omega_0, \bar{\chi}) \left. \frac{\partial m_{N^*}}{\partial\chi} \right|_{\bar{\chi}} = 0. \quad (9.41)$$

Die skalaren Dichten der beiden Baryonen ρ_i^* und die Baryonendichten ρ_i sind gegeben durch ($\gamma_i = 4$):

$$\rho_i^* = \gamma_i \int_0^{p_{F_i}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m_i}{\sqrt{p_i^2 + m_i^2}} = \frac{m_i}{\pi^2} \left[p_{F_i} E_{F_i}^* - m_i^2 \ln \frac{p_{F_i} + E_{F_i}^*}{m_i} \right], \quad (9.42)$$

$$\rho_i = \gamma_i \int_0^{p_F} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = 2 \frac{p_F^3}{3\pi^2}. \quad (9.43)$$

Die Ableitungen der Baryonenmassen nach den skalaren Feldern σ und χ , wie sie in (9.39) benötigt werden, lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_N}{\partial\sigma} &= \frac{(\hat{g}_1 + \hat{g}_2)^2\sigma}{16\sqrt{\left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{4}\right]^2\sigma^2 + (a\chi)^2}} + \frac{\hat{g}_1 - \hat{g}_2}{4}, \\ \frac{\partial m_{N^*}}{\partial\sigma} &= \frac{(\hat{g}_1 + \hat{g}_2)^2\sigma}{16\sqrt{\left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{4}\right]^2\sigma^2 + (a\chi)^2}} - \frac{\hat{g}_1 - \hat{g}_2}{4}, \end{aligned} \quad (9.44)$$

sowie:

$$\frac{\partial m_N}{\partial\chi} = \frac{\partial m_{N^*}}{\partial\chi} = \frac{a^2\chi}{\sqrt{\left[\frac{\hat{g}_1 + \hat{g}_2}{4}\right]^2\sigma^2 + (a\chi)^2}}. \quad (9.45)$$

Im Folgenden wird nur die Resonanz $N(1535)$ als chiraler Partner des Nukleons angenommen.

9.3.2 Die Parameter des Modells

Die Einführung des Dilatonfeldes schlägt auch in den Parametern zu Buche und muss hier berücksichtigt werden. Bei den Parametern λ , μ^2 und a äußert sich dies in einem zusätzlichen Term, der die neue Kopplungskonstante, g , zwischen den beiden skalaren Feldern, sowie deren Mischungsmassen enthält. Der Parameter g wird den Bedingungen für Kernmaterie angepasst.

$$\lambda = \frac{1}{2(Zf_\pi)^2} \left(m_\sigma^2 - \frac{m_\pi^2}{Z^2} \right) + \frac{2g^2}{m_\chi^2}, \quad (9.46)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left(m_\sigma^2 - 3 \frac{m_\pi^2}{Z^2} \right) + \frac{2g^2}{m_\chi^2}, \quad (9.47)$$

$$a = \frac{m_0 m_\chi^2}{g(Zf_\pi)^2}. \quad (9.48)$$

Der Parameter für explizite Symmetriebrechung,

$$\epsilon = \frac{f_\pi m_\pi^2}{Z}, \quad (9.49)$$

der Mischungswinkel,

$$\delta = \operatorname{arccosh} \frac{m_{N_{vac}} + m_{N_{vac}^*}}{2m_0}. \quad (9.50)$$

sowie auch die Kopplungskonstanten zwischen dem σ -Meson und den Nukleonen

$$\widehat{g}_1 = \frac{1}{\sigma} \left[(m_{N_{vac}} - m_{N_{vac}^*}) + \sqrt{(m_{N_{vac}} + m_{N_{vac}^*})^2 - 4m_0^2} \right], \quad (9.51)$$

$$\widehat{g}_2 = \frac{1}{\sigma} \left[-(m_{N_{vac}} - m_{N_{vac}^*}) + \sqrt{(m_{N_{vac}} + m_{N_{vac}^*})^2 - 4m_0^2} \right], \quad (9.52)$$

werden ausnahmslos durch die Eigenschaften im Vakuum bestimmt, mit $m_0 = 460$ MeV, $m_{N_{vac}} = 938$ MeV und $m_{N_{vac}^*} = 1535$ MeV. Sie lauten:

$$\widehat{g}_1 = 11.0 \pm 1.5, \quad \widehat{g}_2 = 18.8 \pm 2.4. \quad (9.53)$$

Die Kopplungskonstanten der Nukleonen an das ω -Meson können nicht direkt vom Vakuum-Modell übernommen werden, da die Eigenschaften der Kernmaterie nicht reproduzierbar sind. Diese Konstanten müssen neu bestimmt und dazu den Bedingungen von Kernmaterie angepasst werden:

$$g_\omega^{(N)} = \frac{g_\omega^{(1)} e^\delta + g_\omega^{(2)} e^{-\delta}}{2 \cosh \delta}, \quad (9.54)$$

$$g_\omega^{(N^*)} = \frac{g_\omega^{(1)} e^{-\delta} + g_\omega^{(2)} e^\delta}{2 \cosh \delta}. \quad (9.55)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass $g_\omega^{(1)} = g_\omega^{(2)} = g_\omega$. Es ist nun möglich, diesen Parameter g_ω , sowie die Kopplungskonstante g der skalaren Felder σ und χ aus den beiden Bedingungen:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_N} \left(\frac{E}{A} - m_{N_{vac}} \right) \right|_{p_N=p_{F_N}} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{E}{A} - m_{N_{vac}} \right|_{p_N=p_{F_N}} = -16 \text{ MeV}. \quad (9.56)$$

zu bestimmen.

Die Parameter lauten demnach:

$$g = 370 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad g_\omega = 4.4. \quad (9.57)$$

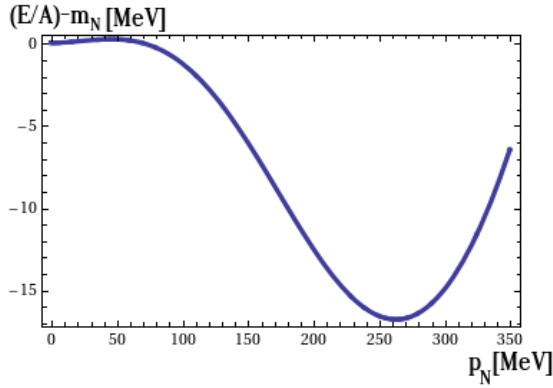


Abbildung 9.1: Energie pro Nukleon

Aus der Forderung, dass bei Sättigung die Energie pro Nukleon minus der Nukleonenmasse ein Minimum mit dem Wert -16 MeV besitzen soll, lassen sich zwei der Parameter des Modells bestimmen.

Die Massen der beiden skalaren Felder, σ und χ , sollen nun bestimmt werden. Dazu betrachtet man ihr zugehöriges Potential in Gl. (9.29):

$$V(\sigma, \chi) = \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4 - g \chi \sigma^2 + \epsilon \sigma. \quad (9.58)$$

Der Parameter g beschreibt nicht nur die Kopplung zwischen den skalaren Feldern, sondern auch deren Mischung, wie im Folgenden gezeigt wird [65]. Nach der Verschiebung der skalaren Felder um ihren v.e.v., $\sigma \rightarrow \sigma + \varphi$ und $\chi \rightarrow \chi + \chi_0$, erhält man für das Potential:

$$V(\sigma, \chi) \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\chi^2 & -2g\varphi \\ -2g\varphi & m_\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (9.59)$$

Aufgrund der nicht-diagonalen Terme sind σ und χ nicht die Eigenzustände von V . Diese, bezeichnet als h und s , bestimmt man durch eine Rotation von σ und χ um den Winkel θ_0 :

$$\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad (9.60)$$

wobei:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{4g\varphi}{m_\sigma^2 - m_\chi^2}. \quad (9.61)$$

Damit lauten die physikalischen Massen:

$$\begin{aligned} m_h^2 &= m_\chi^2 \cos^2 \theta_0 + m_\sigma^2 \sin^2 \theta_0 - 2g\varphi \sin(2\theta_0), \\ m_s^2 &= m_\sigma^2 \cos^2 \theta_0 + m_\chi^2 \sin^2 \theta_0 + 2g\varphi \sin(2\theta_0). \end{aligned} \quad (9.62)$$

Der Zustand h , der hier mit $f_0(600)$ identifiziert wird, besteht überwiegend aus dem Tetraquark, der Zustand s , $f_0(1300)$ gleichgesetzt, besteht dagegen vorherrschend aus Quarkonium.

