KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

5.08.2011

Aufgabe 1: Bohrsches Atommodell (14 Punkte)

1. Theoretischer Teil (8 Punkte).

   Welche Annahmen oder Postulate führen zum Bohrschen Modell für das Wasserstoffatom? Leiten Sie dabei die Energiequantisierung $E_n = -E_R/n^2$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ her, wobei $E_R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$.

2. Rechenaufgabe (6 = 1+ 2 + 3 Punkte).

   (a) Ein Elektron befindet sich auf dem Energieniveau $n = 2$ und zerfällt in den Grundzustand $n = 1$. Berechnen Sie die Frequenz ν des emittierten Photons.

   (b) Ein Elektron befindet sich im Grundzustand. Ein Photon mit Frequenz ν trifft auf das Elektron. Wie lautet die minimale Frequenz des Photons ν_{min}, damit das Elektron vom Proton getrennt wird?

   (c) Sei $\nu > \nu_{\text{min}}$. Berechnen Sie relativistisch den Impulsbetrag p des auslaufenden Elektrons.

Aufgabe 2: Schrödinger-Gleichung (25 Punkte)

1. Theoretischer Teil (10 = 4 + 3 + 3 Punkte).

   (a) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung an und wiederholen Sie die Schritte, die zur Kontinuitätsgleichung führen.

   (b) Warum ist die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik von zentraler Bedeutung?

   (c) Was ist das Energiespektrum eines Teilchens mit Masse m im Potential $V(x) = \frac{1}{2}k(x - 3\ \text{m})^2 + 5\ \text{J}$?

2. Rechenaufgabe (15 = 2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 3 Punkte).

   In einer räumlichen Dimension sei ein Potential $V(x)$ gegeben, welches ein einziges Minimum bei $x = 0$ hat, mit $V(0) = 0$, sowie $V(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ erfüllt. Seien $\phi_n(x)$ die Eigenzustände des Hamilton-Operators mit entsprechenden Eigenwerten E_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Zur Zeit $t = 0$ wird das System durch die folgende Wellenfunktion beschrieben:

   $$\psi(0, x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\ ,\ \text{mit } c_{n\geq 3} = 0\ . \tag{1}$$

   (a) Ist $E_0 = 0$ möglich?

   (b) Warum ist der Fall $c_0 = 3$ nicht zulässig?

   (c) Sei $c_0 = 1$. Berechnen Sie c_1 und c_2.

   (d) Sei $c_0 = 1/\sqrt{2}$ und sei bei einer Messung der Energie die Wahrscheinlichkeit, E_1 zu messen, doppelt so gross wie die, E_2 zu messen. Was weiß man über c_1 und c_2?

   (e) Schreiben Sie die Wellenfunktion $\psi(t, x)$ von Aufgabenteil (d) zu jeder Zeit t unter der Annahme, dass die Koeffizienten c_n reell sind.

   (f) Berechnen Sie den Mittelwert der Energie als Funktion der Zeit für den Fall von Aufgabenteil (d).

Aufgabe 3: Hilbert-Raum (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil (10 = 2 + 4 + 4 Punkte).

   (a) Wie lautet die Definition eines linearen Operators A?

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A reell sind, wenn A hermitesch ist.

(c) Sei das Quantensystem durch den Zustand $|s\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ beschrieben, wobei $A|a_n\rangle = \lambda_n |a_n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung von A der Wert λ_k gefunden wird? Wie lautet der Zustand des Systems $|s'\rangle$, nachdem die Messung stattgefunden hat und der Wert λ_k gefunden wurde?

2. Rechenaufgabe (11 = 2 + 3 + 3 + 3 Punkte).

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega_1 \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a\right) + \hbar\omega_2 \left(\frac{1}{2} + b^\dagger b\right) , \tag{2}$$

wobei $[a, a^\dagger] = 1$, $a|0\rangle = 0$, $[b, b^\dagger] = 1$, $b|0\rangle = 0$. (Alle anderen Kommutatoren verschwinden: $[a, b] = 0, \ldots$.)

(a) Berechnen Sie die Energie des Grundzustands $|0\rangle$.

(b) Ist der Zustand $a^\dagger b^\dagger |0\rangle$ normiert?

(c) Berechnen Sie die Energie des Zustands $a^\dagger b^\dagger |0\rangle$.

(d) Wie lautet das zweidimensionale Potential $V(x, y)$ im Ortsraum, das dem Hamilton-Operator von Gl. (2) entspricht?