PROBEKLAUSUR ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10

15.12.2010

Aufgabe 1: Feldenergie (15 Punkte)

1. Theoretische Frage ($6 = 1 + 2 + 3$ Punkte).
   (a) Geben Sie den Ausdruck der Energiedichte w und des Poyntingvektors $\vec{S}$ als Funktionen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an.
   (b) Geben Sie den Energiesatz in Differentialform an.
   (c) Sei $\vec{j} = \vec{0}$. Zeigen Sie, dass dann die gesamte Feldenergie eine erhaltene Größe ist.

1. Rechenaufgabe ($9 = 1 + 3 + 1 + 4$ Punkte).
   Gegeben sei das folgende elektrische Feld:

$$\vec{E} = \theta(x)\theta(L_1 - x)\theta(z)\theta(L_3 - z)\theta(y)\theta(L_2 - y)(A, B, C) \ , \tag{1}$$

   wobei A, B, C, L_1, L_2, L_3 positive Konstanten sind und $\theta(x)$ die Stufenfunktion ist. Das magnetische Induktionsfeld sei null.
   (a) Berechnen Sie die Energiedichte $w(x, y, z)$.
   (b) Berechnen Sie die gesamte Energie E_{Feld}.
   (c) Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$.
   (d) Ein Teilchen der Masse m und Ladung $q > 0$ befindet sich zur Zeit $t = 0$ in $\vec{r} = (L_1/2, L_2/2, L_3/2)$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $\vec{v} = \vec{0}$. Berechnen Sie die Trajektorie des Teilchens.

Aufgabe 2: 4-Potential (21 Punkte)

1. Theoretische Frage ($9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$ Punkte).
   (a) Geben Sie die Lagrangedichte der Elektrodynamik für das 4-Potential A^μ an.
   (b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für das Feld A^μ.
   (c) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung invariant unter der Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \eta$ sind, wobei $\eta(X)$ eine beliebige Funktion ist.
   (d) Wie transformiert A^μ sich unter einer Lorentz-Transformation?
   (e) Wie transformiert A_μ sich unter einer Lorentz-Transformation?

2. Rechenaufgabe ($12 = 2 + 2 + 3 + 3 + 2$ Punkte).
   Gegeben sei das 4-Potential

$$A^\mu = b\varepsilon^\mu \operatorname{Re} e^{\frac{i}{\hbar}(\omega t - kz)} \ , \tag{2}$$

   wobei b, k Konstanten sind und $\varepsilon^\mu \equiv (0, 0, 1, 0)$.
   (a) Wie muss ω lauten, damit die Maxwell-Gleichungen erfüllt sind?
   (b) Berechnen Sie $\partial_\mu A^\mu$.
   (c) Berechnen Sie das elektrische Feld.
   (d) Berechnen Sie das magnetische Induktionsfeld.
   (e) Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für $A^\mu = b\varepsilon^\mu \operatorname{Re} e^{\frac{i}{\hbar}(\omega t - kz)} + qX^\mu$, $q = const.$

Aufgabe 3: Dirac-δ (24 Punkte)

1. Theoretische Frage (9 = 2 + 3 + 2 + 2).

   (a) Geben Sie die Definition der Diracschen δ-Funktion $\delta(x)$ an.

   (b) Zeigen Sie, dass $\delta(x) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2+\eta^2}$ eine mögliche Darstellung der δ-Funktion ist.

   (c) Gegeben sei ein Punktteilchen der Ladung q, das sich bei $\vec{r}_0 = (1, 2, 1)$ m befindet. Wie lautet die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$?

   (d) Gegeben sei ein Volumen V, das den Punkt $\vec{r}_0$ enthält. Wie lautet der Fluss des vom Punktteilchen erzeugten elektrischen Feldes $\vec{E}$ durch die Fläche $S(V)$?

2. Rechenaufgabe (15 = 3 + 2 + 5 + 3 + 2 Punkte).

   Gegeben sei die Ladungsdichte

   $$\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \, \delta(2x - y) \, \theta\left(4L^2 - z^2\right) \theta(L^2 - x^2) \, , \tag{3}$$

   wobei $\sigma_0 = \textit{const.}$ eine konstante Flächenladungsdichte ist.

   (a) Zeichnen Sie die Region in der xy-Ebene, in der sich die Ladung befindet.

   (b) Zeichnen Sie die Region auf der xz-Ebene, in der sich die Ladung befindet.

   (c) Berechnen Sie die gesamte Ladung Q.

   (d) Gegeben sei ein Zylinder der Länge $l > 4L$ und des Radius R. Der Mittelpunkt des Zylinders stimme mit dem Koordinatenursprung überein. Gegeben sei die Fläche $S = S_Z \cup C_1 \cup C_2$, wobei S_Z die Mantelfläche des Zylinders, C_1 die Fläche des oberen Deckels und C_2 die Fläche des unteren Deckels ist. Berechnen Sie den Fluss des elektrischen Feldes $\vec{E}$ durch die Fläche S in Abhängigkeit von R.

   (e) Sei V das Volumen, das von der Fläche S eingeschlossen ist. Berechnen Sie die gesamte Ladung Q_V, die sich in V befindet.