Damit ergeben sich die Werte:

$$m_\chi = 608.44 \text{ MeV} , \quad m_\sigma = 1296.07 \text{ MeV} . \quad (9.63)$$

9.3.3 Resultate

In diesem Abschnitt werden die Kondensate der Mesonenfelder als Funktion des Fermi-Impulses des Nukleons N bestimmt. Zu beachten ist, dass man zwei Bereiche einteilen kann: ein Bereich *ohne* chiralen Partner, und einen Bereich, in dem der chirale Partner in der Kernmaterie erscheint. Letzteres geschieht erwartungsgemäß bei einem sehr hohen Fermi-Impuls p_N . Der chirale Partner des Nukleons N^* taucht in Materie auf, wenn Gl. (9.37) nicht mehr imaginär ist. Der dazu gehörige Fermi-Impuls ist damit:

$$\sqrt{\left[\sqrt{p_{F_N}^2 + m_N^2} + (g_{\omega,N} - g_{\omega,N^*})\omega \right]^2 - m_{N^*}^2} = 0 \Rightarrow p_N = 569.5 \text{ MeV}. \quad (9.64)$$

Bis zu diesem Impuls ist folglich nur das Nukleon zu berücksichtigen.

Aus der Forderung, dass das chemische Potential bei Sättigung

$$\mu_N = \sqrt{p_{F_N}^2 + m_N^2} + g_{\omega,N}\omega = 923 \text{ MeV} \quad (9.65)$$

erfüllen muss, ergibt sich, zusammen mit den oben berechneten Parametern, der Fermi-Impuls des Nukleons zu: $p_{F_N} = 266 \text{ MeV}$, was dem allgemein in der Literatur verwendeten Wert $p_N = 258.4 \text{ MeV}$ (z.B. Ref. [66]) gut entspricht.

Im Folgenden sind die Kondensate der drei Mesonen dargestellt. Abbildung 9.2 zeigt das Kondensat des σ -Mesons, Abb. 9.3 das des skalaren χ -Feldes. Diese beiden Kondensate spielen eine besondere Rolle. Während das Quark-Kondensat φ aufgrund der spontanen Symmetriebrechung erscheint und damit zur Masse der Nukleonen beiträgt, wird das Kondensat des Dilatonfeldes χ_0 durch den expliziten Massenterm $a\chi(\bar{\Psi}_2\gamma_5\Psi_1 - \bar{\Psi}_2\gamma_5\Psi_2)$ generiert. In diesem Fall wird die Masse der Nukleonen auch explizit durch diesen Term erzeugt. In Abb. 9.2 und 9.3 sind die Kondensate gegen den Fermi-Impuls des Nukleons (entsprechend der Baryondichte) aufgetragen. Sie fallen mit ansteigendem Fermi-Impuls stark ab, wobei das χ_0 -Kondensat anfangs rascher abfällt als das Quark-Kondensat. Bei $p_N \approx 600 \text{ MeV}$ verschwinden beide Kondensate. Dies ist auch der Moment, in dem der chirale Partner in der Materie auftaucht.

Das Kondensat des ω -Mesons, Abb. 9.4, steigt mit wachsendem Impuls an. Es spielt bei der Massengenerierung keine Rolle.

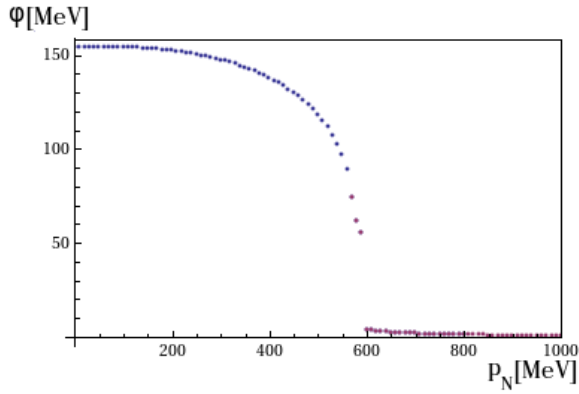


Abbildung 9.2: Das Kondensat φ des σ -Mesons

Das Quark-Kondensat φ , aufgetragen gegen den Fermi-Impuls des Nukleons. Bei $p_N = 0$, also im Vakuum, nimmt es seinen Vakuumerwartungswert von 154 MeV an und fällt dann mit wachsendem Fermi-Impuls ab, bis es fast verschwindet.

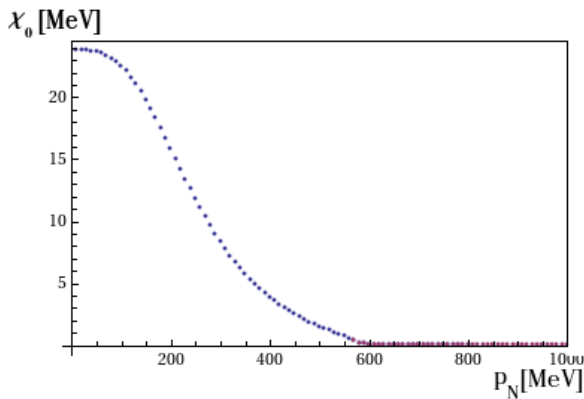


Abbildung 9.3: Das Kondensat χ_0 des Dilatonfeldes

Das Kondensat des Dilatonfeldes, ebenfalls aufgetragen gegen den Fermi-Impuls des Nukleons. Es startet im Vakuum mit einem Wert von ca. 25 MeV, seinem v.e.v. Bei zunehmendem Fermi-Impuls zeigt es ein analoges Verhalten wie das Quark-Kondensat.

Nachfolgend wird diskutiert, wie sich die Nukleonenmasse bei nicht-verschwindender Temperatur bzw. ansteigender Dichte verhält. Von besonderem Interesse ist der Bereich der „quarkyonischen Phase“ [71, 72], in der die Quarks noch zu Hadronen zusammengeschlossen sind (Confinement), jedoch die chirale Symmetrie (fast) wiederhergestellt ist. Was sind die Eigenschaften des Nukleons in dieser Phase?

Nimmt man die Lagrangedichte aus Kapitel 4, Gl. (4.10), so nehmen beide Nukleonenmassen bei verschwindendem chiralen Kondensat $\varphi \rightarrow 0$ den konstanten Wert m_0 an. Dann wäre die erste unbedachte Antwort, dass man einen Wert von ca. 500 MeV für die Nukleonenmasse in diesem Bereich erwartet. Jedoch ist diese Annahme ein wenig zu einfach. Wie in diesem Abschnitt gezeigt, ist der Term m_0 keine einfache Konstante, sondern setzt sich aus anderen Kondensaten zusammen. Das Verhalten der Massen bei $T, \mu \neq 0$ hängt dann unmittelbar davon ab, wie sich die Kondensate in diesem Bereich verhalten. In Ref. [65] wurde dargestellt, dass das Tetraquark-Kondensat bei ansteigender Temperatur nicht verschwindet, sondern ansteigt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, dass es mit zunehmender Dichte jedoch abfällt und schließlich verschwindet.

In Abb. 9.5 sind die Massen der beiden Nukleonen N und N^* gegen den Fermi-Impuls aufgetragen. Wie die Kondensate φ und χ_0 nehmen auch die Nukleonenmassen mit ansteigender Dichte ab und werden letztendlich Null.

Abschließend wird die Theorie mittels einer weiteren wichtigen Größe validiert, der Kom-

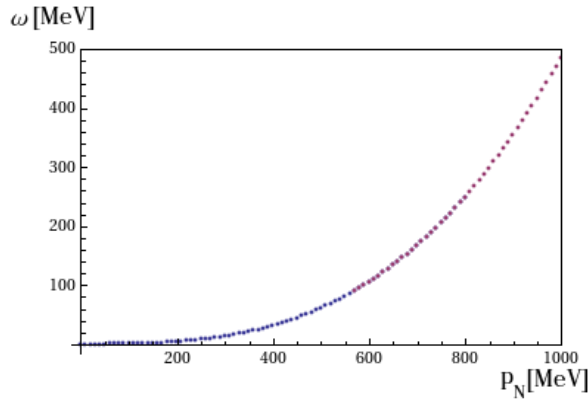


Abbildung 9.4: Das Kondensat ω des ω -Mesons

Das Kondensat des ω steigt bei zunehmendem Fermi-Impuls an. Es spielt desweiteren bei der Diskussion über die Nukleonen-Massen keine Rolle.

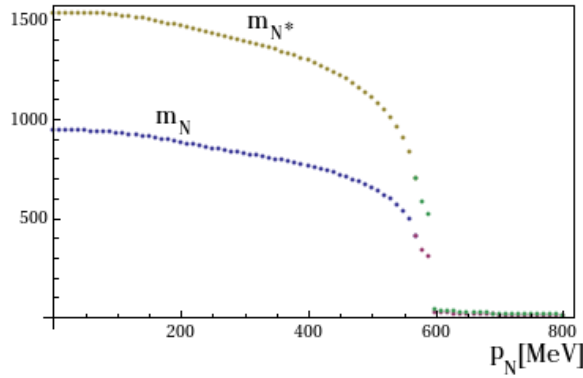


Abbildung 9.5: Die Nukleonenmassen in Materie

Die Massen der Nukleonen, aufgetragen gegen den Fermi-Impuls. Sie nehmen mit ansteigendem Impuls ab und verschwinden schließlich ganz.

pressibilität K der Kernmaterie, die die Änderung des Volumens bei allseitigem Druck angibt. Sie ist durch:

$$K = p^2 \frac{d^2}{dp^2}(E/A) \quad (9.66)$$

am Sättigungspunkt $p = p_F$ definiert und gibt die Krümmung der Kurve in Abb. 9.1 am Minimum wieder. Diese sogenannte Kompressibilität ist in Wahrheit eine *Inkompressibilität*: ein hoher Wert von K deutet auf eine geringe Kompressibilität hin. In der nuklearen Thermodynamik spricht man in diesem Fall von einer „harten“ Zustandsgleichung. Bei einer niedrigen Kompressibilität dagegen von einer „weichen“ Zustandsgleichung. Die Zustandsgleichung selbst gibt das Verhalten von Kernmaterie als Funktion der Temperatur und der Dichte wieder.

Experimentell bestimmt man die Kompressibilität durch die Messung der Energieverteilung von *Monopol-Riesenresonanzen*. Dies sind Dichteschwankungen, die den gesamten Kern erfassen und Breiten von einigen MeV haben. Sie werden erzeugt durch Absorption von Photonen oder durch unelastische Streuung von Elektronen oder α -Teilchen an schweren Atomkernen [73]. Die Energie-Verteilung gibt Aufschluss über die Frequenz und damit auf die Rückstellkraft der Schwingung. Letztere wiederum basiert auf dem Widerstand, den die Kernmaterie der Kompression entgegensetzt. Aus neueren Streuexperimenten resultiert ein Wert für die Kompressibilität von $K = 231 \pm 14$ MeV [74]. Für verschiedene theoretische Potentialansätze wurden Werte zwischen 100 MeV und 300 MeV berechnet. Für das hier vorgestellte Modell ergibt sich für die Kompressibilität der Wert $K \approx 164$

MeV. Dieser Wert deutet auf eine sehr weiche Zustandsgleichung hin: die im Rahmen dieser Dissertation beschriebene Kernmaterie ist butterweich und kompressibler als es von Kernmaterie erwartet wird.

10. Zusammenfassung



Abbildung 10.1: *Spontane Symmetriebrechung: Da Pieps sich für die linke Maus entschieden hat, hat er die Symmetrie gebrochen.*

Seitdem die QCD ihren Platz als Theorie der starken Wechselwirkung eingenommen hat, ist man zwei ihrer Eigenschaften noch immer auf der Spur: dem Confinement der QCD und der spontanen Symmetriebrechung.

Es wird in der vorliegenden Arbeit anhand eines effektiven Modells gezeigt, dass die Eigenschaften des Vakuums sowie die Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie sinnvoll reproduzierbar sind.

Das Modell ist das Lineare Sigma-Modell, das gegenüber dem üblichen Modell, wie von Gell-Mann und Lévy [18] vorgeschlagen, um (Axial-)Vektormesonen und dem chiralen Partner des Nukleons erweitert wurde.

Die Wichtigkeit der (Axial-)Vektormesonen äußert sich darin, dass man die axiale Kopplungskonstante des Nukleons richtig beschreiben kann, ohne weitere Terme im skalarmesonischen Sektor einführen zu müssen, wie etwa den Weinberg-Tomozawa-Term.

Eine Berechnung des Modells auf Loop-Niveau kann zukünftig durchgeführt werden, auch wenn keine qualitative Änderung aufgrund der Schleifen erwartet wird. Einerseits, obwohl die Kopplungskonstanten des Modells g_1 , c_1 , c_2 , \hat{g}_1 , und \hat{g}_2 groß sind, sind die Beiträge der Loops stark unterdrückt gemäß *Large N_c* -Argumenten [75]. Andererseits wurden im vorliegenden Modell von Anfang an alle Resonanzen hinzugenommen, die als virtuelle Zustände zu den jeweiligen Prozessen beitragen. Damit sind die Wirkungen der Loops im Modell stark gemindert. Als Beispiel sei der ρ -Meson-Austausch in der πN -Streuung angeführt. In einem Modell ohne ρ -Meson müsste dessen Kontribution durch Loops berücksichtigt werden. Im vorliegenden Modell wird dieser Beitrag direkt durch das Feynman-Diagramm, das den ρ -Meson-Austausch beschreibt, in Betracht gezogen. Daher ist eine Berechnung auf Baumgraphenniveau ausreichend.

Der chirale Partner des Nukleons, eingeführt im Spiegel-Assignment, liefert die Möglichkeit, einen invarianten Massenterm proportional zu m_0 aufzuschreiben. Somit trägt nicht nur das chirale Kondensat aus der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie zur Nukleonenmasse bei, sondern auch m_0 . Der wahrscheinlichste Kandidat für den chiralen Partner ist $N(1535)$, da er die leichteste Resonanz mit den korrekten Quantenzahlen ist. Die hier erhaltenen Ergebnisse waren vergleichbar, unabhängig davon, ob $N(1535)$ oder $N(1650)$ verwendet wurde. Doch intuitiv würde die Wahl auf $N(1535)$ fallen, schon aus dem Grund,

dass, wäre $N(1650)$ der chirale Partner des Nukleons, Erklärungsnot bliebe, welche Resonanz der chirale Partner von $N(1440)$ ist. Außerdem wäre ein Massenunterschied von ≈ 700 MeV viel höher als man ihn erwarten würde, vergleicht man mit Massenunterschieden zwischen chiralen Partner im mesonischen Sektor.

Das Modell wird anhand von Streulängen validiert, d.h., die Parameter werden mittels experimentell bekannten Größen (wie $N\pi$ -Zerfall und den axialen Kopplungskonstanten der Nukleonen) bestimmt, dann werden die Streulängen aus dem Modell berechnet und mit den experimentellen Werten verglichen. Die erzielten Ergebnisse liefern gute Übereinstimmung, wenn der chirale Partner im Spiegel-Assignment eingeführt wurde. Das naive Assignment liefert eine isoskalare Streulänge, die drei Größenordnungen oberhalb des experimentellen Wertes liegt. Ein analoges Ergebnis wird ebenfalls erreicht, wenn man anstatt $N(1535)$ oder $N(1650)$ eine spekulative Resonanz mit einer Masse von 1200 MeV [47] einführt. Beide letzten Möglichkeiten werden daher verworfen.

Im letzten Abschnitt wird das Modell auf kalte Kernmaterie angewendet. Dabei ist der Parameter m_0 keine Konstante mehr, sondern proportional zu dem Tetraquark-Kondensat. Es wird gezeigt, dass sowohl dieses Kondensat als auch das Quark-Kondensat bei ansteigender Dichte verschwinden. Da die Massen der Nukleonen unmittelbar von diesen Kondensaten abhängen, verschwinden auch sie bei hoher Dichte, die Nukleonen sind daher im Rahmen dieses Modells masselos, wenn die chirale Symmetrie wiederhergestellt ist. Zukünftige Studien bei nicht-verschwindender Temperatur und endlicher Dichte, sollten sowohl das Tetraquark, wie auch das Gluon-Kondensat enthalten.

A. Anhang A: Details zu den Berechnungen

A.1 Zusammenhänge zwischen den Mandelstam-Variablen, den Impulsen und den Massen

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + q_1)^2 = p_1^2 + q_1^2 + 2p_1 \cdot q_1 = m_N^2 + m_\pi^2 + 2p_1 \cdot q_1 \\ \Rightarrow p_1 \cdot q_1 &= \frac{s - m_N^2 - m_\pi^2}{2} , \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} t &= (q_1 - q_2)^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 \cdot q_2 = m_\pi^2 + 2q_1 \cdot q_2 \\ \Rightarrow q_1 \cdot q_2 &= m_\pi^2 - \frac{t}{2} , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} u &= (p_1 - q_2)^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1 \cdot q_2 = m_N^2 + m_\pi^2 + 2p_1 \cdot q_2 \\ \Rightarrow p_1 \cdot q_1 &= \frac{m_N^2 + m_\pi^2 - u}{2} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Berechnung des Pion-Rho-Vertex

In diesem Abschnitt soll berechnet werden, wie man vom Vertex in der Lagrangedichte zur Vertexfunktion kommt, die für das Matricelement in Gl. (5.3) benötigt wird. Da die Rechnung für alle Vertizes analog ist (Anwendung der Feynman-Regeln), genügt es, hier den Pion-Rho-Vertex als Paradebeispiel zu berechnen.

Aus der Lagrangedichte wird der Term entnommen:

$$\mathcal{L} = g_{\pi\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu) + g_{\partial\pi\partial\rho} \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi}) . \quad (\text{A.4})$$

Der erste Term $g_{\pi\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu)$ gehört zu dem Vertex in Abb. A.1. Die Viererimpulse werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet. Das ρ -Meson läuft mit dem Impuls $K^\mu = (k_0, \mathbf{k})$ in den Vertex hinein, das Pion $\partial_\mu \boldsymbol{\pi}$ mit $L^\mu = (l_0, \mathbf{l})$ und $\boldsymbol{\pi}$ läuft mit $M^\mu = (m_0, \mathbf{m})$ raus und bekommt somit als einziger Impuls ein positives Vorzeichen. Diese Buchstaben werden nur zum übersichtlicheren Rechnen genutzt, das Ergebnis erscheint dann wieder in der vorgegebenen Notation:

$$M_\mu \rightarrow q_{1\mu} \quad , \quad L_\mu \rightarrow q_{2\mu} . \quad (\text{A.5})$$

Die Kleinbuchstaben a, b und c stehen für den Isospin der drei Teilchen.

Nutzt man aus, dass das Spatprodukt der drei Vektoren mit Hilfe des ϵ -Tensors geschrieben werden kann, erhält man:

$$g_{\pi\rho} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho}_\mu) = g_{\pi\rho} \epsilon_{abc} \partial^\mu \pi_a \pi_b \rho_{\mu,c} . \quad (\text{A.6})$$

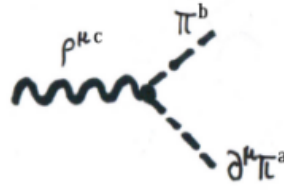


Abbildung A.1: Der $\rho\pi$ -Vertex: das ρ -Meson trägt den Viererimpuls K^μ , die beiden Pionen jeweils L^μ und M^μ . Die Buchstaben a, b und c sind die Isospinindizes.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& -g_{\pi\rho} \int d^4X \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4M}{(2\pi)^4} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \epsilon_{abc} \\
& \partial^\mu (e^{-iL \cdot X} \pi_a(-\mathbf{l})) e^{iM \cdot X} \pi_b(\mathbf{m}) e^{-iK \cdot X} \rho_{\mu,c}(-\mathbf{k}) (2\pi)^4 \delta^4(M - L - K) = \\
& -g_{\pi\rho} \int d^4X \frac{d^4L d^4M d^4K}{(2\pi)^{12}} \epsilon_{abc} \\
& (-iL_\mu) \pi_a(-\mathbf{l}) \pi_b(\mathbf{m}) e^{-i(L+K-M) \cdot X} \rho_{\mu,c}(-\mathbf{k}) (2\pi)^4 \delta^4(M - L - K) = \\
& -g_{\pi\rho} \int d^4X \frac{d^4L d^4M}{(2\pi)^8} \epsilon_{abc} \\
& (-iL_\mu) \pi_a(-\mathbf{l}) \pi_b(\mathbf{m}) \rho_{\mu,c}(\mathbf{l} - \mathbf{m}) = ig_{\pi\rho} \epsilon_{abc} l_\mu = \\
& \hat{=} ig_{\pi\rho} \epsilon_{abc} q_{1\mu}, \tag{A.7}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wieder die Notation für ein einlaufendes Pion $\partial_\mu \pi$ aufgenommen wurde. Im nächsten Schritt muss berücksichtigt werden, dass $\partial_\mu \pi$ auch auslaufen kann, dies bedeutet, dass die sogenannte „Symmetrisierung“ durchgeführt werden muss. Die Rechnung verläuft analog, wobei zu beachten ist, dass rauslaufende Teilchenimpulse ein positives Vorzeichen bekommen und den Zahlenindex 2 tragen. Das Ergebnis hierzu lautet also: $ig_{\pi\rho} \epsilon_{abc} q_{2\mu}$. Addiert man diese beiden Ergebnisse, erhält man als Zwischenergebnis $ig_{\pi\rho} \epsilon_{abc} (q_{1\mu} + q_{2\mu})$. Nun wird es noch mit dem Vertexfaktor i multipliziert. Der erste Vertex lautet:

$$-g_{\pi\rho} \epsilon_{abc} (q_{1\mu} + q_{2\mu}). \tag{A.8}$$

Als nächstes wird der zweite Vertex aus $g_{\partial\pi\partial\rho} \partial^\nu \rho^\mu \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\pi})$ berechnet, der zu Abb. A.2 gehört. Es werden erneut die Feynman-Regeln angewandt in der Reihenfolge:

- Ausnutzung der Eigenschaften des Spatproduktes:

$$g_{\partial\pi\partial\rho} \epsilon_{cab} \partial^\nu \rho_c^\mu (\partial_\mu \pi_a \partial_\nu \pi_b) \tag{A.9}$$

- Integration über die Impulse :

$$\begin{aligned}
& g_{\partial\pi\partial\rho} \int d^4X \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4M}{(2\pi)^4} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \epsilon_{cab} \\
& \partial^\nu (e^{-iK \cdot X} \rho_c^\mu(-\mathbf{k})) \partial_\mu (e^{-iL \cdot X} \pi_a(-\mathbf{l})) \partial_\nu (e^{-iM \cdot X} \pi_b(\mathbf{m})) (2\pi)^4 \delta^4(M - L - K) = \\
& - i g_{\partial\pi\partial\rho} \int d^4X \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \frac{d^4M}{(2\pi)^4} \epsilon_{cab} \\
& (M - L)^\nu L_\mu M_\nu \rho_c^\mu(\mathbf{l} - \mathbf{m}) \pi_a(-\mathbf{l}) \pi_b(\mathbf{m}) \\
& \hat{=} - i g_{\partial\pi\partial\rho} \epsilon_{cab} (q_2 - q_1)^\nu q_{1\mu} q_{2\nu} .
\end{aligned} \tag{A.10}$$

- Symmetrisierung ergibt den Term:

$$i g_{\partial\pi\partial\rho} \epsilon_{cab} (q_2 - q_1)^\nu q_{1\mu} q_{2\nu} ; . \tag{A.11}$$

- Addition der beiden Zwischenergebnisse ergibt mit geschickter Anwendung der Formeln in Abschnitt A.1 und nachfolgender Multiplikation mit dem Vertexfaktor i :

$$g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} (q_{1\mu} q_{2\nu}) \epsilon_{abc} . \tag{A.12}$$

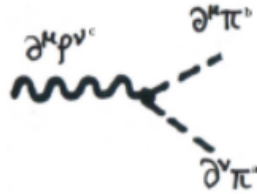


Abbildung A.2: Der $\rho\pi$ -Vertex: das ρ -Meson trägt den Viererimpuls K^μ , die beiden Pionen jeweils L^μ und M^μ . Die Buchstaben a, b und c sind die Isospinindizes.

Um den gesamten Ausdruck für den Pion-Rho-Vertex zu erhalten, muss man abschließend die beiden Ergebnisse aus Gl. (A.8) und Gl. (A.12) addieren:

$$(g_{\partial\pi\partial\rho} \frac{t}{2} - g_{\pi\rho}) (q_{1\mu} + q_{2\mu}) \epsilon_{abc} . \tag{A.13}$$

B. Anhang B: Weinberg-Tomozawa-Term

In diesem Anhang soll ein weiteres Mal auf die Vorzüge der (Axial-)Vektormesonen hingewiesen werden. Ein effektives Modell für Mesonen und Baryonen sollte unter anderem auch die nukleonische Größen wie die axialen Kopplungskonstanten des Nukleons richtig beschreiben. Im Linearen Sigma-Modell nach Gell-Mann und Lèvy, Gl. (2.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{LSM}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \\ & + \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g \bar{\Psi} (\sigma + i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \Psi . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

muss dies berücksichtigt werden durch die Einführung von chiral invarianten Extratermen der Form, s. z.B. Ref. [76]:

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{g_A^{WT}}{2f_\pi} \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \Psi_N \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \frac{1}{4f_\pi^2} \bar{\Psi}_N \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_N \cdot \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi}, \quad (\text{B.2})$$

wobei der erste Term die pseudovektorielle Kopplung zwischen Pion und Nukleon wiedergibt, der zweite Term ist die Kontaktwechselwirkung zwischen zwei Pionen und Nukleonen an einem Punkt.

Die axiale Kopplungskonstante wäre damit korrekt beschrieben durch: $g_A = g_A^0 + g_A^{WT}$, wobei $g_A^0 = 1$ und der zweite Summand die Korrektur durch den Weinberg-Tomozawa-Term liefert.

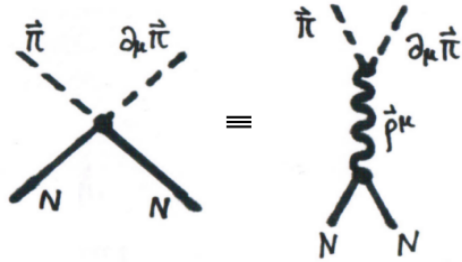


Abbildung B.1: Die Kontaktwechselwirkung zwischen zwei Pionen und Nukleonen kann durch die Einführung eines ρ -Meson-Austauschs beschrieben werden.

Mittels der Einkopplung von (Axial-)Vektormesonen in das Modell wird die pseudovektorielle πN -Kopplung automatisch durch die Verschiebung des Axialvektorfeldes $\mathbf{a}_{1\mu} \rightarrow \mathbf{a}_{1\mu} + w \partial_\mu \boldsymbol{\pi}$ im baryonischen Sektor generiert.

Der Kontaktterm dagegen kann durch die Einführung des ρ -Mesons simuliert werden, wie in Abb. B.1 gezeigt. Qualitativ kann man dies sehen, indem man die Stärken der Kopplungen vergleicht: Der Kontaktterm auf der rechten Seite der Abbildung geht mit einer

Stärke von $\frac{1}{4f_\pi^2}$ ein, der ρ -Meson-Austausch mit g_1^2/m_ρ^2 , vgl. Abschnitt 5.2.2. Mit den Werten: $f_\pi = 92.4$ MeV, $g_1 \approx 6.76$ und $m_\rho \approx 770$ MeV ergibt sich für beide Kopplungen ein Wert in der Größenordnung von 10^{-5} .

So könnte man auch in einem Modell, das das Nukleon und seinen chiralen Partner beinhaltet, jedoch keine (Axial-)Vektormesonen, verfahren, in dem man einen Weinberg-Tomozawa-Term der folgenden Form einführt:

$$\begin{aligned}
& i \frac{D_1}{\phi^2} \{ \bar{\Psi}_{1L} \gamma^\mu [\Phi (D_\mu \Phi)^\dagger - (D_\mu \Phi) \Phi^\dagger] \Psi_{1L} - \bar{\Psi}_{1R} \gamma^\mu [(D_\mu \Phi)^\dagger \Phi - \Phi^\dagger (D_\mu \Phi)] \Psi_{1R} \} \\
& i \frac{D_2}{\phi^2} \{ \bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu [\Phi^\dagger (D_\mu \Phi) - (D_\mu \Phi)^\dagger \Phi] \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2R} \gamma^\mu [(D_\mu \Phi) \Phi^\dagger - \Phi (D_\mu \Phi)^\dagger] \Psi_{2R} \}. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

C. Anhang C: Einige Ausblicke zu dem πN -Zerfall

C.1 Eine Möglichkeit, den πN -Zerfall im naiven Assignment *ohne* Vektormesonen zu generieren

In Abschnitt 4.1 wurde diskutiert, dass im Falle eines Linearen Sigma-Modells ohne (Axial-)Vektormesonen, in das der chirale Partner *naiv* eingekoppelt wird, eine Beschreibung des Zerfalls $N^* \rightarrow N\pi$ nicht möglich ist. Ein Ausweg wäre, ein zweites Multipllett skalarer Mesonen einzuführen [77].

Die Kopplung zwischen Nukleonen und Skalarmesonen ist der Lagrangedichte (4.45) aus Kapitel 4 zu entnehmen. Die σ - und π -Mesonen werden bezeichnet mit σ_1 und $\boldsymbol{\pi}_1$. Es werden dazu zusätzlich neue Terme eingeführt, die die Nukleonen an ein zweites Multipllett von Skalarmesonen ($\sigma_2, \boldsymbol{\pi}_2$) koppeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\hat{g}_1 \left(\bar{\Psi}_{1L} \Phi_1 \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi_1^\dagger \Psi_{1L} \right) - \hat{g}_2 \left(\bar{\Psi}_{2L} \Phi_1 \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi_1^\dagger \Psi_{2L} \right) \\ & + \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{1R} \Phi_1^\dagger \Psi_{2L} - \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{1L} \Phi_1 \Psi_{2R} + \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{2L} \Phi_1 \Psi_{1R} - \hat{g}_{12} \bar{\Psi}_{2R} \Phi_1^\dagger \Psi_{1L} \\ & - \hat{g}_3 \left(\bar{\Psi}_{1L} \Phi_2 \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi_2^\dagger \Psi_{1L} \right) - \hat{g}_4 \left(\bar{\Psi}_{2L} \Phi_2 \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi_2^\dagger \Psi_{2L} \right) \\ & + \hat{g}_{34} \bar{\Psi}_{1R} \Phi_2^\dagger \Psi_{2L} - \hat{g}_{34} \bar{\Psi}_{1L} \Phi_2 \Psi_{2R} + \hat{g}_{34} \bar{\Psi}_{2L} \Phi_2 \Psi_{1R} - \hat{g}_{34} \bar{\Psi}_{2R} \Phi_2^\dagger \Psi_{1L} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Hier ist: $\Phi_1 = \sigma_1 \tau_0 + i \boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}$ und $\Phi_2 = \sigma_2 \tau_0 + i \boldsymbol{\pi}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}$. In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, dass jede Kopplung der Form $\phi \bar{N}^* N$ verschwinden muss, wobei ϕ den Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes σ darstellt. Dafür wurde der Mischungsparameter (4.46) genau so gewählt, dass die Nukleonenfelder entkoppeln, s. Gl. (4.47). Mit dieser Wahl des Mischungsparameters δ verschwindet geradewegs auch die Kopplung $\bar{N}^* \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} N$.

Liegen nun zwei σ -Mesonen vor, mit Vakuumerwartungswerten ϕ_1 und ϕ_2 , muss erneut verlangt werden, dass Kopplungen der Art $\phi_i \bar{N}^* N$ ($i = 1, 2$) verschwinden. Die Bedingung ist einfach abzulesen, sobald man die skalaren Felder um ihre v.e.v's verschoben hat:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N^* N \phi} = & \frac{1}{4 \cosh \delta} \{ \bar{N} [-(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \hat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})] \gamma_5 \phi_1 N^* + \\ & \bar{N} [-(\hat{g}_3 + \hat{g}_4) + \hat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})] \gamma_5 \phi_2 N^* \\ & + \bar{N}^* [\hat{g}_1 + \hat{g}_2 - \hat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})] \gamma_5 \phi_1 N \} \\ & + \bar{N}^* [\hat{g}_3 + \hat{g}_4 - \hat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})] \gamma_5 \phi_2 N \}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Es muss folglich gelten:

$$[-(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \hat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})] \phi_1 + [-(\hat{g}_3 + \hat{g}_4) + \hat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})] \phi_2 = 0. \quad (\text{C.3})$$

Da in diesem Falle der Mischungsparameter δ nicht nur eine Funktion der Kopplungskonstanten ist, sondern auch eine Funktion der Kondensate ϕ_1 und ϕ_2 sein muss, ist

offenkundig, dass die Kopplung der Nukleonen an das Pion:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{N^*N\pi} = & \frac{i}{4 \cosh \delta} \{ \overline{N} [-(\widehat{g}_1 + \widehat{g}_2) + \widehat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})] \boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} N^* + \\ & \overline{N} [-(\widehat{g}_3 + \widehat{g}_4) + \widehat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})] \boldsymbol{\pi}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} N^* \\ & + \overline{N}^* [\widehat{g}_1 + \widehat{g}_2 - \widehat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})] \boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} N \} \\ & + \overline{N}^* [\widehat{g}_3 + \widehat{g}_4 - \widehat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})] \boldsymbol{\pi}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} N \} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

nicht verschwinden kann, sondern eine endliche Kopplungskonstante der Größe $g_{\pi 1} = -(\widehat{g}_1 + \widehat{g}_2) + \widehat{g}_{12}(e^\delta - e^{-\delta})$ an π_1 , bzw. $g_{\pi 2} = -(\widehat{g}_3 + \widehat{g}_4) + \widehat{g}_{34}(e^\delta - e^{-\delta})$ an π_2 bleibt. Ein Zerfall $N^* \rightarrow N\pi$ kann hierdurch berechnet werden.

C.2 Eine Möglichkeit, die Zerfälle $N(1535) \rightarrow \pi N$ und $N(1650) \rightarrow \pi N$ simultan zu beschreiben

In diesem Abschnitt wird eines der noch offenen Probleme diskutiert: die Möglichkeit, die Zerfälle $N(1535) \rightarrow \pi N$ und $N(1650) \rightarrow \pi N$ im Spiegel-Assignment simultan zu beschreiben [40].

Im Rahmen des Spiegel-Modells ist es möglich, anstatt nur zwei Nukleonfelder noch zwei weitere Felder einzuführen, Ψ_3 mit positiver Parität und Ψ_4 mit negativer Parität. Dadurch besteht die Option, einen erweiterten bilinearen Massenterm, der wiederum chiral invariant ist, aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} = & m_0^{(1,2)} (\overline{\Psi}_2 \gamma^5 \Psi_1 - \overline{\Psi}_1 \gamma^5 \Psi_2) + m_0^{(3,4)} (\overline{\Psi}_4 \gamma^5 \Psi_3 - \overline{\Psi}_3 \gamma^5 \Psi_4) \\ & + m_0^{(1,4)} (\overline{\Psi}_4 \gamma^5 \Psi_1 - \overline{\Psi}_1 \gamma^5 \Psi_4) + m_0^{(2,3)} (\overline{\Psi}_2 \gamma^5 \Psi_3 - \overline{\Psi}_3 \gamma^5 \Psi_2) . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Im Grenzfall $m_0^{(1,4)} = m_0^{(2,3)} = 0$ mischen die Felder Ψ_1 und Ψ_2 nicht mit den Feldern Ψ_3 and Ψ_4 . Die Felder Ψ_1 und Ψ_2 generieren die Zustände $N(939)$ und $N(1535)$ mit $m_0^{(1,2)} = m_0$, so wie es in der vorliegenden Arbeit beschrieben wurde. Die Felder Ψ_3 und Ψ_4 hingegen generieren die Zustände $N(1440)$ und $N(1650)$, welche wiederum als chirale Partner aufgefasst werden können.

Der Term, der zu $m_0^{(3,4)}$ proportional ist, erzeugt den Zerfall $N(1650) \rightarrow N(1440)\pi$ (or η). Doch damit sind die Zerfälle von $N(1650)$ und $N(1440)$ in $N\pi(\eta)$ noch nicht ermöglicht. Addiert man daher zwei weitere Terme, proportional zu $m_0^{(1,4)}$ und $m_0^{(2,3)}$, dazu, entsteht ein noch komplizierteres Szenario mit vier Nukleonfeldern, die alle in $N\pi(\eta)$ zerfallen können. Desweiteren ist es denkbar, dass der unnatürlich kleine Wert der Zerfallsbreite von $N(1550) \rightarrow N\eta$ durch destruktive Interferenz generiert wird. Auch im Quarkmodell ist eine solche Konfiguration von simultan generierenden $N(1535)$ - und $N(1650)$ -Zuständen notwendig [78].

Das in dieser Weise konstruierte Mischungsszenario mag auf den ersten Blick umzweckmäßig erscheinen, da es eine große Anzahl von unbekannten Parametern enthält. Doch ist dies bei genauer Betrachtung nicht der Fall: $m_0^{(i,j)}$ sind die vier Massenparameter, zusätzlich zu den schon diskutierten Kopplungskonstanten c_1 , c_2 , \widehat{g}_1 , und \widehat{g}_2 existieren nun

noch c_3 , c_4 , \widehat{g}_3 , und \widehat{g}_4 , die die Stärke der Wechselwirkung von $\Psi_{3,4}$ mit den Mesonen wiedergeben. Diese zwölf Parameter können folgende vierzehn Größen beschreiben: die Massen der Zustände $N \equiv N(939)$, $N(1535)$, $N(1440)$ und $N(1650)$, die Zerfallsbreiten $N(1535) \rightarrow N\pi$, $N(1535) \rightarrow N\eta$, $N(1650) \rightarrow N\pi$, $N(1650) \rightarrow N\eta$, $N(1440) \rightarrow N\pi$, $N(1440) \rightarrow N\eta$, sowie die vier axialen Kopplungskonstanten g_A^N , $g_A^{N(1535)}$, $g_A^{N(1440)}$, and $g_A^{N(1650)}$. Diese Erweiterung des Modells mit den vier leichtesten baryonischen Resonanzen mit $J^P = \frac{1}{2}^\pm$ und die detaillierte Berechnung der aufgezählten physikalischen Größen stellt eine Herausforderung für spätere Arbeiten dar.

Literaturverzeichnis

- [1] U. G. Meissner, “Low-Energy Hadron Physics From Effective Chiral Lagrangians With Vector Mesons,” Phys. Rept. **161** (1988) 213.
- [2] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, “Effective Lagrangians and field algebras with chiral symmetry,” Rev. Mod. Phys. **41** (1969) 531.
- [3] R. D. Pisarski, “Applications of chiral symmetry,” arXiv:hep-ph/9503330.
- [4] Y. Nambu, “Axial vector current conservation in weak interactions,” Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 380.
M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction,” Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
Y. Nambu, “Spontaneous symmetry breaking in particle physics: A case of cross fertilization,” Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 2371.
- [5] C. DeTar and T. Kunihiro, “Linear sigma model with parity doubling,” Phys. Rev. D **39** (1989) 2805.
- [6] B.W. Lee, “Chiral Dynamics”, Gordon and Breach, New York, 1972
- [7] S. Hands, “The Phase Diagram of QCD,” Contemp. Phys. **42** (2001) 209 [arXiv:physics/0105022].
- [8] A. Kiseleva, P. Senger and I. Vassiliev, “Vector meson study for the CBM experiment at FAIR/GSI,” Phys. Part. Nucl. **39** (2008) 1090.
- [9] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” Phys. Rev. **96** (1954) 191.
- [10] M. Y. Han and Y. Nambu, “Three-triplet model with double SU(3) symmetry,” Phys. Rev. **139** (1965) B1006.
- [11] K. G. Wilson, “Confinement of quarks,” Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, “Asymptotically Free Gauge Theories. 1,” Phys. Rev. D **8** (1973) 3633.
- [13] H. D. Politzer, “Asymptotic Freedom: An Approach To Strong Interactions,” Phys. Rept. **14** (1974) 129.
- [14] *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* von Michele Maggiore, Oxford University Press, USA (February 10, 2005).

- [15] V. Koch, “Aspects of chiral symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. E* **6** (1997) 203 [arXiv:nucl-th/9706075].
- [16] C. Amsler et al. The Review of Particle Physics *Phys. Lett. B* **667** (2008)
- [17] E. Y. Loh, J. E. Gubernatis, R. T. Scalettar, S. R. White, D. J. Scalapino and R. L. Sugar, “Sign problem in the numerical simulation of many-electron systems,” *Phys. Rev. B* **41** (1990) 9301.
- [18] M. Gell-Mann and M. Levy, “The Axial Vector Current In Beta Decay,” *Nuovo Cim.* **16** (1960) 705.
- [19] M. Urban, M. Buballa and J. Wambach, “Vector and axial-vector correlators in a chirally symmetric model,” *Nucl. Phys. A* **697** (2002) 338 [arXiv:hep-ph/0102260].
- [20] D. Parganlija, F. Giacosa, and D. H. Rischke, “How Universal is the Coupling in the Sigma Model?,” *AIP Conf. Proc.* **1030** (2008) 160 [arXiv:0804.3949 [hep-ph]]. D. Parganlija, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Decay widths of resonances and pion scattering lengths in a globally invariant linear sigma model with vector mesons,” arXiv:0812.2183 [hep-ph].
- [21] P. Ko and S. Rudaz, “Phenomenology of scalar and vector mesons in the linear sigma model,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 6877.
- [22] T. D. Cohen, R. J. Furnstahl, D. K. Griegel and X. m. Jin, “QCD sum rules and applications to nuclear physics,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **35** (1995) 221.
- [23] D. Jido, M. Oka, and A. Hosaka, “Chiral symmetry of baryons,” *Prog. Theor. Phys.* **106** (2001) 873. D. Jido, Y. Nemoto, M. Oka and A. Hosaka, “Chiral symmetry for positive and negative parity nucleons,” *Nucl. Phys. A* **671** (2000) 471.
- [24] Y. Nemoto, D. Jido, M. Oka and A. Hosaka, “Decays of $1/2^-$ baryons in chiral effective theory,” *Phys. Rev. D* **57** (1998) 4124 [arXiv:hep-ph/9710445].
- [25] H. c. Kim, D. Jido and M. Oka, “Properties of $N^*(1535)$ at finite density in the extended parity-doublet models,” *Nucl. Phys. A* **640** (1998) 77 [arXiv:hep-ph/9806275].
- [26] B. Dutta-Roy, I. R. Lapidus and M. J. Tausner, “Pion-nucleon scattering lengths,” *Phys. Rev.* **177** (1969) 2529.
- [27] V. Dmitrasinovic and F. Myhrer, “Pion nucleon scattering and the nucleon sigma term in an extended sigma *Phys. Rev. C* **61** (2000) 025205 [arXiv:hep-ph/9911320].
- [28] R. G. E. Timmermans, “Low-energy pion nucleon scattering,” *Czech. J. Phys.* **46** (1996) 751.
- [29] M. Mojziz, “Elastic πN scattering to $O(p^{*3})$ in heavy baryon chiral perturbation theory,” *Eur. Phys. J. C* **2** (1998) 181 [arXiv:hep-ph/9704415].

- [30] T. Matsui and B. D. Serot, “The Pion Propagator In Relativistic Quantum Field Theories Of The Nuclear Many Body Problem,” *Annals Phys.* **144**, 107 (1982).
- [31] H. C. Schroder *et al.*, “The pion nucleon scattering lengths from pionic hydrogen and deuterium,” *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 473.
- [32] D. Gotta *et al.*, “Pionic hydrogen,” *Lect. Notes Phys.* **745** (2008) 165.
- [33] *Dissertation* von Albert Hirtl: *Determination of the Strong Interaction Ground State Width in Pionic Hydrogen*, Atominstitut der Österreichischen Universitäten und Stefan-Meyer-Institut für subatomare Physik der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 2008.
- [34] *Proposal for an experiment at PSI* von G.C. Oades et al.: *Measurement of the strong interaction width and shift of the ground state of pionic hydrogen*. Zu finden unter: <http://pihydrogen.web.psi.ch/>.(2000)
- [35] G. C. Oades, G. Rasche, W. S. Woolcock, E. Matsinos and A. Gashi, “Determination of the s-wave pion nucleon threshold scattering parameters from the results of experiments on pionic hydrogen,” *Nucl. Phys. A* **794** (2007) 73 [arXiv:hep-ph/0702258].
- [36] G. Rasche and W. S. Woolcock, “Connection Between Low-Energy Scattering Parameters And Energy Shifts For Pionic Hydrogen,” *Nucl. Phys. A* **381** (1982) 405.
- [37] S. Deser, M. L. Goldberger, K. Baumann and W. E. Thirring, “Energy level displacements in pi mesonic atoms,” *Phys. Rev.* **96** (1954) 774.
- [38] J. Spuller *et al.*, “A Remeasurement Of The Panofsky Ratio,” *Phys. Lett. B* **67** (1977) 479.
- [39] S. R. Beane, V. Bernard, E. Epelbaum, U. G. Meissner and D. R. Phillips, “The S-wave pion nucleon scattering lengths from pionic atoms using effective field theory,” *Nucl. Phys. A* **720** (2003) 399 [arXiv:hep-ph/0206219].
- [40] S. Gallas, F. Giacosa and D. H. Rischke, “The chiral partner of the nucleon in the mirror assignment with global symmetry,” arXiv:0901.4043 [hep-ph].
- [41] S. Gallas, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Vacuum phenomenology of the chiral partner of the nucleon in a linear sigma model with vector mesons,” arXiv:0907.5084 [hep-ph].
- [42] S. Weinberg, “Current-Commutator Calculation of the K1-4 Form Factors,” *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 336.
- [43] Y. Tomozawa, “Axial vector coupling renormalization and the meson baryon scattering lengths,” *Nuovo Cim.* **46A** (1966) 707.

- [44] E. P. Venugopal and B. R. Holstein, “Chiral anomaly and eta eta’ mixing,” Phys. Rev. D **57** (1998) 4397 [arXiv:hep-ph/9710382]; T. Feldmann, P. Kroll and B. Stech, “Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons,” Phys. Rev. D **58** (1998) 114006 [arXiv:hep-ph/9802409].
- [45] A. A. Khan *et al.*, “Axial coupling constant of the nucleon for two flavours of dynamical quarks in finite and infinite volume,” Phys. Rev. D **74** (2006) 094508 [arXiv:hep-lat/0603028].
- [46] T. T. Takahashi and T. Kunihiro, “Axial charge of N(1535) in lattice QCD with two flavors of dynamical quarks,” Phys. Rev. D **78** (2008) 011503 T. T. Takahashi and T. Kunihiro, “Lattice QCD study of $g_A^{N^*N^*}$ with two flavors of dynamical quarks,” eConf **C070910** (2007) 297 [Mod. Phys. Lett. A **23** (2008) 2340] [arXiv:0711.1961 [hep-lat]].
- [47] D. Zschiesche, L. Tolos, J. Schaffner-Bielich, and R. D. Pisarski, “Cold, dense nuclear matter in a SU(2) parity doublet model,” arXiv:nucl-th/0608044.
- [48] D. Parganlija, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Vacuum Properties of Mesons in a Linear Sigma Model with Vector Mesons and Global Chiral Invariance,” arXiv:1003.4934 [hep-ph].
- [49] S. Gallas, F. Giacosa, D.H. Rischke, “About the Origin of the Mass of the Nucleon in a Linear Sigma Model ,” Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement, Vol. 2, No. 2, November 2009.
- [50] A. Salomone, J. Schechter and T. Tudron, “Properties Of Scalar Gluonium,” Phys. Rev. D **23** (1981) 1143.
- [51] V. Dexheimer, G. Pagliara, L. Tolos, J. Schaffner-Bielich and S. Schramm, ‘Neutron stars within the SU(2) parity doublet model,’ Eur. Phys. J. A **38** (2008) 105 [arXiv:0805.3301 [nucl-th]].
- [52] H. Pilkuhn *et al.*, “Compilation Of Coupling Constants And Low-Energy Parameters. 1973 Edition,” Nucl. Phys. B **65** (1973) 460.
- [53] S. Wilms, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Pion nucleon scattering within a gauged linear sigma model with parity-doubled nucleons,” arXiv:nucl-th/0702076.
- [54] E. Klempt and A. Zaitsev, “Glueballs, Hybrids, Multiquarks. Experimental facts versus QCD inspired concepts,” Phys. Rept. **454** (2007) 1 [arXiv:0708.4016 [hep-ph]].
- [55] F. Giacosa, “Dynamical generation and dynamical reconstruction,” arXiv:0903.4481 [hep-ph].
- [56] R. L. Jaffe, “Multi - Quark Hadrons. 1. The Phenomenology Of (2 Quark 2 Anti-Quark) Mesons,” Phys. Rev. D **15** (1977) 267. R. L. Jaffe, “Multi - Quark Hadrons. 2. Methods,” Phys. Rev. D **15** (1977) 281.

- [57] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa and V. Riquer, “A new look at scalar mesons,” Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 212002 [arXiv:hep-ph/0407017]. G. ’. Hooft, G. Isidori, L. Maiani, A. D. Polosa and V. Riquer, “A Theory of Scalar Mesons,” Phys. Lett. B **662** (2008) 424 [arXiv:0801.2288 [hep-ph]].
- [58] F. Giacosa, SStrong and electromagnetic decays of the light scalar mesons interpreted Phys. Rev. D **74** (2006) 014028 [arXiv:hep-ph/0605191].
- [59] F. Giacosa, “Mixing of scalar tetraquark and quarkonia states in a chiral approach,” Phys. Rev. D **75** (2007) 054007 [arXiv:hep-ph/0611388].
- [60] A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, “Toy model for two chiral nonets,” Phys. Rev. D **72** (2005) 034001. A. H. Fariborz, “Isosinglet scalar mesons below 2-GeV and the scalar glueball mass,” Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 2095. M. Napsuciale and S. Rodriguez, “A chiral model for anti-q q and anti-q anti-q q q mesons,” Phys. Rev. D **70** (2004) 094043.
- [61] A. Salomone, J. Schechter and T. Tudron, “Properties Of Scalar Gluonium,” Phys. Rev. D **23** (1981) 1143.
- [62] Y. Chen *et al.*, “Glueball spectrum and matrix elements on anisotropic lattices,” Phys. Rev. D **73** (2006) 014516. [arXiv:hep-lat/0510074].
- [63] F. Giacosa, “Dynamical generation and dynamical reconstruction,” Phys. Rev. D **80** (2009) 074028 [arXiv:0903.4481 [hep-ph]].
- [64] L. Y. Glozman, “Restoration of chiral and $U(1)_A$ symmetries in excited hadrons,” Phys. Rept. **444** (2007) 1 [arXiv:hep-ph/0701081]. T. D. Cohen and L. Y. Glozman, “Chiral multiplets versus parity doublets in highly excited baryons,” Phys. Rev. D **65** (2002) 016006 [arXiv:hep-ph/0102206]. L. Y. Glozman, “Parity doublets and chiral symmetry restoration in baryon spectrum,” Phys. Lett. B **475** (2000) 329 [arXiv:hep-ph/9908207].
- [65] A. Heinz, S. Struber, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Role of the tetraquark in the chiral phase transition,” Phys. Rev. D **79** 037502 (2009), arXiv:0805.1134 [hep-ph].
- [66] *Compact Stars* von Norman K. Glendenning, 2nd ed., Juli 2000, Springer, Berlin, 10750437.
- [67] *Finite-temperature field theory* von Joseph I. Kapusta, Cambridge University Press, 1989.
- [68] T. D. Lee and G. C. Wick, “Vacuum Stability And Vacuum Excitation In A Spin 0 Field Theory,” Phys. Rev. D **9** (1974) 2291.
- [69] A. K. Kerman and L. D. Miller, “Field Theory Methods For Finite Nuclear Systems And The Possibility Of Density Isomerism. (Talk),” In **Berkeley 1974, Proceedings, Lawrence Berkeley Lab Lbl-3675*, Berkely 1974, 73-107*

- [70] B. D. Serot and J. D. Walecka, “Recent progress in quantum hadrodynamics,” Int. J. Mod. Phys. E **6** (1997) 515 [arXiv:nucl-th/9701058].
- [71] L. McLerran and R. D. Pisarski, “Phases of Cold, Dense Quarks at Large N_c ,” *Nucl. Phys. A* **796**(2007)83[arXiv : 0706.2191[hep – ph]].
- [72] L. McLerran, K. Redlich and C. Sasaki, “Quarkyonic Matter and Chiral Symmetry Breaking,” Nucl. Phys. A **824** (2009) 86 [arXiv:0812.3585 [hep-ph]].
- [73] G.E. Brown, “Die Entdeckung der Multipol-Riesenresonanzen in Atomkernen,” Physikalische Blätter (1997) 710.
- [74] D. H. Youngblood, H. L. Clark, and Y.-W. Lui, “Incompressibility of Nuclear Matter from Giant Monopole Resonance,” Physical Review Letters, Vol. 82, p. 691, 1999.
- [75] G. ’t Hooft, “A PLANAR DIAGRAM THEORY FOR STRONG INTERACTIONS,” Nucl. Phys. B **72** (1974) 461. E. Witten, “Baryons In The $1/N$ Expansion,” Nucl. Phys. B **160** (1979) 57. A. V. Manohar, “Large N QCD,” arXiv:hep-ph/9802419. E. E. Jenkins, “Large- N_c Baryons,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **48**(1998)81[arXiv : hep – ph/9803349].
- [76] *The Structure of the Nucleon* von Prof. Dr. Anthony W. Thomas und Prof. Dr. Wolfram Weise, ISBN: 9783527402977, Copyright 2001 WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin.
- [77] *Private Mitteilung von L. Ya. Glozman*
- [78] S. Capstick and N. Isgur, Phys. Rev. D **34** (1986) 2809.

Danksagung

Wie bei allen großen Projekten haben auch zu dieser Arbeit eine Vielzahl von Leuten beigetragen, denen ich allen zu großem Dank verpflichtet bin, da ohne sie diese Arbeit nicht erfolgreich hätte beendet werden können. Ich möchte allen danken, die in den letzten Jahren direkt oder indirekt an dieser Arbeit mitgewirkt haben, auch wenn es mir nicht möglich sein wird, jeden einzelnen namentlich zu nennen.

Der Ehrenplatz gebührt natürlich meinem Doktorvater, Dirk Rischke, dem ich nicht nur für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe danken will, sondern vor allem für seine unermüdliche Unterstützung und sein großes Engagement all diese Jahre. Ohne ihn wäre diese Arbeit nicht so geworden wie sie geworden ist.

Großen Dank gilt auch meinem Zweitgutachter Jürgen Schaffner-Bielich, dass er sich die Zeit dafür genommen hat, die Arbeit zu lesen. Darüber hinaus danke ich ihm für die kostbaren Diskussionen und Tipps während der gesamten Zeit meiner Promotion.

Einen ganz lieben Dank schulde ich natürlich auch allen meinen Kollegen, von denen viele mittlerweile zu guten Freunden geworden sind. Sie allen haben mit wertvollen Diskussionen, fachlichen Hilfestellungen und mit dem Schaffen eines wunderbaren Arbeitsklimas einen positiven Einfluss auf diese Arbeit genommen. Und natürlich muss ich ihnen auch für die „nicht-fachlichen“ Gespräche danken, für viele schöne Momente, den Spaß, den wir hier hatten, den ein oder anderen langen Abend...

Allen voran danke ich Francesco Giacosa, der mich immer in allen Projekten tatkräftig unterstützt und viele Probleme mit mir zusammen gelöst hat. Ohne ihn hätte Vieles viel länger gedauert. Ich danke Denis Parganlija für die fachlichen Diskussionen, sowie auch für seine persönliche Flugassistenz. Auch Dennis Dietrich war immer offen für Fragen und immer hilfsbereit. An dieser Stelle nochmal herzlichen Dank.

Auch meinen ganzen Freunden, die nicht in dieser Arbeitsgruppe sind und es teilweise noch nie waren, schulde ich Dank, dass sie immer für mich da waren, wenn ich sie gebraucht habe.

An letzter, aber wichtigster Stelle danke ich meiner Familie, insbesondere meinen Eltern für ihre unentwegte Unterstützung und ohne die nichts von all diesem möglich gewesen wäre, und Alex, der immer für mich da ist.

Vielen Dank gebührt auch meinen Schwiegereltern für die gewissenhafte Durchsicht dieser Dissertation.

Ich wäre nicht ich, würde ich nicht zum Schluß meinen Katzen danken, weniger für ihre zahlreichen Ablenkungsversuche, dafür um so mehr für ihr beständiges Schnurren und ihre Treue.

Lebenslauf

Name: Susanna Eva Gallas

Geburtsdatum: 28. Januar 1978

Geburtsort: Mannheim, Deutschland

1997

Abitur

Instituto Alonso Perez Diaz, La Palma, Spanien

Aufnahme des Physik-Studiums

Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg

2002

Diplom in Physik

Kirchhoff-Institut f. Physik

Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg

Betreuer: Prof. Dr. (em.) S. Hunklinger

2003

Wissenschaftliche Mitarbeit

Leibniz-Institut f. Atmosphärenphysik e.V. an der Universität Rostock (IAP), Kühlungsborn

2004

Wissenschaftliche Mitarbeit

Max-Planck-Institut für Biophysik, Frankfurt am Main

2005

Aufnahme des Promotionsstudiums in Physik

Institut f. Theoretische Physik

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

Betreuer: Prof. Dr. Dirk H. Rischke

2006 - 2008

Guest scientist

Columbia University in the City of New York, New York, USA